平成22年2月6日（土）

いちど使ってみたかった技（わざ）

第72回数学実践研究会

安田 富久一

【問３】

任意の正の有理数は、次の形に一通りに表されることを示せ。

$$a_1+\frac{a_2}{1\cdot 2}+\frac{a_3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{a_k}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}$$

$a_1, a_2, \ldots, a_k$ は全て整数で、

$0 \leqq a_1$, $0 \leqq a_2 < 2$, $0 \leqq a_3 < 3$, $\cdots$, $0 < a_k < k$

（解答）

$\dfrac{1}{k!} > \alpha \geqq \dfrac{1}{(k+1)!}$ のとき正の有理数 $x=\dfrac{q}{p}$ を考える

有限数列 $\{b_1, b_2, \cdots, b_p\}$ を次のように決めていく

$b_1 = [x]$ 　　　（ $0 \leqq x-b_1 < 1$ ）

$b_2 = [2!(x-b_1)]$

$0 \leqq x-b_1 < 1$ より $0 \leqq b_2 < 2$

$b_2 = [2!(x-b_1)]$ より $b_2 \leqq 2!(x-b_1) < b_2+1$

$$0 \leqq x-b_1-\frac{b_2}{2!} < \frac{1}{2!}$$

このあと帰納的に次のように決める。つまり、$b_2, \cdots, b_r$ が

$$0 \leqq b_i < i \quad (\ i = 2, \cdots, r\ )$$
$$0 \leqq x - (b_1 + \frac{b_2}{2!} + \cdots + \frac{b_i}{i!}) < \frac{1}{i!} \quad (\ i = 2, \cdots, r\ )$$

と決まっているとき、$b_{r+1} = \left[(r+1)!\left\{x - (b_1 + \frac{b_2}{2!} + \cdots + \frac{b_r}{r!})\right\}\right]$ と決める。

この決め方で、

$$0 \leqq b_{r+1} < r+1\ ,\ 0 \leqq x - (b_1 + \frac{b_2}{2!} + \cdots + \frac{b_{r+1}}{(r+1)!}) < \frac{1}{(r+1)!}$$

が成り立っていることは、$r = 2$ の場合に成り立つことを示したのと全く同様にわかる。

これを続けていくと、$\{b_1, b_2, \cdots, b_p\}$ が得られるが、

$b_p = \left[p!\left\{x - (b_1 + \frac{b_2}{2!} + \cdots + \frac{b_{p-1}}{(p-1)!})\right\}\right]$ であり

$$0 \leqq x - (b_1 + \frac{b_2}{2!} + \cdots + \frac{b_p}{p!}) < \frac{1}{p!}$$
$$\therefore \quad 0 \leqq p!\left\{x - (b_1 + \frac{b_2}{2!} + \cdots + \frac{b_p}{p!})\right\} < 1 \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

を得る。ここで、$x = \dfrac{q}{p}$ であったので、$p!\left\{x - (b_1 + \dfrac{b_2}{2!} + \cdots + \dfrac{b_p}{p!})\right\}$ は整数である。このことと(1)より、

$$
\begin{aligned}
& p!\left\{x - (b_1 + \frac{b_2}{2!} + \cdots + \frac{b_p}{p!})\right\} = 0 \\
\therefore \quad & x = b_1 + \frac{b_2}{2!} + \cdots + \frac{b_p}{p!}
\end{aligned}
$$

ここで、

$$b_r \neq 0\ ,\ b_{r+1} = b_{r+2} = \cdots = b_p = 0\ (\ 1 \leqq r \leqq p\ )$$

となる r があればそれを n とする。また、そのような r が無いときは p を n とする。そして、項数 n 個の数列 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ を $a_r = b_r\ (\ r = 1, 2, \cdots, n\ )$ と定義すれば、一意性の検証を除いて、問３が成り立つことが示されたことになる。
一意性の証明に使う事実をまず確認しておく。

【命題】　自然数 $m, n\ (m < n)$ について、次の不等式が成り立つ。

$$\frac{m}{(m+1)!} + \cdots + \frac{n-2}{(n-1)!} + \frac{n-1}{n!} < \frac{1}{m!} \quad \cdots\cdots ②$$

【証明】

$$
\begin{aligned}
&\frac{m}{(m+1)!}+\cdots+\frac{n-2}{(n-1)!}+\frac{n-1}{n!}+\frac{1}{n!}\\
&=\frac{m}{(m+1)!}+\cdots+\frac{n-2}{(n-1)!}+\frac{n}{n!}\\
&=\frac{m}{(m+1)!}+\cdots+\frac{n-2}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-1)!}\\
&=\frac{m}{(m+1)!}+\cdots+\frac{n-1}{(n-1)!}\\
&=\frac{m}{(m+1)!}+\cdots+\frac{1}{(n-2)!}\\
&=\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&=\frac{m}{(m+1)!}+\frac{1}{(m+1)!}\\
&=\frac{m+1}{(m+1)!}\\
&=\frac{1}{m!}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore\quad \frac{m}{(m+1)!}+\cdots+\frac{n-2}{(n-1)!}+\frac{n-1}{n!}=\frac{1}{m!}-\frac{1}{n!}<\frac{1}{m!}
$$

一意性を示そう。0以上の整数$a_1, a_2, \cdots, a_m; b_1, b_2, \cdots, b_n$が

$$a_1 + \frac{a_2}{2!} + \cdots + \frac{a_m}{m!} = b_1 + \frac{b_2}{2!} + \cdots + \frac{b_n}{n!}$$
$$0 \leqq a_1\ ,\ 0 \leqq a_2 < 2\ ,\ \cdots\ ,\ 0 < a_m < m$$
$$0 \leqq b_1\ ,\ 0 \leqq b_2 < 2\ ,\ \cdots\ ,\ 0 < b_n < n$$

を満たしているとする。$m \geqq n$としても一般性は失わないので、このように決めておく。$a_1 = b_1, \cdots, a_r = b_r\ (0 \leqq r < n)$とすると、

$$\begin{aligned} \frac{|a_{r+1} - b_{r+1}|}{(r+1)!} &= \left| \frac{a_{r+2} - b_{r+2}}{(r+2)!} + \cdots + \frac{a_n - b_n}{n!} + \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} + \cdots + \frac{a_m}{m!} \right| \\ &\leqq \frac{r+1}{(r+2)!} + \cdots + \frac{n-1}{n!} + \frac{n}{(n+1)!} + \cdots + \frac{m-1}{m!} \\ &< \frac{1}{(r+1)!} \end{aligned}$$

より、$|a_{r+1} - b_{r+1}| < 1$となるが、整数であることを考えると$a_{r+1} = b_{r+1}$である。よって、$a_k = b_k\ (k = 1, 2, \cdots, n)$であることがわかる。
最後に、$m > n$なら

$$0 = \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} + \cdots + \frac{a_m}{m!} \geqq \frac{a_m}{m!} > 0$$

となって矛盾するので、$m = n$である。
以上で一意性も示された。