

こんな授業どうでしょう 1

＜合い言葉＞ 発見に証明はいらない

数実研会員：安田富久一

いろいろ遊んでみる授業の提案です。厳密でありすぎることは目的外、をご了承ください。

楽しめれば良い！これを原則にしての案です。極限はどうのこうのとか、それは有効数字じゃないとか、気にしませんので、予めお知らせしておきます。

1 $\tan x$ の連分数表示を素材として

次の素材を授業 or 課題のネタにしてはどうか。

(素ネタ)

$$(A) \quad \tan x = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{7 - \frac{x^2}{9 - \ddots}}}}} \quad (x: \text{ラジアン})$$

(B) 【定理】 $x (\neq 0)$ が有理数なら $\tan x$ は無理数である。

【系】 π は無理数である。

(ネタの下処理)

(A 1) $\pi = 3.14$ として $x = 0.1, 0.2, \dots, 1$ のときの $\tan x$ の値の表を作成。

(A 2) 上記と同じ状況で $f_5(x) = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5}}}$, $f_7(x) = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{7}}}}$ の値の表を作成。

(A 3) $\pi = 3.1415$ として (A 1), (A 2) 同様に値の表を作成。

(B 1) ((A) を認めて) $\tan \frac{m}{n} = \frac{m}{n - \frac{m^2}{3n - \frac{m^2}{5n - \frac{m^2}{7n - \frac{m^2}{9n - \ddots}}}}}$ の確認

(B 2) 次の定理の条件を (B 1) の $\tan \frac{m}{n}$ の連分数は満たすことの確認。

【定理】 右の連分数は次の条件を満たすとする。

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n (\in \mathbb{N}) \geq N, 2|p_n| \leq q_n - 1$$

このとき、連分数は無理数である。

$$\cfrac{p_1}{q_1 + \cfrac{p_2}{q_2 + \cfrac{p_3}{q_3 + \cfrac{p_4}{\ddots}}}}$$

2 三角比の表の値と右辺の比較 1 (ラジアン主体で)

$$\tan x \quad \text{と} \quad f_5(x) = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5}}} \quad (x: \text{ラジアン}) \quad (2.1)$$

に値を入れて実験する。

(I) 下の表を完成させよう。

$x(\text{rad})$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$f_5(x)$	0.1003	0.2027	0.3093	0.4228	0.5463	0.6841	0.8422	1.0294	1.2595	1.5556

(II) 三角関数表を使うため、ラジアンと度の換算式を作っておく。 $X^\circ = x(\text{rad})$ とすると、

$$X = \frac{180x}{\pi} \quad (2.2)$$

(III) (2.2) を用いて、 $x = 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 1$ を度 (X) に変換しよう。 $\pi = 3.14$ として小数第 1 位まで計算 (小数第 2 位四捨五入) し、三角関数表で $\tan x$ を計算しよう。

三角関数表の角度は整数の角度の値の時にしか書かれていない。小数第 1 位まで書いてある角度について、表を利用するにはどのようにすれば良いかアイデアを出せ。

$x(\text{rad})$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$X^\circ(1 \text{ 位})$	5.7	11.5	17.2	22.9	28.7	34.4	40.1	45.9	51.6	57.3
$\tan(X^\circ)$	0.0998	0.2035	0.3095	0.4224	0.5475	0.6848	0.8421	1.0320	1.2619	1.5580
$f_5(x)$	0.1003	0.2027	0.3093	0.4228	0.5463	0.6841	0.8422	1.0294	1.2595	1.5556
差	0.0005	0.0008	0.0002	0.0004	0.0012	0.0007	0.0001	0.0026	0.0024	0.0024

(IV) $\pi = 3.1415$ として X 度を小数第 2 位まで求めたらどうなるか？。

$x(\text{rad})$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$X^\circ(2 \text{ 位})$	5.73	11.46	17.19	22.92	28.65	34.38	40.11	45.84	51.57	57.30
$\tan(X^\circ)$	0.1003	0.2028	0.3093	0.4229	0.5464	0.6843	0.8424	1.0298	1.2606	1.5580
$f_5(x)$	0.1003	0.2027	0.3093	0.4228	0.5463	0.6841	0.8422	1.0294	1.2595	1.5556
差	0.0000	0.0001	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0004	0.0011	0.0024

(V) $f_7(x) = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{7}}}}$ まで計算したらどうなるか。

$x(\text{rad})$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$X^\circ(2 \text{ 位})$	5.73	11.46	17.19	22.92	28.65	34.38	40.11	45.84	51.57	57.30
$\tan(X^\circ)$	0.1003	0.2028	0.3093	0.4229	0.5464	0.6843	0.8424	1.0298	1.2606	1.5580
$f_7(x)$	0.1003	0.2027	0.3093	0.4228	0.5463	0.6841	0.8423	1.0296	1.2601	1.5574
差	0.0000	0.0001	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0001	0.0002	0.0005	0.0006

(VI) f_5 まで計算したときの差と、 f_7 までのときの差とを並べてみる。

$x(\text{rad})$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
f_5 時の差	0.0000	0.0001	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0004	0.0011	0.0024
f_7 時の差	0.0000	0.0001	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0001	0.0002	0.0005	0.0006

3 三角比の表の値と右辺の比較 2 (度主体で)

(I) 三角関数表を使うため、ラジアンと度の換算式を作っておく。 $X^\circ = x(\text{rad})$ とすると、

$$x = \frac{\pi X}{180} \quad (3.1)$$

(II) (3.1) を用いて、 $10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, \dots, 80^\circ$ をラジアンに変換し、 $f_5(x), f_7(x)$ を計算する

$X(\text{度})$	10	20	30	40	50	60	70	80
$x(\text{rad})$	0.1745	0.3491	0.5236	0.6981	0.8726	1.0472	1.2217	1.3962
$f_5(x)$	0.1763	0.3640	0.5773	0.8390	1.1911	1.7291	2.7300	5.5153
$f_7(x)$	0.1763	0.3640	0.5774	0.8390	1.1916	1.7320	2.7468	5.6639
$\tan X$	0.1763	0.3640	0.5774	0.8391	1.1918	1.7321	2.7475	5.6713

4 上記資料をどの様に授業に

三角関数表を使うという想定で進めると、0.3 三角比の表の値と右辺の比較 2 (度主体で) が取り組み易いか？ 但し、0.2 三角比の表の値と右辺の比較 1 (ラジアン主体で) は本当に近似値のように見える利点がある。

実際に授業では料理として生徒達にどのようなものがあるか、思いつくままに書く。

(A) $\tan x$ と $f_5(x)$ が $x = 1$ に近いところでは誤差が目につくところが良いなあ。 $\tan x$ と $f_5(x)$ 及びその差の表を完成させたところで、

- 『どうや、 $\tan x$ の表の値にピッタシちゃうかあ！、・・・あかんか？』とか何か言いながら生徒の様子を見て、誤差の現れ方に注目させるように持って行き、「 x が小さいときはほぼ一致してるけど、1 に近くなって行くにつれて誤差が目に残る」というような感じの気づきが出てくれたら嬉しい。
- 上記気づきだけでなく、とか、と言うてくれる生徒もいてくれると嬉しい。
- 上記に気づき（生徒が言うてくれへんかったら、それに気づくように教師が誘導し）、それを確かめるためにはどんな実験をすれば良いかを考えさせたい。

$\pi = 3.14$ が余りにも大雑把な近似値やから $\pi = 3.1415$ にしたらどうなるやろ！

X の値を小数点以下第 2 位まで出してみたらどうなる？

等の気づきを昇華させるための目標・方向・方法の案を生徒が考えてくれると嬉しい。

(B) 最初に (2.2) と $\tan x$ は等しいと言ってしまっ、 $f_5(x), f_7(x), \dots$ としていくと $\tan x$ になっていく”ことが知られている、と伝えてしまうのも一方法。

(C) “(II), (III) の表からどんなことが言えそうか予想せよ”という発問も面白い。

(D) “(IV) の予想を確かめるためにどんな実験をしたいか考え、実験を実行せよ”も面白い。

(E) “【定理】 $x (\neq 0)$ が有理数なら $\tan x$ は無理数”を確認した後、これから何かわかることある？！ と発問、“【系】 π は無理数”と気づく生徒がいるのを待つのも楽しい！