こんな授業どうでしょう２
＜合い言葉＞すぐ遊んでみよう

＜ $\log x$ の積分公式＞

数実研会員：安田富久一

1　遊びの発端：*log* の積分方法

数IIIの教科書を見ると、部分積分の説明の後に例題として $\log x$ の不定積分の問題があり、次のような解答がある。

$$\int \log x dx = \int (\log x)\cdot(x)' dx = (\log x)\cdot x - \int (\log x)'\cdot x dx$$
$$= (\log x)\cdot x - \int \frac{1}{x}\cdot x dx = x\log x - x + C$$

この解答の前に、考え方として：$\log x = (\log x)\cdot 1 = (\log x)\cdot)(x)'$ と説明がある。

こんな面白い方法を見せられて、“他のにもやってみよう”と生徒達には思って欲しいですよね。でも現実にはそういう生徒はそう多くはないかも知れません、知らんけど（大阪弁ですんません）。

1.1　部分積分でどう遊ぶ

教科書にあった考え方を定積分で使って遊んでみる（遊びやから、連続か？ とか、微分できるの？ とか、煩わしいことは気にせず、大らかに遊びましょう）。

(i) $f(a) = \int_0^a f'(x)\,dx + f(0)$ が成り立つことを確認しよう。

（答）右辺 $= [f(x)]_0^a + f(0) = (f(a) - f(0)) + f(0) = f(a) =$ 左辺　　（確認了）

(ii) e^x について (i) の式を書いてみよう。

（答）
$$e^a = \int_0^a e^x\,dx + 1 \tag{1.1}$$

(iii) (1.1) 式を素にして、log の部分積分を真似て遊んでみよう。

（答）
$$e^a = \int_0^a e^x\cdot(x)'\,dx + 1 = [e^x\cdot x]_0^a - \int_0^a e^x\cdot x\,dx + 1 = ae^a - \int_0^a e^x\cdot x\,dx + 1 \tag{1.2}$$

左辺の e^a が右辺にも出てきた。（移項して $e^a = \cdots$ なんていう式を作っても遊べるけれど、ここでは別の遊びを）。(1.1) を (1.2) の右辺に代入してみよう

$$e^a = a\left(\int_0^a e^x\,dx + 1\right) - \int_0^a xe^x\,dx + 1$$
$$= 1 + a + \int_0^a e^x(a-x)\,dx \tag{1.3}$$

(iv) (1.3) の後も (1.3) を素に勝手に（先生がやってみようなんていう前にドンドン自分で）次のような遊びをやってくれたら嬉しいですね。

$$
\begin{aligned}
e^a &= 1 + a + \int_0^a e^x \left\{ -\frac{1}{2}(a-x)^2 \right\}' dx \quad (\because\ (1.3)) \\
&= 1 + a + \left[-e^x \cdot \frac{1}{2}(a-x)^2 \right]_0^a + \int_0^a e^x \cdot \frac{1}{2}(a-x)^2\, dx \\
&= 1 + a + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}\int_0^a e^x \cdot (a-x)^2\, dx \\
&= 1 + a + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}\int_0^a e^x \cdot \left\{ -\frac{1}{3}(a-x)^3 \right\}' dx \\
&= 1 + a + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}\left\{ \left[-e^x \cdot \frac{1}{3}(a-x)^3 \right]_0^a + \int_0^a e^x \cdot \frac{1}{3}(a-x)^3\, dx \right\} \\
&= 1 + a + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3 \cdot 2}a^3 + \frac{1}{3 \cdot 2}\int_0^a e^x \cdot (a-x)^3\, dx
\end{aligned}
$$

(v) ここまで来たら、数学的帰納法なんて野暮なこと言わなくても

$$
e^a = 1 + \frac{1}{1\,!}a + \frac{1}{2\,!}a^2 + \frac{1}{3\,!}a^3 + \cdots + \frac{1}{n\,!}a^n + \frac{1}{n\,!}\int_0^a e^x \cdot (a-x)^n\, dx
$$

と遊んで自然にテイラー展開発見者になれた。

a はどんな値でも良いから、これは関数として次のように書いておく。

$$
e^x = 1 + \frac{1}{1\,!}x + \frac{1}{2\,!}x^2 + \frac{1}{3\,!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n\,!}x^n + \frac{1}{n\,!}\int_0^x e^t \cdot (x-t)^n\, dt \tag{1.4}
$$

(vi) ここまで来たら e の値の近似値や有名な式も出しましょう。

$$
e = 1 + \frac{1}{1\,!} + \frac{1}{2\,!} + \frac{1}{3\,!} + \cdots + \frac{1}{n\,!} + \frac{1}{n\,!}\int_0^1 e^x \cdot (1-x)^n\, dx \tag{1.5}
$$

$$
0 \leqq \frac{1}{n\,!}\int_0^1 e^x \cdot (1-x)^n\, dx \leqq \frac{e}{n\,!}
$$

$$
\lim_{n \to \infty} \frac{e}{n\,!} = 0 \quad \therefore \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n\,!}\int_0^1 e^x \cdot (1-x)^n\, dx = 0
$$

$$
\therefore \quad e = 1 + \frac{1}{1\,!} + \frac{1}{2\,!} + \frac{1}{3\,!} + \cdots + \frac{1}{n\,!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\,!} \quad (\because\ (1.5)) \tag{1.6}
$$

(1.6) を利用して遊ぶと e の近似値がわかる。

$$
\sum_{n=0}^{6} \frac{1}{n\,!} \leqq e = \sum_{n=0}^{6} \frac{1}{n\,!} + \sum_{n=7}^{\infty} \frac{1}{n\,!} \quad (\because\ (1.5)) \tag{1.7}
$$

$$
\sum_{n=7}^{\infty} \frac{1}{n\,!} \leqq \sum_{n=7}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \tag{1.8}
$$

$$
\sum_{n=7}^{\infty} \frac{1}{n\,!} = \frac{1}{6\,!}\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 8 \cdot 7} + \cdots \right) < \frac{1}{6\,!}\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \cdots \right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6\,!} \tag{1.9}
$$

$$
\therefore \quad \sum_{n=0}^{6} \frac{1}{n\,!} \leqq e \leqq \sum_{n=0}^{6} \frac{1}{n\,!} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6\,!} \quad (\because\ (1.5), (1.6)) \tag{1.10}
$$

$$
\sum_{n=0}^{6} \frac{1}{n\,!} = \frac{1957}{720} = 2.7180\cdots \quad , \quad \sum_{n=0}^{6} \frac{1}{n\,!} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6\,!} = \frac{1957}{720} + \frac{1}{4320} = \frac{11743}{4320} = 2.7182\cdots
$$

$$
\therefore \quad 2.7180\cdots \leqq e \leqq 2.7182\cdots \quad (\because\ (1.10))
$$

$$
\therefore \quad e = 2.718\cdots
$$

1.2　やっぱり e : 無理数も知らせたい

(1.9) の不等式変形と同様の変形で e が無理数とわかるので、生徒に知らせたい。

背理法で示す。e が有理数なら $e=\dfrac{a}{b}$（a,b は自然数）と表せる 。k を b より大の自然数とする。

$$0 \leqq k!\left(e-1-1\,!-\frac{1}{2\,!}-\cdots-\frac{1}{k\,!}\right)=k\,!\cdot\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n\,!}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^n}=\frac{1}{k}$$

$k>b\geqq 1$ なので、$0<k\,!\left(e-1-1\,!-\dfrac{1}{2\,!}-\cdots-\dfrac{1}{k\,!}\right)<1$ となる。

ところが、k の決め方から $k\,!\left(e-1-1\,!-\dfrac{1}{2\,!}-\cdots-\dfrac{1}{k\,!}\right)$ は整数なので矛盾。　　　（証明 終わり）

1.3　テイラー e だけ？　一般にでけへんのん！

ということで、一般の関数でやってみましょう。(e^x の時には出くわさなかったちょっとした気づきが必要に：それも授業の材料にしたければなりますよ！ 授業のネタ:それはあなたが思うかどうか、工夫するかどうか、与えてやりたいと思う気持ちがあるかどうか)。

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x f'(t)\,dt+f(0) && (1.11)\\ &= [f'(t)\cdot t]_0^x-\int_0^x f''(t)\,dt+f(0)\\ &= f'(x)\cdot x-\int_a^x f''(t)\,dt+f(0) && (1.12)\end{aligned}$$

(1.3),(1.4) のような右辺になっていない。右辺には x の 1 次式が現れていて欲しいのに、x の前は $f'(x)$ であり定数ではない。

(1.11) を作った段階で、$f(t)$ は特別なかんすうではなく一般の関数なので、f が f' や f'', $\cdots$ になっても (1.11) が成り立つ。つまり

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^x f''(t)\,dt+f'(0)\\ f''(x) &= \int_0^x f'''(t)\,dt+f''(0)\\ \cdots &= \qquad\cdots\end{aligned}$$

がいつでも使える、ということを思い描くクセを付けておくと良いと思う（これも授業で身につけさせてやれるスキルやと思います)。(1.12) は次のように続いていく。

$$f(x)=f'(x)\cdot x-\int_0^x f''(t)\,dt+f(0) \qquad (\because\ (1.2)) \qquad (1.13)$$

$$f'(x)=\int_0^x f''(t)\,dt+f'(0) \qquad (\because\ (1.1)\text{ の } f \text{ を } f'\text{として適用}) \qquad (1.14)$$

(1.14) の $f'(x)$ を (1.13) の右辺の $f'(x)$ に代入すると、次の式を得る。

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\int_0^x f''(t)(x-t)\,dt \qquad (1.15)$$

この後、$(x-t)=\left\{\dfrac{1}{2}(x-t)^2\right\}'$ と見て（但し微分は変数 t についての微分とする)、部分積分を繰り

返していくと次の式を得る。

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1\,!}x+\frac{f''(0)}{2\,!}x^2+\cdots+\frac{f^n(0)}{n\,!}x^n+\int_0^x f^n(t)\cdot(x-t)^n\,dt \tag{1.16}$$

なお、更に一般にした、

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1\,!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2\,!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^n(a)}{n\,!}(x-a)^n+\int_a^x f^n(t)\cdot(x-t)^n\,dt$$

は、(1.11) の代わりに $f(x)=\int_a^x f'(t)\,dt+f(a)$ を素にした部分積分遊びをすると出てくる。

(1.17) で $a=0$ の場合が (1.16) の場合になっている。

そして、最後の項の積分が $n\to\infty$ で 0 に収束すれば

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1\,!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2\,!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^n(a)}{n\,!}(x-a)^n+\cdots \tag{1.17}$$

1.4 遊びついでに sin , cos

(1.16) を sin , cos に適用すると（一旦、$x>0$ としておく）、

$$\sin x=x-\frac{1}{3\,!}x^3+\frac{1}{5\,!}x^5-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)\,!}x^{2n-1}+\frac{1}{(2n-1)\,!}\int_0^x(-1)^n\sin^{2n-1}t\cdot(x-t)^{2n-1}\,dt \tag{1.18}$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2\,!}x^3+\frac{1}{4\,!}x^5-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)\,!}x^{2n}+\frac{1}{(2n)\,!}\int_0^x(-1)^n\cos^{2n}t\cdot(x-t)^{2n}\,dt \tag{1.19}$$

(1.18) の積分についてみていく。

$$\left|\frac{1}{(2n-1)\,!}\int_0^x(-1)^n\sin^{2n-1}t\cdot(x-t)^{2n-1}\,dt\right|\leqq\frac{1}{(2n-1)\,!}\int_0^x(x-t)^{2n-1}\,dt\leqq\frac{x^{2n}}{(2n)\,!}$$

ここで、x よりもおおきな自然数を一つ選んで N とおくと、$n>N$ のとき、

$$0\leqq\frac{x^{2n}}{(2n)\,!}=\frac{x}{2n}\cdot\frac{x}{2n-1}\cdots\frac{x}{2N+1}\cdot\frac{x^{2N}}{(2N)\,!}<\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2N}\cdot\frac{x^{2N}}{(2N)\,!}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\cdot\frac{(2x)^{2N}}{(2N)\,!}$$

であり、$\frac{(2x)^{2N}}{(2N)\,!}=A$ とおくと、$n>N$ である全ての n にたいして、

$$0\leqq\frac{x^{2n}}{(2n)\,!}<\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}A\quad(\,A\text{は}\,n\,\text{の変化に対して定数である}\,)$$

$$\therefore\quad\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)\,!}=0$$

$$\therefore\quad\sin x=x-\frac{1}{3\,!}x^3+\frac{1}{5\,!}x^5-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)\,!}x^{2n-1}+\cdots$$

$\cos x$ についても (1.19) から同様の展開が得られまとめると次になる。

$$\sin x=x-\frac{1}{3\,!}x^3+\frac{1}{5\,!}x^5-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)\,!}x^{2n-1}+\cdots \tag{1.20}$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2\,!}x^2+\frac{1}{4\,!}x^4-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)\,!}x^{2n}+\cdots \tag{1.21}$$

2　$\tan x$ と連分数の関係

(1.20),(1.21) より、“ こんな授業どうでしょう 1 ” で紹介した $\tan x = \cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\ddots}}}}$ が確からしい気がする変形が出来る。

$$
\begin{aligned}
\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} &= \frac{x-\dfrac{1}{3\,!}x^3+\dfrac{1}{5\,!}x^5-\cdots}{1-\dfrac{1}{2\,!}x^2+\dfrac{1}{4\,!}x^4-\cdots} \\
&= \frac{x\left(1-\dfrac{1}{3\,!}x^2+\dfrac{1}{5\,!}x^4-\cdots\right)}{1-\dfrac{1}{2\,!}x^2+\dfrac{1}{4\,!}x^4-\cdots} \\
&= \frac{x}{\dfrac{1-\dfrac{1}{2\,!}x^2+\dfrac{1}{4\,!}x^4-\cdots}{1-\dfrac{1}{3\,!}x^2+\dfrac{1}{5\,!}x^4-\cdots}}
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1-\dfrac{1}{2\,!}x^2+\dfrac{1}{4\,!}x^4-\cdots}{1-\dfrac{1}{3\,!}x^2+\dfrac{1}{5\,!}x^4-\cdots} &= 1+\frac{\left(1-\dfrac{1}{2\,!}x^2+\dfrac{1}{4\,!}x^4-\cdots\right)-\left(1-\dfrac{1}{3\,!}x^2+\dfrac{1}{5\,!}x^4-\cdots\right)}{1-\dfrac{1}{3\,!}x^2+\dfrac{1}{5\,!}x^4-\cdots} \\
&= 1+\frac{-\dfrac{2}{3\,!}x^2+\dfrac{4}{5\,!}x^4-\cdots}{1-\dfrac{1}{3\,!}x^2+\dfrac{1}{5\,!}x^4-\cdots} \\
&= 1+\frac{-\dfrac{2}{3\,!}x^2\left(1-\dfrac{4\times3\,!}{2\times5\,!}x^2+\dfrac{6\times3\,!}{2\times7\,!}x^4-\cdots\right)}{1-\dfrac{1}{3\,!}x^2+\dfrac{1}{5\,!}x^4-\cdots} \\
&= 1-\frac{x^2}{3\cdot\dfrac{1-\dfrac{1}{3\,!}x^2+\dfrac{1}{5\,!}x^4-\cdots}{1-\dfrac{4\times3\,!}{2\times5\,!}x^2+\dfrac{6\times3\,!}{2\times7\,!}x^4-\cdots}}
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1-\dfrac{1}{3\,!}x^2+\dfrac{1}{5\,!}x^4-\cdots}{1-\dfrac{4\times3\,!}{2\times5\,!}x^2+\dfrac{6\times3\,!}{2\times7\,!}x^4-\cdots} &= 1+\frac{\left(-\dfrac{1}{3\,!}+\dfrac{4\times3\,!}{2\times5\,!}\right)x^2+\left(\dfrac{1}{5\,!}-\dfrac{6\times3\,!}{2\times7\,!}\right)x^4-\cdots}{1-\dfrac{4\times3\,!}{2\times5\,!}x^2+\dfrac{6\times3\,!}{2\times7\,!}x^4-\cdots} \\
&= 1+\frac{-\dfrac{1}{3\times5}x^2+\left(\dfrac{1}{5\,!}-\dfrac{6\times3\,!}{2\times7\,!}\right)x^4-\cdots}{1-\dfrac{4\times3\,!}{2\times5\,!}x^2+\dfrac{6\times3\,!}{2\times7\,!}x^4-\cdots} \\
&= 1-\frac{x^2\left\{1-3\times5\left(\dfrac{6\times3\,!}{2\times7\,!}x^2+\cdots\right)\right\}}{3\times5\cdot\left(1-\dfrac{4\times3\,!}{2\times5\,!}x^2+\dfrac{6\times3\,!}{2\times7\,!}x^4-\cdots\right)}
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

(2.1),(2.2),(2.3) から本ページ右上の $\tan x$ が成り立ちそうな気がしませんか！