# 断捨離と近似値

捨てる神あれば拾う神あり！！？

数実研会員　安田富久一

現在、週一 Zoom 勉強会で

『解析教程』（著：ハイラー＆ヴァンナー／訳：蟹江幸博）Springer

を輪読している。そこで出会った $\sqrt{2}$ の近似値に関する数学の流れが面白く感じたので紹介する。また、高一生でも愉しめるレベルなので授業や読み物プリントの題材に使えると思う。

【 断捨離法 】

$b$ の値が小さいときに $\sqrt{a+b}$ の値の近似値は $\sqrt{a}$ だと思える。これを

$$\sqrt{a+b} \approx \sqrt{a} \tag{1}$$

と表すことにする（$\approx$ の定義は何だ？　そんなことは余り深く考えないことにしましょう。高一生に極限概念など要求しない方が良いです)。

(1) の近似値 $\sqrt{a}$ よりも更に良い近似値を求めたい。どうやって求めるか**!**

誤差を $\delta$ とすると、

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \delta \tag{2}$$

$$a + b = a + 2\sqrt{a}\,\delta + \delta^2 \tag{3}$$

ここで、$\delta$ は小さいので $\delta^2$ はもっと小さいので断捨離する。

$$a + b = a + 2\sqrt{a}\,\delta \quad (\because (3) \text{ の式で断捨離して得た式})$$

$$\delta = \frac{b}{2\sqrt{a}} \tag{4}$$

(4) を (2) に代入して (1) よりもよりよい近似値

$$\sqrt{a+b} \approx \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} \tag{5}$$

【 例：$\sqrt{2}$ 】

まず、$\sqrt{2}$ の近似値を 1.4 としてみる。この近似値を $v = 1.4$ とおく。断捨離法で言うと、$\sqrt{a} = v$ つまり $a = v^2 = (1.4)^2$ としたことになるので、$b = 2 - v^2$ となり、(5) から、$v$ より良い近似値

$$v + \frac{2 - v^2}{2v} = \frac{1}{2}\left(v + \frac{2}{v}\right)$$

が得られる。つまり、次の事がわかったことになる。

**近似値 $\Longrightarrow$ より良い近似値**

$$f(v) = \frac{1}{2}\left(v + \frac{2}{v}\right)$$

$f(v)$ は $v$ よりも良い $\sqrt{2}$ の近似値である。

実際に近似値を求めてみよう。手軽な電卓使用でどうなるかやってみる。

$f(1.4) = 1.414285714285714$ となる。ところで、この $1.414285714285714$ を近似値 $v = 1.414285714285714$ と見れば、これよりも更に良い近似値 $f(v) = f(1.414285714285714)$ が得られることになる。求めてみると $f(1.414285714285714) = 1.414213564213564$

高一生はここまででも充実感が得られると思う。

(注) これを漸化式で表現すると

$$\begin{cases} v_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(v_n + \dfrac{2}{v_n}\right) \\ v_1 = v \end{cases}$$

となる。これは有名なニュートン法で、かつて数実研第 123・127 回でも取り扱った。今回紹介した断捨離法は私が勝手にネーミングをした。この方法は昔からよく知られた方法。この方法に特別な名前が付けられているかどうかは知らない。授業で扱う際にはこのような名前が付いていた方が良いかと思ったので付けただけである。

【 お話しは続く 】

(5) を改良してみよう。

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} + \delta$$

$$a+b = a+b+\frac{b^2}{4a} + 2\sqrt{a}\delta + \frac{b\delta}{\sqrt{a}} + \delta^2 \tag{6}$$

『$\sqrt{a+b}$ の近似値を $\sqrt{a}$ としてみた』という意識の中には『$b$ は $a$ に比べてかなり小さい』との捉え方があっただろうから、$\dfrac{b\delta}{\sqrt{a}} = \dfrac{b}{\sqrt{a}}\delta$ は $\delta$ 以上に酷く小さいと思える。そこで、$\dfrac{b\delta}{\sqrt{a}} + \delta^2$ を断捨離すると (6) は

$$a+b = a+b+\frac{b^2}{4a} + 2\sqrt{a}\delta$$

$$\delta = -\frac{b^2}{8\sqrt{a^3}}$$

$$\therefore\ \sqrt{a+b} \approx \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} - \frac{b^2}{8\sqrt{a^3}} \tag{7}$$

これを【 例：$\sqrt{2}$ 】でしたように $\sqrt{a} = v$ , $b = 2 - v^2$ として $v$ よりも良い近似値 $f(v)$ が

$$f(v) = v + \frac{2-v^2}{2v} - \frac{(2-v^2)^2}{8v^3} = \frac{3v}{8} + \frac{3}{2v} - \frac{1}{2v^3}$$

と得られる。これを用いて $\sqrt{2}$ の近似値を求めていくと、

$$f(1.4) = 1.414212827988338$$

$$f(1.414212827988338) = 1.414213562373095$$

と得られる。実は、岩波数学辞典に書かれている数値が $\sqrt{2} = 1.414213562373095$ であり、完全に一致した近似値が得られている。

【 更に上る一層の楼 】

(5),(7) の式で両辺を $\sqrt{a}$ で割り $\dfrac{b}{a}$ を $x$ に置き換えると

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x \quad , \quad \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2$$

が得られる。

更により良い近似式が欲しければ、先ほどの計算を続けていけば良いが、結果は

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} + ax^2 + bx^3 + cx^4 + \cdots$$

のような形になるだろう。この $a, b, c, \cdots$ を求めて行ければよい。

$$\begin{aligned} 1 + x &= (1 + \frac{x}{2} + ax^2 + bx^3 + cx^4 + \cdots)(1 + \frac{x}{2} + ax^2 + bx^3 + cx^4 + \cdots) \\ &= 1 + x + \left(2a + \frac{1}{4}\right)x^2 + (a + 2b)\,x^3 + \left(a^2 + b + 2c\right)x^4 + \cdots \end{aligned}$$

となり係数比較して

$$2a + \frac{1}{4} = 0 \ , \ a + 2b = 0 \ , \ a^2 + b + 2c = 0 \ , \ \cdots$$
$$\therefore \ a = -\frac{1}{8} \ , \ b = \frac{1}{16} \ , \ c = -\frac{5}{128} \ , \ \cdots$$

これから、

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots$$

が得られる（この式は 1665 年のニュートンの著述にある式)。

【 注 】 タイトルの副題を

『捨てる神あれば拾う神あり』（諺）

自分に愛想をつかして相手にしてくれない人もいる反面、親切に助けてくれる人もいるものだ。困ったことがあっても、くよくよするなということ。

としたが、1 ページの (3)〜(5) が（意味のイメージではなく）その言葉のイメージに合っているような気がして、イメージ的に付けた言葉である。知り合いの若い先生に尋ねたところ、この諺を聞いたことがない、という事だったので、注として付記した。