＜一粒で二度美味しい＞

楕円内の最大三角形

（しかも練習のための練習問題ではなく数学的興味を満たす課題）

数実研会員　安田富久一

0.1　課題設定:楕円内の最大三角形

与えられた楕円上に頂点を持つ三角形で面積最大の三角形と元の楕円の面積比は楕円によりどのように変化するか？ そのようなことを考えてみたい。それの解決策の一つとして次のように課題を設定してみた。

【 攻略手順としての課題設定 】

座標軸を適当に設定し、楕円は次の方程式 (1) で表されているとして一般性を失わない。

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

【１】　楕円上の 2 点 $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ が与えられているとする。楕円上に点 C をとるとき、$\triangle ABC$ の面積の最大値 $M(A, B)$ を求め、また $C(x_C, y_C)$ をどのように取れば最大になるかを調べる。

【２】　上で求めた最大値 $M(A, B)$ の最大値 $T(a, b)$ を求め、最大値を与える 3 点 A, B, C について考察する。

【３】　【１】･【２】で調べて得た結果を報告としてまとめよ。

0.2　課題攻略

【１】(1 つ目の味：コーシー・シュワルツ)

A, B の座標を $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ とする。点 $C(x_C, y_C)$ から線分 AB に下ろした垂線の長さを h とすると、$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot h\cdot\overline{AB}$ であり、$\overline{AB}$ は定数なので、h を最大にすれば $\triangle ABC$ は最大になる。逆に言うと、線分 AB から一番遠くにある楕円上の点にとれば、$A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ を固定したときの $\triangle ABC$ の最大値が得られる。直線 AB の方程式は

$$(y_A-y_B)(x-x_A)-(x_A-x_B)(y-y_A)=0$$
$$\therefore\ (y_A-y_B)x-(x_A-x_B)y+x_Ay_B-x_By_A=0$$

である。点 C から直線 AB までの距離 h は

$$h=\frac{|(y_A-y_B)x_C-(x_A-x_B)y_C+x_Ay_B-x_By_A|}{\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}} \tag{2}$$

である。$\overline{AB}=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$ なので、

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot h\cdot\overline{AB}=\frac{1}{2}\,|\,(y_A-y_B)x_C-(x_A-x_B)y_C+x_Ay_B-x_By_A\,| \tag{3}$$

(3) の絶対値の中にある式について、コーシー・シュワルツの不等式から

$$\begin{aligned}\{(y_A-y_B)x_C-(x_A-x_B)y_C\}^2 &\leqq \left\{a^2(y_A-y_B)^2+b^2(x_A-x_B)^2\right\}\left\{\frac{{x_C}^2}{a^2}+\frac{(-y_C)^2}{b^2}\right\}\\ &= a^2(y_A-y_B)^2+b^2(x_A-x_B)^2\end{aligned}$$

$$\therefore\ -Q \leqq (y_A-y_B)x_C-(x_A-x_B)y_C \leqq Q \tag{4}$$

（但し $Q=\sqrt{a^2(y_A-y_B)^2+b^2(x_A-x_B)^2}$ ）

が成り立つ。ここで、等号成立条件は $a(y_A-y_B):b(x_A-x_B)=\dfrac{x_C}{a}:\dfrac{-y_C}{b}$ つまり、

$$^{\exists}k : x_C=a^2(y_A-y_B)k\,,\ y_C=-b^2(x_A-x_B)k \tag{5}$$

と表せることである。点 C は (1) 上にあるので、$\dfrac{{x_C}^2}{a^2}+\dfrac{{y_C}^2}{b^2}=1$ を満たす。この式と (5) とから x_C, y_C を消去すると

$$\frac{\{a^2(y_A-y_B)k\}^2}{a^2}+\frac{\{-b^2(x_A-x_B)k\}^2}{b^2}=1$$

なので、$k=\pm\dfrac{1}{\sqrt{a^2(y_A-y_B)^2+b^2(x_A-x_B)^2}}=\pm\dfrac{1}{Q}$ のときである。つまり、(4) において等号を成立させる点 C の座標は、(5) より

$$\left(\pm\frac{a^2(y_A-y_B)}{Q}\ ,\ \mp\frac{b^2(x_A-x_B)}{Q}\right)\ \text{（複号同順）} \tag{6}$$

(3),(4) より

$$\frac{1}{2}(-Q+x_Ay_B-x_By_A) \leqq \triangle ABC \leqq \frac{1}{2}(Q+x_Ay_B-x_By_A)$$

であり、等号は点 C が (6) にあるとき、かつその時に限り成り立つ。このことから、面積の最大値 $M(A,B)$ について、次の事がわかった。

$$M(A,B)=\frac{1}{2}\max\{\ |-Q+x_Ay_B-x_By_A|\,,\ |Q+x_Ay_B-x_By_A|\ \} \tag{7}$$

（最大値 $M(A,B)$ を与える点 C は (6)）

【 2 】（2 つ目の味：三角関数の変形）

$M(A,B)$ を最大にする 2 点 A, B について考察しよう。A, B は楕円上の点なので、その座標は $A(a\cos A, b\sin A)$, $B(a\cos B, b\sin B)$ とおける（点の名前と角度の名前を同じ文字 A, B を用いたが、混乱はないと思う）。ここで、一般性を失うことなく $0 \leqq A < B < 2\pi$ としてよいことは明らか。このように置くと (4) の下の行より

$$\begin{aligned}Q &= \sqrt{a^2(b\sin A-b\sin B)^2+b^2(a\cos A-a\cos B)^2}\\ &= ab\sqrt{2-2\cos(B-A)}\\ &= 2ab\sqrt{\sin^2\frac{B-A}{2}}\\ &= 2ab\sin\frac{B-A}{2}\quad\left(\because\quad 0<\frac{B-A}{2}<\pi\ \right)\end{aligned}$$

また、

$$x_A y_B - x_B y_A = ab(\cos A \sin B - \cos B \sin A) = 2ab \sin \frac{B-A}{2} \cos \frac{B-A}{2}$$

なので、

$$M(A,B) = ab \sin \frac{B-A}{2} \left(1 \pm \cos \frac{B-A}{2}\right)$$

ここで、$0 < \sin \dfrac{B-A}{2} \leqq 1$, $0 < 1 \pm \cos \dfrac{B-A}{2} \leqq 1$ なので

$$M(A,B) \leqq ab \tag{8}$$

である。ここで、等号が成り立つのは、$\sin \dfrac{B-A}{2}$ 及び $1 \pm \cos \dfrac{B-A}{2}$ が 1 となるのはどちらも $\dfrac{B-A}{2} = \dfrac{\pi}{2}$、つまり $B = A + \pi$ のときであり、かつその時にしか起こりえない。$B = A + \pi$ のとき点 B は $(a\cos(A+\pi), b\sin(A+\pi))$ であり、これは $(-a\cos A, -b\sin A)$ ということなので、A, B が原点（今の場合、楕円の中心でもある）を中心とする点対称の点である。

次に、楕円上の 2 点であり、かつ原点に関する対称な 2 点を $A(x_0, y_0)$, $B(-x_0, -y_0)$ とする。このとき、点 C が x_0, y_0 を用いてどのように表されるかについて (6) を計算する。$x_A = x_0$, $y_A = y_0$, $x_B = -x_0$, $y_B = -y_0$ なので、

$$Q = \sqrt{4(a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2)} = 2ab \quad \left(\because\ (x_0, y_0) \text{ は楕円 (1) 上の点で、} \frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{{y_0}^2}{b^2} = 1\right)$$

$$y_A - y_B = 2y_0\ ,\ x_A - x_B = 2x_0$$

$$\therefore\ C\left(\pm \frac{a y_0}{b}\ ,\ \mp \frac{b x_0}{a}\right) \quad \text{(複号同順)} \tag{9}$$

以上で (8) の等号が成立する場合が保証されたので、$T(a,b) = ab$ であることがわかった。

【 3 】（まとめ）楕円 (1) の面積は $ab\pi$ なので、【 1 】・【 2 】の調査でわかったことは、

- 楕円に内接する面積最大の三角形の面積はその楕円の $\dfrac{1}{\pi}$ である。
- 上記最大面積の三角形は楕円 (1) 上に原点対称な 2 点 (x_0, y_0) , $(-x_0, -y_0)$ を任意に取って 2 頂点とし、残りの頂点を $\left(\pm \dfrac{a y_0}{b}\ ,\ \mp \dfrac{b x_0}{a}\right)$ のどちらかに取って得られる。

0.3 補足

【 補足 1 】（原題）

数学セミナー 1 月号の記事 “ エレガントな解答を求む ” に次の問題が出された。

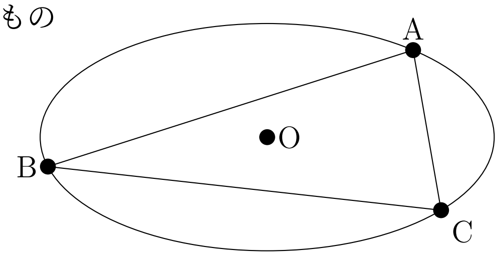
エレガントな解答を求む

3 辺長が $a = BC, b = CA, c = AB$ である $\triangle ABC$ の面積を S とします。この三角形に外接する（3 点を通る）楕円のうち、その囲む面積 S^* が最小のものを求めて下さい。特に

(i) 楕円の中心 O の位置

(ii) $S^* : S$ の比の値

を明記して下さい。



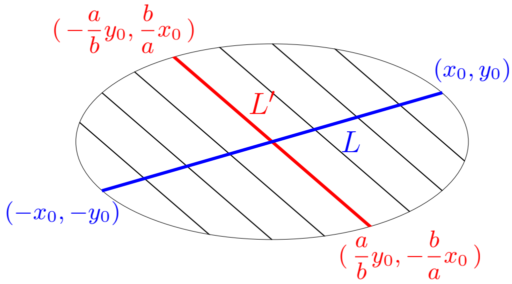
三角形が先に与えられていて、それに外接する楕円の最小面積を考えよ、という問題。こちらの問題の攻略がなかなかうまくいかず、じゃあ逆にしてみたらどうなるか、と考えてやってみたらなかなか面白く綺麗な話になったので紹介したいと思ったのが発表の動機である。〆切時間切れでこの問題は解答の応募はできなかったけれど、教材ネタという副産物が得られた。

【 補足 2 】(楕円の直径・共役な直径)

円だけでなく、楕円にも直径と名付けられているものがある(もっと言うと一般に楕円以外に放物線や双曲線にもある)。そして、更に一つの直径に共役な直径と呼ばれているものもある。一応楕円を例に定義を述べておくと、

<楕円の直径とその直径に共役な直径>

楕円があるとする。一つの直線に平行なすべての直線を考える。その直線が楕円と 2 点で交わるとき、その 2 点の中点の軌跡 L をその楕円の**直径**という。また、直線 L に平行なすべての直線と楕円との交点の中点として得られる直径 L' を L に共役な直径と言う。そして、このとき L' に共役な直径は L になるので、L と L' は互いに共役な直径である。



楕円を $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$、$L$ の両端を (x_0, y_0) , $(-x_0, -y_0)$ とすると、L' の両端は $(\pm\dfrac{a}{b}y_0\,,\mp\dfrac{b}{a}x_0)$ となる。