

北数教 “第54回数学教育実践研究会”
兼
第11回数実研 “夏季セミナー”

接線の図形的意味

レポート

日 時 平成17年8月6日(土)

会 場 北海道小樽桜楊高等学校

北海道札幌北高等学校 安 田 富久一

【経緯】

＜図形的イメージで接線を＞

接線を、“接している”というイメージとは違った“共有点が1つ→判別式=0”を用いた処理ではなく、図形的に“接している”というイメージにあった定義で生徒に迫ってみたかった。しかも、微分を知らない生徒にも教えたかった。

＜チャンス＞

札幌北高校はスーパーサイエンスハイスクールの研究指定で、2年生に年間9コマのサイエンスアプローチという授業を組んでいる。私も1コマの授業を2クラス持つことになった。「光と色」というテーマに合った内容のものを用意することになった。

＜光の反射で＞

光が曲面にぶつかったとき、ぶつかった点での接平面を鏡とした時の反射と同じ反射をする。これを利用して生徒に迫ろうと思った。

【教材の作成】＜前段：1～7頁・後段：8～10頁＞

- ・上に述べた気持ちを前面に打ち出したいが、1コマ65分の授業1時間では、単なるお話ししかできない。仕方なく、付録として後段においた。(8～10頁)
- ・譲歩して、アルキメデスがローマ軍を打ち破った有名な巨大な鏡(レンズ)の話テーマの“光と色”の“光”として関連付けることとし、“焦点”の話を表向き話題とした。(1～7頁)
- ・y軸を軸とする放物線を鏡と見立て、y軸に平行に光が上から来たときの反射光はy軸上の定点を通過することを利用し、生徒に焦点というものを発見させるようにしたい。(2～3頁)
- ・幾つかの具体例から推測した規則性を法則として捉えるための、一般化と証明について教えたい。(3～5頁)
- ・65分という時間の都合がまたも関係し、接線は判別式で処理することとした。
- ・初見の問題に出会ったときの問題解決の態度として、“問題に関係がある既知事実の列挙する”ことを伝えるところを作りたい。(1頁～2頁)
- ・問題解決で行う問題の小問化を示したい(2頁)
- ・焦点と言うべきものの存在に生徒が気が付いた後、第2弾として、当初の最大目的“曲線上の点における1次近似が接線”の説明を付けたい。(8～10頁)
- ・多項式以外の関数のべき級数を説明する上手い方法はないか。無理数の有理数での近似＜小数表示＞が頭に浮かんだ。(9頁)
- ・放物線以外の2次曲線についても触れておきたかった。(5～7頁)

【変更・改善したいこと】

- ・放物線で、光が反射後定点を通ることに気づかせるための具体的作業（2～3頁）を最低でも3つ以上やりたい。そのためにどこを軽く扱うか？。今回の生徒は、2直線のなす角の大きさと傾きとの関係を示す、正接の公式（2頁）を未履修クラスの生徒が混じっていた。
- ・ベクトル履修後の生徒には、内積利用のプリントを作成したい（もう1クラスは履修後の可能性が大）。
- ・曲線の1次近似の説明（8～9頁）をもっと上手くできないか。

光と焦点

接線の話

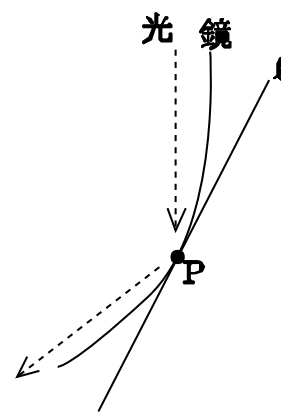
【律儀な光】

光は非常に律儀な性格を持っており、まっすぐ進んでいく。そこに光を反射する鏡があったらどうなるの。平らな鏡に光が当たると、光は反射するが、下図のように、光が鏡に向かってやってくる入射角と反射角が等しくなるように反射して進んでいく。やっぱり律儀だ。では、鏡が平らではなかったらどうなるのだろうか？

律儀な光はグニャッとした鏡と出会い、困ってしまうのではないかな？

心配無用。光は、やはり律儀で、鏡が曲がっていても、光線の一本一本は非常に細く、その一つ一つの光線は鏡を平らだと思っている。どうして平らだと思えるのか。それについて、鏡の面を立体的に図に描くのは難しいので（安田は美術が苦手）、話を簡単にして、鏡を平面的に見て曲線とし、一本の光線を直線として話そう。

右図は、鏡を示す曲線と、曲線上の点Pにおける接線 l を示したものである。光が点Pにやってきたときに、光は元の鏡と、 l という鏡との区別がつかないらしい。 l を鏡と思い、入射角と反射角が等しくなるように反射していくのだ。光は律儀なので、世の中に曲がったものなんかあり得ないと思っているのだろうか？（これは、勝手な安田談。物理の先生が聞いたら怒るかも知れません）。数学の言葉で言えば、曲線をその曲線上の点を通る直線で近似したものが接線である、ということになる。つまり、点Pの近くで鏡の曲線を直線と見たものを点Pでの曲線の接線と呼んでいる。「曲がっているものをまっすぐと思えるはずがない、曲線を直線なんかと思えるはずはない」という批判が聞こえてきそう。でも、平らではない丸い地球に住んでいるのに、皆は地面は平らだという感覚を持っていると思う。この感覚で思っている平らな地面を数学では接平面と言っている。曲線と接線の関係の立体バージョンだ。



では、皆がよく知っている放物線に、光が当たって反射するとどうなるかを見てみよう。

$$y = x^2 \tag{1}$$

に真上から光がやってくるとどうなるだろうか。それを次のように数学の問題にしてみた。

- 【1】 放物線(1)上の点(1, 1)における接線を L_0 とする。直線 $x = 1$ を L_1 とする。 L_0 と L_1 のなす角を θ とする。このとき、点(1, 1)を通る直線で、 L_0 と角 θ をなす直線 L_2 の方程式を求めよ。

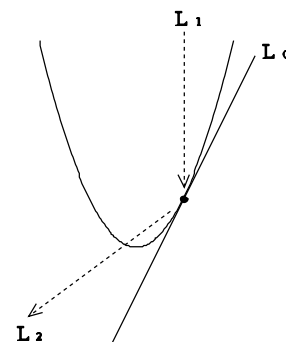
この問題を解くための準備をしよう。

「接線」という言葉が出てくるので、接線について使う道具を書き出そう。

〈放物線（曲線の方程式）と接線について使える道具〉

- 図形を方程式で表す。
- 放物線は2次関数、直線は1次関数。
- 連立方程式にして、 y を消去して得られる x の2次方程式が重解を持つ。

「2直線の間の角」という言葉が出てくるので、直線と角度について知ってい



ることを書きだそう

<直線と角度について使える道具は何か>

- 直線が x 軸の正の向きとなす角を α とすると、 $\tan \alpha =$ 傾き。
- 傾きがそれぞれ m_1, m_2 である 2 直線のなす角 (鋭角) を β とすると、

$$\tan \beta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

これは、加法定理の応用として、教科書 126 ページに出てくる。

今、道具をこのように整理してみると、問題【1】を次のように段階を設定して考えていきたい。

- 【1】 放物線 (1) 上の点 (1, 1) における接線を L_0 とし、直線 $x = 1$ を L_1 とする。また、 L_0 と L_1 のなす角を θ とする。このとき、点 (1, 1) を通り、 L_0 と角 θ をなす直線 L_2 について、以下の各問いに答えよ。
- (1) 接線 L_0 の方程式を求めよ。
 - (2) 今求めた接線の傾きと θ との関係を式で表せ。
 - (3) 直線 L_2 の傾きを求めよ。
 - (4) 直線 L_2 の方程式を求めよ。

【解答 1】 (1) 点 (1, 1) における接線は明らかに y 軸と平行ではないから、傾きを m とし、 $y = m(x - 1) + 1$ とおける。これと、 $y = x^2$ を連立させ y を消去すると

$$\begin{aligned}x^2 &= m(x - 1) + 1 \\x^2 - mx + m - 1 &= 0 \\D &= m^2 - 4m + 4 (= 0) \quad (\because \text{重解を持つ}) \\ \therefore m &= 2\end{aligned}$$

よって、求める接線の方程式は

$$\begin{aligned}y &= 2(x - 1) + 1 \\y &= 2x - 1\end{aligned}$$

- (2) x 軸と接線のなす角は $90^\circ - \theta$ なので、 $\tan(90^\circ - \theta) = 2$
 $\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta}$ より
 $\tan \theta = \frac{1}{2}$

- (3) L_2 の傾きを m とすると、

$$\tan \theta = \left| \frac{m - 2}{1 + 2m} \right| \quad \therefore \left| \frac{m - 2}{1 + 2m} \right| = \frac{1}{2}$$

両辺ともに 0 以上なので、両辺を 2 乗して分母を払い移項して整理すると

$$\begin{aligned}20m - 15 &= 0 \\ \therefore m &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

(4) 直線 L_2 は、点 $(1, 1)$ を通り、(3) の傾きを持つ直線なので

$$y = \frac{3}{4}(x-1) + 1$$
$$\therefore y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$$

では、 $x=1$ に沿って入ってきた光以外に、別の光の反射も見てみよう。次の問題【2】は【1】と同じ方法で解けるはずだ。

【2】 放物線(1)上の点 $(2, 4)$ における接線を L_0 とする。直線 $x=2$ を L_1 とする。 L_0 と L_1 のなす角を θ とする。このとき、点 $(2, 4)$ を通る直線で、 L_0 と角 θ をなす直線 L_2 の方程式を求めよ。

【解答2】 点 $(2, 4)$ における接線は明らかに y 軸と平行ではないから、傾きを m とし、 $y = m(x-2) + 4$ とおける。これと、 $y = x^2$ を連立させ y を消去すると

$$x^2 = m(x-2) + 4$$
$$x^2 - mx + 2m - 4 = 0$$
$$D = m^2 - 8m + 16 (= 0) \quad (\because \text{重解を持つ})$$
$$\therefore m = 4$$
$$\therefore \tan \theta = \frac{1}{4}$$

L_2 の傾きを m とすると、

$$\left| \frac{m-4}{1+4m} \right| = \frac{1}{4}$$

両辺ともに 0 以上なので、【1】の時と同様にして方程式を解くと

$$m = \frac{15}{8}$$
$$y = \frac{15}{8}(x-2) + 4$$
$$\therefore y = \frac{15}{8}x + \frac{1}{4}$$

【1】【2】の両方の答えを見て感じる (or 予想される) ことはあるだろうか。何か気づいた (or 予想される) ことがあった場合、それが確実に正しいことを確信するにはどうしたらよいだろうか。

どんな場合にも共通して起こる“法則性”を確信するためには、数学では具体的な数字の代わりに文字を利用する。そして、上で気づいた (現段階では予想でしかない) 事柄が本当に正しいかどうかチェックすることになる。そこで、次の問題を解こう。

【3】 放物線(1)上の点 (t, t^2) における接線を L_0 とする。直線 $x=t$ を L_1 とする。 L_0 と L_1 のなす角を θ とする。このとき、点 (t, t^2) を通る直線で、 L_0 と角 θ をなす直線 L_2 の方程式を求めよ。(但し、 $t \neq 0$ とする)

【解答3】 点 (t, t^2) における接線は明らかに y 軸と平行ではないから、傾きを m として、 $y = m(x - t) + t^2$ とおける。これと、 $y = x^2$ を連立させ y を消去すると

$$x^2 = m(x - t) + t^2$$

$$x^2 - mx + tm - t^2 = 0$$

$$D = m^2 - 4tm + 4t^2 (= 0) \quad (\because \text{重解を持つ})$$

$$\therefore m = 2t$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{1}{2t}$$

L_2 の傾きを m とすると、

$$\left| \frac{m - 2t}{1 + 2tm} \right| = \frac{1}{2t}$$

両辺ともに 0 以上なので、【1】【2】の時と同様にして方程式を解くと

$$(1 + 2tm)^2 - 4t^2(m - 2t)^2 = 0$$

$$4(4t^3 + t)m = 16t^4 - 1$$

$$4t(4t^2 + 1)m = (4t^2 - 1)(4t^2 + 1)$$

$$m = \frac{4t^2 - 1}{4t} (\because t(4t^2 + 1) \neq 0)$$

よって、求める直線 L_2 は

$$\therefore y = \frac{4t^2 - 1}{4t}(x - t) + t^2$$

$$\therefore y = \frac{4t^2 - 1}{4t}x + \frac{1}{4}$$

予想通りのことが起こった。放物線 $y = x^2$ の軸に平行にやってきた光は、放物線の鏡に当たると、必ず点 $(0, \frac{1}{4})$ を通る。これが示そうとした法則で、正しいことが確信できた。良かった。

さて、科学者は一つ秘密を解き明かしたらそれで終わらない。更にもっと秘密がないか探したくなる。これで探究するのをやめないで、更にもっと広い法則性を探してみよう。すぐに調べてみたくなるのがあるはずだ。それは、放物線は $y = x^2$ 以外にもあるが、同じような法則を持っているかということだ。

それで、次の問題

【4】 放物線 $y = ax^2$ 上の点 (t, at^2) における接線を L_0 とする。直線 $x = t$ を L_1 とする。 L_0 と L_1 のなす角を θ とする。このとき、点 (t, at^2) を通る直線で、 L_0 と角 θ をなす直線 L_2 の方程式を求めよ。

【解答4】 点 (t, at^2) における接線は明らかに y 軸と平行ではないから、傾きを m として、 $y = m(x - t) + at^2$ とおける。これと、 $y = ax^2$ を連立させ y を消去すると

$$ax^2 = m(x - t) + at^2$$

$$ax^2 - mx + tm - at^2 = 0$$

$$D = m^2 - 4atm + 4a^2t^2 (= 0) \quad (\because \text{重解を持つ})$$

$$\therefore m = 2at$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{1}{2at}$$

L_2 の傾きを m とすると、

$$\left| \frac{m - 2at}{1 + 2atm} \right| = \frac{1}{2at}$$

$$(1 + 2atm)^2 = 4a^2t^2(m - 2at)^2$$

$$4at(4a^2t^2 + 1)m = (4a^2t^2 - 1)(4a^2t^2 + 1)$$

$$m = \frac{4a^2t^2 - 1}{4at}$$

よって、求める直線 L_2 は

$$\therefore y = \frac{4a^2t^2 - 1}{4at}(x - t) + at^2$$

$$\therefore y = \frac{4a^2t^2 - 1}{4at}x + \frac{1}{4a}$$

これで、次の法則がわかった。

放物線の軸に平行にやってきた光は、放物線の鏡に当たると、必ず定点を通る。その定点は放物線の軸上にあり、その頂点からの距離は、 x^2 の係数を a とすると、 $\frac{1}{4a}$ の位置である。この点のことを“焦点 (focus : フォーカス)”と呼んでいる。太陽の光はこの一点に集まることになる。

電波も光と同じ性質がある。宇宙からの電波を一点に集めてその電波の持つ情報から遠い宇宙を見るのが電波望遠鏡だ。今日午後の北海道大学の先生は電波望遠鏡で研究をされている。多分、午後の話の中で電波望遠鏡の話が出ると思う。電波望遠鏡はパラボラ・アンテナで情報を得る。このパラボラ (parabola) という言葉が実は放物線という意味だ。皆が中学以来勉強してきた2次関数が、こんなところで現代科学の先端と関係している。

次に、焦点という言葉は放物線以外にも使われる。それを紹介しておこう。授業ではまだ勉強しないが、言葉としてはきっと皆も聞いたか目にしたことがあると思う、^{だえん}楕円だ。楕円は長円とも書かれる。円をちょっと押しつぶしたような格好をしている。どんな図形かというと、皆が既に勉強した“図形と方程式”の方法で説明すれば、

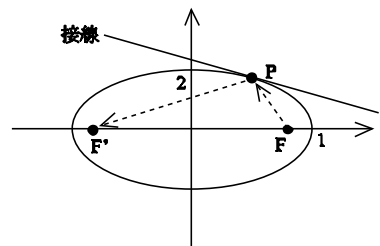
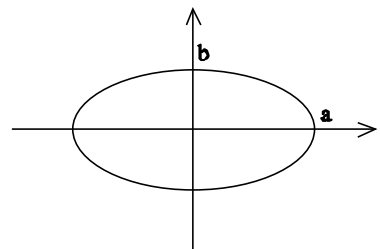
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

で表される図形のこただ。 $a = b$ のときは円の方程式になる。簡単に今回は $a = 2$, $b = 1$ である楕円

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \tag{2}$$

についてのみ考えよう。

これはグラフに描くと右のようになる。 x 軸、 y 軸についてそれぞれ対象な図形となっている。楕円は光に関する次のような性質があることが知られている。それは、楕円には焦点と呼ばれる点が2つあり、それを F, F' とすると、 F から出た光が楕円の鏡に当たって反射すると必ず F' を通るという性質だ。楕円 (2) でそれを確かめてみよう。この楕円内の点 $F(\sqrt{3}, 0)$ から光を出すと、光は楕円の鏡にぶつかってどのように反射するかを考えよう。図形の対称性から点 $(0, 1)$ での楕円の接線は $y = 1$ である。よって、光が点 $F(\sqrt{3}, 0)$ から点 $(0, 1)$ に向かって進むと、点 $(0, 1)$ で反射して、原点に関して点 F と対称な点 $F'(-\sqrt{3}, 0)$ を必ず通る。



次に点 $(0, 1)$ 以外の点 $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ に光が点 $F(\sqrt{3}, 0)$ から進んでも F' を通るか調べよう。

【5】 楕円 (2) 上の点 $P\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ における接線を L_0 とする。直線 FP を L_1 、直線 $F'P$ を L_2 とする。 L_0 と L_1 のなす角 (鋭角) を θ_1 、 L_0 と L_2 のなす角 (鋭角) を θ_2 とする。 $\theta_1 = \theta_2$ となることを確認せよ。

【解答 5】 点 P における接線をその傾きを p として、 $y = p(x-1) + \frac{\sqrt{3}}{2}$ とおく。これと、(2) を連立させ y を消去すると

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{4} + \left\{px - \left(p - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}^2 &= 1 \\ (4p^2 + 1)x^2 - 8p\left(p - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)x + \left(p - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1 &= 0 \\ D = 16p^2\left(p - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 4(4p^2 + 1)\left\{\left(p - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1\right\} \\ &= 16p^2\left(p - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 4(4p^2 + 1)\left(p - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 4(4p^2 + 1) \\ &= -4\left(p - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 4(4p^2 + 1) \\ &= 12p^2 + 4\sqrt{3}p + 1 \end{aligned}$$

接線なので $D = 0$ である。よって、 $12p^2 + 4\sqrt{3}p + 1 = 0$ を解いて、 $p = -\frac{\sqrt{3}}{6}$ を得る。つまり、直線 L_0 の傾きがわかった。

次に、直線 L_1 の傾きは、2点 F, P の座標から、 $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \sqrt{3}} = -\frac{3 + \sqrt{3}}{4}$ である。

$$\tan \theta_1 = \left| \frac{-\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{3 + \sqrt{3}}{4}}{1 + \frac{3\sqrt{3} + 3}{24}} \right| = \left| \frac{\frac{9 + \sqrt{3}}{12}}{\frac{9 + \sqrt{3}}{8}} \right| = \frac{2}{3}$$

直線 L_2 の傾きは 2点 F', P の座標から、 $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{4}$ である。

$$\tan \theta_2 = \left| \frac{-\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{3 - \sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{3\sqrt{3} - 3}{24}} \right| = \left| \frac{-\frac{9 - \sqrt{3}}{12}}{\frac{9 - \sqrt{3}}{8}} \right| = \frac{2}{3}$$

以上から、 $\tan \theta_1 = \tan \theta_2$ となる。 $\theta_1, \tan \theta_2$ はともに鋭角なので、 $\theta_1 = \theta_2$ であることがわかる。

楕円 (2) 上の一般の点 $\left(t, \frac{\sqrt{4-t^2}}{2}\right)$ へ、光が点 F から進むと、やはり反射して点 F' を通かどうかについては時間の関係で割愛する。

一般に次のことが知られていることを紹介しておく。楕円

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{但し、} a > b > 0 \text{ とする})$$

について、2点 $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ 、 $(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ が焦点となり、上で述べた性質を持つ。

また、光と反射の関係で焦点というものが関係する曲線に双曲線というものがある。放物線・楕円・双曲線は2次曲線とか円錐曲線と呼ばれるもので、古くから研究されてきた。図書館で本を探して読んでみると面白

い話がたくさん見つかるだろう。太陽とその惑星の公転がどのようになっているかについても、この2次曲線の話が登場する。

付録

まっすぐな鏡と接線

【接線って何?】

光の説明で、こんなことを書いた

「曲線その曲線上の点を通る直線で近似したものが接線である」

「つまり、曲線上の点Pの近くで曲線を直線と思ったものを、
点Pでの曲線の接線と呼んでいる」

このことと、皆がこれまでに学習してきた（先ほどもそれを利用した）“重解：共有点が一つ”との関係を見ておこう。そのために、 $y = x^2$ の上の点 $(1, 1)$ における接線を、本来の意味に戻って求めてみよう。そのための問題を用意する。次の問題だ。

【1】 $x^2 = a + b(x-1) + c(x-1)^2$ が恒等式となるように、定数 a, b, c の値を定めよ。

【解答1】

$x = s + 1$ と置き換え、左辺と右辺を入れ替えれば

$$\begin{aligned}cs^2 + bs + a &= (s + 1)^2 \\ &= s^2 + 2s + 1\end{aligned}$$

$$\therefore a = 1, b = 2, c = 1$$

以上から、 $x^2 = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2$ であることがわかった。つまり、 $y = x^2$ と $y = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2$ は同じグラフだ。この式を見て何か気づくことはないだろうか。 $y = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2$ から $(x-1)^2$ の項を取り去った

$$y = 1 + 2(x-1)$$

は、先ほど求めた点 $(1, 1)$ での接線になっている。

これは偶然ではない。 $(x-1)^2$ の項を取り去るといふことの意味を調べると、接線になることがわかる。点 $(1, 1)$ を通る直線は $y = m(x-1) + 1$ と表せる。このような直線のうち、点 $(1, 1)$ の付近で曲線 $y = x^2$ に一番近い直線が $y = 1 + 2(x-1)$ だとわかればよいのだ。つまり、光は放物線の鏡をまっすぐな鏡 $y = 1 + 2(x-1)$ だ、と思ったということを理解しようということになる。

そこで、 $f(x) = x^2$ 、 $g(x) = m(x-1) + 1$ とおいて、 x に 1 に近い値をどんどん代入していくと、 $f(x) - g(x)$ はどうなるかを見てみよう。 $g(x)$ をほぼ $f(x)$ と同じと見ることができかどうか考えているので、 $f(x) - g(x)$ の値はどのように小さくなっていくかをみたいわけだ。 $f(x) - g(x) = (2-m)(x-1) + (x-1)^2$ に注意しておく。いよいよ、 $x = 1.1, 1.01, 1.001, 1.0001, 1.00001$ を代入してみよう。1.1 は 1 と $0.1 = \frac{1}{10}$ 違うわけだが、最後に代入する 1.00001 は 1 とほんのわずかに $0.00001 = \frac{1}{100000}$ しか違わない。これを代入してみた時の表を下に示した。

x	$f(x)$	$g(x)$	$f(x) - g(x)$
1.1	1.21	$0.1m + 1$	$0.1(2 - m) + 0.01$
1.01	1.0201	$0.01m + 1$	$0.01(2 - m) + 0.0001$
1.001	1.002001	$0.001m + 1$	$0.001(2 - m) + 0.000001$
1.0001	1.00020001	$0.0001m + 1$	$0.0001(2 - m) + 0.00000001$
1.00001	1.0000200001	$0.00001m + 1$	$0.00001(2 - m) + 0.0000000001$

この表から、 $f(x)$ と $g(x)$ の差 $f(x) - g(x)$ は、 $x \rightarrow 1$ に近い数を入れていくと、第1項の小数に比べ第2項の小数が極端に小さくなっていくのがわかる。 $m = 2$ のとき、差 $f(x) - g(x)$ は、第2項のみであり、 $m \neq 2$ のときは第1項がある。つまり、 $m = 2$ のときは $m \neq 2$ のときよりも格段に差がなくなることになる。言い換えると、『 $m = 2$ のときの直線 $y = g(x)$ は、 $m \neq 2$ のときのどの直線 $y = g(x)$ よりも、 $y = f(x)$ に近い』ということを示している。

このことから、光が思ったまっすぐな鏡とは、 $m = 2$ のときの直線 $y = g(x)$ 、つまり $y = 2(x - 1) + 1$ ということになる。そして、これは $f(x)$ から $(x - 1)^2$ の項を取り去ったことになり、取り去った $(x - 1)^2$ は、表で言うと極端に小さくなっていく小数が出てくる項だということだ。それは、考えを変えると『 $(x - 1)$ よりも $(x - 1)^2$ の方が極端に小さい値になるから、直線で近似するなら2次の項を誤差として消してしまえばよい』ということになる。

このように接線を捉えると、 $y = x^3 - x$ などのグラフの上の点でも接線が求められる。【2】 $y = x^3 - x$ の上の点 $(1, 0)$ における接線の方程式を求めよ。

【解答2】

$x^3 - x = a(x - 1)^3 + b(x - 1)^2 + c(x - 1) + d$ となる a, b, c, d を求めよう。 $x = s + 1$ と置き換え、左辺と右辺を入れ替えれば

$$\begin{aligned} as^3 + bs^2 + cs + d &= (s + 1)^3 - (s + 1) \\ &= s^3 + 3s^2 + 2s \end{aligned}$$

$$\therefore a = 1, b = 3, c = 2, d = 0$$

よって、 $x^3 - x = (x - 1)^3 + 3(x - 1)^2 + 2(x - 1)$ となる。ここで、2次以上の項は誤差として捨てると、接線 $y = 2(x - 1)$ が得られる。

楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上の点 $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ での接線も同じように求められるか？簡単ではないが、次のようになる。

楕円の方程式は $y = f(x)$ の形に書くと、 $f(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2}$ (楕円の上半分) となる。これは多項式ではないので、何次式ということはできない。

困った。しかし、こんなことを皆は知っている。 π は整数分の整数という分数に書けない無理数で、小数で表そうとすると循環しない、どこまで行っても本当の数を書ききれない数だ。でも、3, 3.1, 3.14, 3.141, ... とどんどん本当の π の値に近づいていく。例えば、最後に書いた 3.141 という数を詳しく見ると、次のようになっている

$$3.141 = 3 + 1 \times 0.1 + 4 \times 0.1^2 + 1 \times 0.1^3$$

そして、 π の本当の値については、

$$\pi = 3 + 1 \times 0.1 + 4 \times 0.1^2 + 1 \times 0.1^3 + \dots$$

これを真似て、次のように考えてみよう。

$$f(x) = a + b(x - 1) + c(x - 1)^2 + d(x - 1)^3 + \dots \quad (3)$$

このように書けたとして、 $x = 1$ としてみると $f(1) = a$ であり、 $f(1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ なので $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。 b, c, d, \dots については、次のように考える。(3) を楕円の方程式に代入すると、

$$\frac{x^2}{4} + \{a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 + \dots\}^2 = 1$$

ここで、 $x = s + 1$ と置き換え、分母を払い移項すると

$$\begin{aligned} (s+1)^2 + 4\{a + bs + cs^2 + ds^3 + \dots\}^2 - 4 &= 0 \\ s^2 + 2s + 1 + 4\{a^2 + 2abs + (b^2 + 2ac)s^2 + \dots\}^2 - 4 &= 0 \\ (4a^2 - 3) + 2(4ab + 1)s + (4b^2 + 8ac + 1)s^2 + \dots &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

(4) は s の恒等式であり、 $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ なので

$$\therefore \begin{cases} 2\sqrt{3}b + 1 = 0 \\ 4b^2 + 4\sqrt{3}c + 1 = 0 \end{cases}$$

これを解くと、 $b = -\frac{\sqrt{3}}{6}$ 、 $c = -\frac{\sqrt{3}}{9}$ であり、面倒がらなければ、このあと d, \dots を求めていける（どこまで行ってもきりが無いが）。今得たことから、

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}(x-1) - \frac{\sqrt{3}}{9}(x-1)^2 - \dots$$

ここで、2次以降を捨てると、

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}(x-1)$$

これで、6 ページ【解答5】の9行目で得た傾きと一致しており、前に出した接線と一致していることがわかる。

既に皆は気づいていると思うが、これまでの問題で必要なのは定数項と1次の係数のみだ。これだけに注目するなら、もう少し楽に接線は求められることになる。

あと、補足しておく。接線については、皆は高校で微分というものを勉強し、その考えで接線をきっちり理解することになる。楽しみにしておいて欲しい。今回話したこと、皆がこれから勉強する微分・積分とは、大学の1年生くらいで解析学という勉強をした時に会う。それも、楽しみに！！興味があれば、図書館で本を見ると面白いと思う。

キーワードは、

テイラー展開、無限級数、べき級数、*e.t.c.*