盛付けで風味を変える：フォードの円

数実研会員　安田富久一

ウィキペディア店で見つけた高校生に美味しい食材“フォードの円”の調理の紹介（笑）。

ファレイ数列に関する事をいろいろ調べていたところ、検索でウィキペディアのファレイ数列がヒット。その中の項目で“フォードの円”に出会った。このフォードの円についての説明は事実記載のみで証明が付いていないものがあった。正しいかどうか確認（証明）に取り組んでみたところ、高校生の良い教材になるのでは、と思うことがあった。それが今回のレポート発表の動機である。

１．素材（食材！）

ウィキペディアにあった“フォードの円”で得た動機に関する部分を抜き書きすると次の通り（ウィキペディアと表記や語句の順番等は少し変えてある。参考として、全文は本レポートの最終ページの ４．補足 (II) に抜き書きしておいた）。

フォードの円（ウィキペディアの内容概要）

任意の既約分数 $\dfrac{p}{q}$ に対して、中心が $\left(\dfrac{p}{q}, \dfrac{1}{2q^2}\right)$ で、半径が $\dfrac{1}{2q^2}$ の円をフォードの円 $C[p/q]$ と言う。

異なる 2 つの分数に対する 2 つのフォードの円は、互いに交わらないか接しているかのどちらかであって交わることはない。

（自分が取り組んだでみた証明）

2 つのフォードの円：$C[p_1/q_1]$, $C[p_2/q_2]$ について、2 円の中心間の距離を d、2 円の半径の和及び差を r_+ , r_- とする。

$$d = \sqrt{\left(\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2q_1^2} - \frac{1}{2q_2^2}\right)^2} \quad , \quad r_+ = \frac{1}{2q_1^2} + \frac{1}{2q_2^2} \quad , \quad r_- = \left| \frac{1}{2q_1^2} - \frac{1}{2q_2^2} \right| \tag{1}$$

である。$d = \sqrt{\left(\dfrac{p_1}{q_1} - \dfrac{p_2}{q_2}\right)^2 + r_-^2} > r_-$ であり、片方の円が他方の円に含まれることがないため、交わるための必要十分条件は $d < r_+$ である。

$$d^2 - r_+^2 = \left(\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2q_1^2} - \frac{1}{2q_2^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2q_1^2} + \frac{1}{2q_2^2}\right)^2 = \frac{(q_2p_1 - q_1p_2)^2 - 1}{q_1^2q_2^2}$$

なので、

$$|q_2p_1 - q_1p_2| < 1 \quad \therefore\ q_2p_1 - q_1p_2 = 0 \quad (\because\ \ q_2p_1 - q_1p_2 : \text{整数}) \tag{2}$$

既約分数 $\dfrac{p_1}{q_1}, \dfrac{p_2}{q_2}$ は異なるので、$q_2p_1 - q_1p_2 \neq 0$ である。よって、交わることはない。

（証明終わり）

２．料理（エモい風味を大切に）

前ページの証明中、(??) で $|q_2p_1 - q_1p_2| < 1$ から $q_2p_1 - q_1p_2 = 0$ を導くところに整数の離散性が効いている。実数に関する処理を多く扱っていると、“ $|x| < 1 \iff -1 < x < 1$ ” が直ぐに頭に浮かび、上記のような解決にはなかなか至らないように思う。フォードの円の上記性質が、整数に関する問題の解決スキルを培う問題として使えることはもちろんだが、不等式から等式に変わる面白さ・痛快さ（私の個人的感覚）といった、情動に関わる部分を生徒に味わわせてやれる教材になると思った。この情動から来る “ エモさ ” を感じさせてやるのも大切な数学教育ではないか。

今回の題材：フォードの円とその性質、は授業でどういう扱いができるか思い浮かべてみる。大雑把に言って、次の 3 点が浮かぶ。

(A) フォードの円の定義とフォードの円が持つ性質をそのまま説明して伝える。
(B) 前ページ枠内を証明問題として解かせる。
(C) 与えたい数学の風味（情動面）をより強く感じるよう、発問（盛付方法）を工夫する。

(A) は授業としてよく行われている形態だと思う。(B) は例えば、『異なるフォードの円が異なる 2 点で交わることは無いことを示せ』という発問をする、といった意味である。

整数の持つ離散性の面白さやそれを発見した際の爽快感、それをより強く感じさせてやりたい。そのために盛付け方（教材の与え方）を工夫してみよう、というのが本レポートの中心部分で、それが (C) であり、その例を次に示してみた。

３．調理・盛付け

盛付け例

既約分数 $\dfrac{p}{q}$ に対して、中心が $\left(\dfrac{p}{q}, \dfrac{1}{2q^2}\right)$ で、半径が $\dfrac{1}{2q^2}$ の円を $C[p/q]$ と表す。

(i) 半径が R, r $(R > r)$ である 2 つの円があり、中心間の距離は d であるとする。この 2 つの円が接する条件を R, r, d を用いて述べよ。

(ii) 異なる 2 つの円 $C[p_1, q_1]$, $C[p_2, q_2]$ が接する条件を求めよ。

(iii) 異なる 2 つの円 $C[p_1, q_1]$, $C[p_2, q_2]$ が接しない、つまり共有点をもたない場合や、異なる 2 点で交わる場合について条件を考察せよ。

(iv) 上記で調査からわかるフォードの円が持つ性質を命題としてまとめよ。

上記例の (iii) が、今回盛付け工夫のメインである。『異なる 2 点で交わることはないことを証明せよ』という盛付け方もある。

ただ、“ 教師からのヒント投げかけがない段階で、整数の離散性に気づき、見抜いたことで得られる情動的側面（エモさ）、それを際立たせてやりたい ”、そのように食材（教材）を調理したい、という気持ちで作る発問例としてレポートした。

次ページに一応上記例の解答の概要を記しておく。

（解答概記）

(i)　（外接）$d = R + r$、(内接)$d = R - r$。

(ii)　$|q_2p_1 - q_1p_2| = 1$。

(iii)　共有点を持たないのは $d > r_+$ または $d < r_-$：$|q_2p_1 - q_1p_2| > 1$ または $|q_2p_1 - q_1p_2| < 1$。後者が成り立つ整数 $q_2p_1 - q_1p_2$ は 0 のみで、これは 2 つの既約分数が一致することと同値。よって、前者のみが起こりえるので、求める条件は $|q_2p_1 - q_1p_2| > 1$。

(iv)　p.1 の枠内に記した内容。

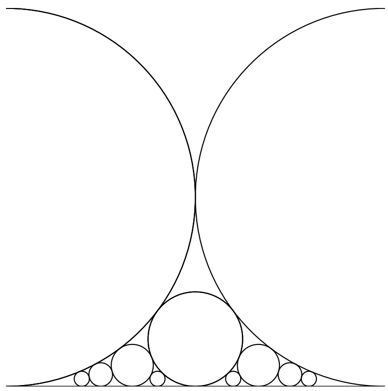
４. 補足

(I)　例で提示した題材は第 72 回数実研（2010 年）に「いつか一度使ってみたかった技」というタイトルで紹介した技と同種の風味のものになるが、今回は『教材 (料理) の目的により味付け・盛付けを変える』という趣旨で紹介した。

(II)　【 ウィキペディアにあったフォードの円の記載 】
ウィキペディア フリー百科事典の " ファレイ数列 " の中にある項目 " フォードの円 " について、文章部分をそのまま次に抜き書きしておきます（写し間違いがある可能性がある)。

フォードの円

ファレイ数列とフォードの円との間にもおもしろい関係がある。任意の既約分数 $\dfrac{p}{q}$ に対して、フォードの円 $C[p/q]$ は中心が平面座標 $\left(\dfrac{p}{q}, \dfrac{1}{2q^2}\right)$ にある半径 $\dfrac{1}{2q^2}$ の円である。異なる 2 つの分数に対する 2 つのフォードの円は、互いに交わらないか接しているかのどちらかであって交わることはない。もし、$0 < \dfrac{p}{q} < 1$ ならば、$C[p/q]$ に接するフォードの円とはまさにあるファレイ数列において隣接する分数のフォードの円に他ならない。



(III)　フォードの円とファレイ数列については、数実研会員の中村文則先生が『不思議数との出会いの覚え書き（51〜100 篇)』(ホームページ " 数学のいずみ " の著者別索引から中村先生ご本人を選ぶと見つかる）の最後の 2 ページ：p.51〜p.52 にも詳しい話がある。