

北数教“第98回数学教育実践研究会”  
北数教“兼第21回「夏季セミナー」”

曲がり具合は如何程ですか

レポート

平成28年8月6日(土)

小樽桜陽高等学校

千歳科学技術大学 安田富久一

【 高校でも可能！：曲率 】

昨秋、幾何学を講義することになった。『曲率は曲がり方の度合いを示すもので、円の半径を指標にして考える』という意味のことを書いている書物は多く見かけるが、実際そのことをまともに実行して考えているのに会うことがなかった。折角の機会なので、その方法で講義をすることにした。実施してみて感じたのは、高校生でもわかるだろうということだった。それで今回本研究会で紹介する。

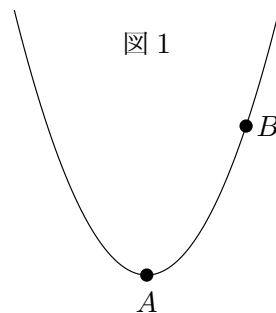
昨年度の講義で利用したプリントを本資料の最後（6 ページ）に付けておいた。最初の出だし部分だけ次にも書いておいてみよう。次の通り。

### 昨年度講義プリントの出だし

【 曲がり具合を比較する 】

きついカーブと緩やかなカーブ、というものを我々は感覚的に理解している。これを、量的に捉える方法を考えたい。次のような会話が感覚ではなく、根拠を持って話が出来ようになりたい。

右図 1 ( $y = x^2$ ) の曲線上の点 A でのカーブの仕方は点 B でのカーブの仕方よりも  
“急だ” or “緩やかだ”



そのために、“比較する”ということを考えると、その基準になるものが設定できればありがたい。曲がり方が一定のものとしてすぐに頭に浮かぶのは円だ。

右の図 2, 図 3 はそれぞれ円及び円の一部（円弧）である。見た感じ、図 2 のカーブは曲がり方が急な感じだし、図 3 のカーブは曲がり方が緩やかな感じだ。実は、図 2 の円の半径は 1 であり、図 3 は半径 5 の円の一部（円弧）。



曲がり方の、急さ（曲がり方の度合いが大きい）や、緩やかさ（曲がり方の度合いが小さい）はどれも円の半径に依るものらしい気がする。しかも、半径が大きいと緩やか小さいと急な感じになっている。言葉上、急と言った方が量が大きいイメージが湧いてしまう。そこで、円の曲がり方の度合いを示す量として

【 提案 】

半径  $r$  の円のカーブの曲がり方を示す量として  $\frac{1}{r}$  を採用し、この量に名前を付けて 曲率 と呼ぶことにしたい : 半径  $r$  の円の曲率 =  $\frac{1}{r}$

<例> 図 2 の曲率 = 1 , 図 3 の曲率 = 1/5 = 0.2

【 円以外の曲線の曲がり具合 】

円以外の曲線についても曲がり具合を考えたい。今、曲がり具合の物差しのようなものとして円とその曲がり具合を示す量である曲率、というものを準備した。そこで、右上の図 1 に戻って、現点 A(0,0) での曲がり具合を次のような思いつきで調べてみよう。

【 アイデア 1 】

A の左右に  $x$  座標の値が  $h (> 0)$  離れた点  $P, Q$  を取る。そして、3 点  $A, P, Q$  を通る円を求める ( $\triangle APQ$  の外接円として、3 点が 1 直線上に並んでいない限りこの円はただ一通りに決まる)。この  $h$  を 0 に近づけていくと、点  $A$  近辺の曲線に一番ふさわしい円に近づいて行くだろう。

それを曲率円、その中心を曲率中心、半径を曲率半径、逆数を曲率と呼ぼう。

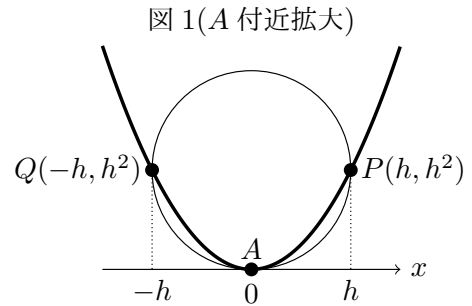


図 1(A 付近拡大)

<昨年度講義プリントの出だし> 終了

この後は、本資料の最後にある昨年度の講義プリントの通り、具体的な馴染みのある  $y = x^2$  について実際に学生に問題を解かせる形で講義を進めた。そして、少しずつアイデアを進化させていき、ニュートンの方法を紹介し、最後はパラメーター表示での曲率、そして微分幾何学の初歩で取り扱うフルネーセレーの公式を紹介する形を取った。特に、 $y = x^2$  についての実際計算は高校生 の適度な計算練習になる。また、楕円についても良い練習問題になるとと思われる。

<曲率に関する練習問題を作りたい>

単なる計算で終わりという問題ではないような問題を作ってやりたい (高校時代や大学 1 年生の頃には、あんなにいっぱい多様な練習問題があったのに、大学の学年が進むと練習問題が少なくなる)。その思いで考えてみたものを以下に紹介する。

【 曲率円に関する問題作成 】

- (1) 曲線  $y = f(x)$  上の点  $A(a, f(a))$  の両側に 2 点  $P_-(a-h, f(a-h)), P_+(a+h, f(a+h))$  をとる。3 点  $P_-, A, P_+$  を通る円の中心  $C_h(c_1(h), c_2(h))$  を求めよ。
- (2)  $c_1 = \lim_{h \rightarrow 0} c_1(h)$  及び  $c_2 = \lim_{h \rightarrow 0} c_2(h)$  とおく。  $c_1, c_2$  を求めよ。
- (3) 中心を  $C(c_1, c_2)$  とし点  $A$  を通る円を、点  $A$  における曲線  $y = f(x)$  の曲率円と言ひ、その半径 (=  $AC$ ) を曲率半径、その逆数を曲率という。曲率を求めよ。

【 解答 】

- (1)  $C$  は線分  $AP_+$  の垂直 2 等分線及び線分  $AP_-$  の垂直 2 等分線の交点である。  
線分  $AP_+$  の中点  $M_+$  は  $M_+(a + \frac{h}{2}, \frac{1}{2} \{f(a) + f(a+h)\})$ 。  $\overrightarrow{M_+C} \cdot \overrightarrow{AP_+} = 0$  より、

$$\left\{ c_1(h) - a - \frac{h}{2} \right\} h + \left\{ c_2(h) - \frac{f(a) + f(a+h)}{2} \right\} \{f(a+h) - f(a)\} = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore h \cdot c_1(h) + \{f(a+h) - f(a)\} c_2(h) \\ &= ah + \frac{h^2}{2} + \frac{\{f(a+h) + f(a)\} \{f(a+h) - f(a)\}}{2} \\ &= ah + \frac{h^2}{2} + \frac{\{f(a+h) - f(a)\}^2}{2} + f(a) \{f(a+h) - f(a)\} \end{aligned}$$

ここで、  $g(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  とおくと、今得た式の両辺を  $h$  で割って

$$c_1(h) + g(h)c_2(h) = a + \frac{1}{2}h + \frac{h}{2} \{g(h)\}^2 + f(a)g(h) \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を得る。線分  $AP_+$  の垂直 2 等分線から同様にして

$$c_1(h) + g(-h)c_2(h) = a - \frac{1}{2}h - \frac{h}{2} \{g(-h)\}^2 + f(a)g(-h) \dots\dots\dots ②$$

①, ②より  $c_1(h), c_2(h)$  の連立方程式を解いて、

$$c_1(h) = a - \frac{h}{g(h) - g(-h)} \cdot \frac{\{g(h) + g(-h)\} \{1 + g(h)g(-h)\}}{2}$$

$$c_2(h) = f(a) + \frac{h}{g(h) - g(-h)} \left( 1 + \frac{\{g(h)\}^2 + \{g(-h)\}^2}{2} \right)$$

(2)  $g(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  より、 $\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = \lim_{h \rightarrow 0} g(-h) = f'(a)$  である。ところで、

$$\begin{aligned} g(h) - g(-h) &= \frac{1}{h} \left( \int_a^{a+h} f'(x) dx + \int_{a-h}^a f'(x) dx \right) \\ &= \frac{1}{h} \left( \int_a^{a+h} f'(x) dx - \int_a^{a-h} f'(x) dx \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_a^{a+h} \{f'(x) - f'(x-h)\} dx \\ &= \frac{1}{h} \int_a^{a+h} \int_{x-h}^x f''(t) dt dx \dots\dots\dots ③ \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} \left\{ \frac{1}{h} \int_{x-h}^x f''(t) dt \right\} dx \dots\dots\dots ④$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f''(x) dx = f''(a) \dots\dots\dots ⑤$$

$$c_1 = a - \frac{f'(a) \left( 1 + \{f'(a)\}^2 \right)}{f''(a)}, \quad c_2 = f(a) + \frac{1 + \{f'(a)\}^2}{f''(a)} \dots\dots\dots ⑥$$

【注】 ④から⑤で、(手品のように、それとは見せずに)  $\lim_{h \rightarrow 0}$  と  $\int$  の順序を交換した。大丈夫かと心配する生徒がいれば (ハイレベルな生徒だと思おうが)、③以降は次の変形で示すことになる。 $a \leq x \leq a+1$  における  $|f'''(x)|$  の最大値を  $S$  とすると

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} \int_{x-h}^x f''(t) dt dx &= \frac{1}{h} \int_a^{a+h} \int_{x-h}^x \{(f''(t) - f''(a)) + f''(a)\} dt dx \\ &= \frac{1}{h} \int_a^{a+h} \int_{x-h}^x \int_a^t f'''(u) du dt dx + hf''(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{g(h) - g(-h)}{h} - f''(a) \right| &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \int_a^{a+h} \int_{x-h}^x \int_a^t |f'''(u)| du dt dx \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \int_a^{a+h} \int_{x-h}^x \int_a^t S du dt dx \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0} (t-a)S = 0 \quad (\because 0 \leq t-a \leq h) \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(-h)}{h} = f''(a)$$

(3) ⑥より曲率半径  $= \sqrt{(c_1 - a)^2 + (c_2 - f(a))^2} = \frac{\sqrt{(1 + \{f'(a)\}^2)^3}}{|f''(a)|}$  であり、曲率は

$$\text{曲率} = \frac{|f''(a)|}{\sqrt{(1 + \{f'(a)\}^2)^3}} \dots\dots\dots ⑦$$

実際に曲率を計算する場合、パラメーター表示されていた方が何かと便利なので、曲線  $C(t) : (x(t), y(t))$  について、曲率の公式を得ておいてみよう。今解いた問題の (3) を利用すればよい。 $y = f(x)$  を  $x$  で微分したとき  $y'$ 、 $x(t), y(t)$  を  $t$  で微分したとき  $\dot{x}, \dot{y}$  と表すことにして、

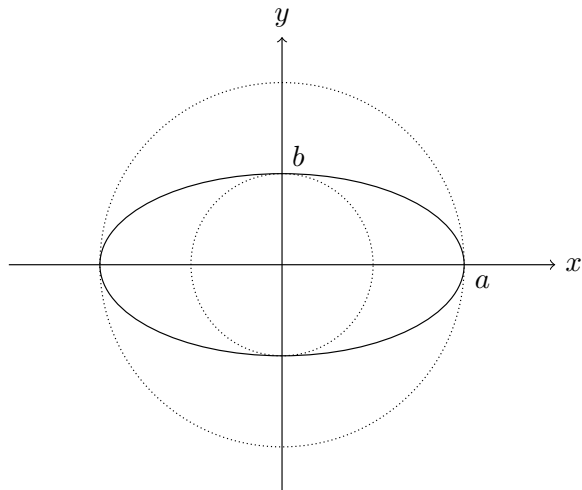
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} \quad \therefore y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{-\left(\frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \quad \therefore y'' = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x})^3} \\ \therefore \text{曲率} &= \frac{\frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x})^3}}{\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2\right\}^3}} = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{\sqrt{\{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2\}^3}} \dots\dots\dots \textcircled{8} \end{aligned}$$

【 楕円の曲がり具合 】

楕円

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0) \quad \dots\dots\dots \textcircled{9}$$

に関する曲率半径について調べてみよう。



【 楕円に関する曲率半径の問題作成 】

- (1) 楕円⑨について、曲率の最大値・最小値及びそれを与える点を求めよ。
- (2) 楕円⑨と同じ中心をもち、楕円に外接する円及び内接する円のそれぞれの曲率の相加平均と (1) で求めた曲率の最大値・最小値の相加平均の大小関係を調べよ。
- (3) 上の問題で、相加平均とあるところを相乗平均に変えるとどうなるか調べよ。

【 解答 】

(1) 楕円⑨は  $(a \cos t, b \sin t)$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) とパラメーター表示される。

$$\begin{aligned} (\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 &= (-a \sin t)^2 + (b \cos t)^2 = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t \\ \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} &= (-a \sin t)(-b \sin t) - b \cos t(-a \cos t) = ab(\sin^2 t + \cos^2 t) = ab \end{aligned}$$

$$\therefore \text{楕円の曲率} = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^3}} \quad \dots\dots\dots \textcircled{10}$$

$$a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t = (a^2 - b^2) \sin^2 t + b^2$$

ここで、 $a > b > 0$  より  $a^2 - b^2 > 0$  かつ  $0 \leq \sin^2 t \leq 1$  なので、

$$b^2 \leq a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t \leq a^2$$

等号については、左側は  $t = 0, \pi$  のとき、右側は  $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  のとき成立。

よって、楕円の曲率の最大値を  $R_M$ 、最小値を  $R_m$  とすると、⑩より

$$R_M = \frac{a}{b^2} \quad (\text{楕円の長軸の端点 } (-a, 0), (a, 0) \text{ での曲率})$$

$$R_m = \frac{b}{a^2} \quad (\text{楕円の短軸の端点 } (0, -b), (0, b) \text{ での曲率})$$

(曲率が最大となる所・最小となる所は視覚通りの結果。)

(2) 題意の2円の曲率の相加平均は  $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} = \frac{a+b}{2ab}$

楕円の方の相加平均は  $\frac{R_M + R_m}{2} = \frac{a^3 + b^3}{2a^2b^2}$  である。

$$\frac{a^3 + b^3}{2a^2b^2} - \frac{a+b}{2ab} = \frac{a^3 + b^3 - (a^2b + ab^2)}{2a^2b^2} = \frac{(a+b)(a-b)^2}{2a^2b^2} > 0$$

よって、楕円の相加平均の方が円の相加平均よりも大きい。

(3) 題意の2円の曲率の相乗平均は  $\frac{1}{\sqrt{ab}}$  であり、楕円の方の相乗平均も  $\sqrt{R_M R_m} = \frac{1}{\sqrt{ab}}$  である。よって両者は一致する。

## 0.1 曲線の長さや曲率半径

### 【曲がり具合を比較する】

きついカーブと緩やかなカーブ、というものを我々は感覚的に理解している。これを、量的に捉える方法を考案したい。次のような会話が感覚ではなく、根拠を持って話が出来るようになりたい。

右図1 ( $y = x^2$ ) の曲線上の点  $A$  でのカーブの仕方は点  $B$  でのカーブの仕方よりも  
 “急だ” or “緩やかだ”

そのために、“比較する”ということ考えると、その基準になるものが設定できればありがたい。曲がり方が一定のものとしてすぐに頭に浮かぶのは円だ。

右の図2, 図3 はそれぞれ円及び円の一部（円弧）である。見た感じ、図2のカーブは曲がり方が急な感じだし、図3のカーブは曲がり方が緩やかな感じだ。実は、図2の円の半径は1であり、図3は半径5の円の一部（円弧）。

曲がり方の、急さ（曲がり方の度合いが大きい）や、緩やかさ（曲がり方の度合いが小さい）はどれも円の半径に依るものらしい気がする。しかも、半径が大きいと緩やか小さいと急な感じになっている。言葉上、急と言った方が量が大きいイメージが湧いてしまう。そこで、円の曲がり方の度合いを示す量として

### 【提案】

半径  $r$  の円のカーブの曲がり方を示す量として  $\frac{1}{r}$  を採用し、この量に名前を付けて **曲率** と呼ぶことにしたい：半径  $r$  の円の曲率 =  $\frac{1}{r}$

<例> 図2の曲率 = 1 , 図3の曲率 =  $1/5 = 0.2$

### 【円以外の曲線の曲がり具合】

円以外の曲線についても曲がり具合を考えたい。今、曲がり具合の物差しのようなものとして円とその曲がり具合を示す量である曲率、というものを準備した。そこで、右上の図1に戻って、現点  $A(0,0)$  での曲がり具合を次のような思いつきで調べてみよう。

### 【アイデア1】

$A$  の左右に  $x$  座標の値が  $h(>0)$  離れた点  $P, Q$  を取る。そして、3点  $A, P, Q$  を通る円を求める（ $\triangle APQ$  の外接円として、3点が1直線上に並んでいない限りこの円はただ一通りに決まる）。この  $h$  を0に近づけていくと、点  $A$  近辺の曲線に一番ふさわしい円に近づいて行くだろう。

それを**曲率円**、その中心を**曲率中心**、半径を**曲率半径**、逆数を**曲率**と呼ぼう。

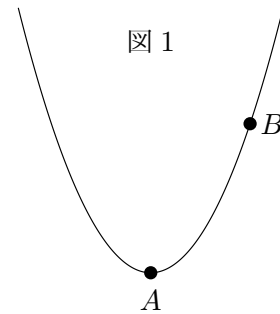


図1

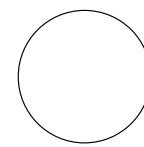


図2



図3

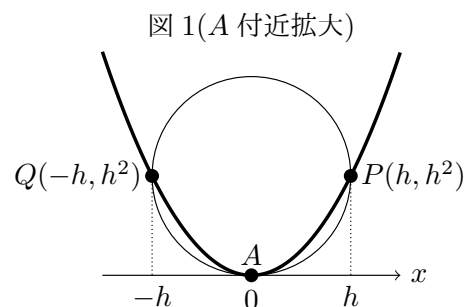


図1(A附近拡大)

(1) まず円の中心を求めてみよう。

線分  $AP$  の垂直 2 等分線と線分  $AQ$  の垂直 2 等分線の交点が求める円の中心になる。

<  $AP$  の垂直 2 等分線 >

•  $A, P$  の中点は  $\left(\frac{h}{2}, \frac{h^2}{2}\right)$

• 線分  $AP$  の傾きは  $\frac{h^2}{h} = h$  なので、これに垂直な直線の傾きは  $-\frac{1}{h}$

• 線分  $AP$  の垂直 2 等分線は  $y = -\frac{1}{h}\left(x - \frac{h}{2}\right) + \frac{h^2}{2}$

$\therefore y = -\frac{1}{h}x + \frac{h^2 + 1}{2}$  ..... ①

<  $AQ$  の垂直 2 等分線 >

•  $A, Q$  の中点は  $\left(-\frac{h}{2}, \frac{h^2}{2}\right)$

• 線分  $AQ$  の傾きは  $-\frac{h^2}{h} = -h$  なので、これに垂直な直線の傾きは  $\frac{1}{h}$

• 線分  $AQ$  の垂直 2 等分線は  $y = \frac{1}{h}\left(x + \frac{h}{2}\right) + \frac{h^2}{2}$

$\therefore y = \frac{1}{h}x + \frac{h^2 + 1}{2}$  ..... ②

以上より、求める円の中心は、①、②の連立方程式を解いて

$\left(0, \frac{h^2 + 1}{2}\right)$  ..... ③

だとわかる。

(2) 一番ふさわしい円 (曲率円) の中心 (曲率中心) は、③で  $h \rightarrow 0$  とすれば求まる。

$\lim_{h \rightarrow 0} \left(0, \frac{h^2 + 1}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$  ..... ④

(3) 一番ふさわしい円は点  $A$  を通っているので、半径は④と  $A$  との距離だから、 $\frac{1}{2}$  である。

点  $A$  での曲率半径  $= \frac{1}{2}$       点  $A$  での曲率  $= 1 \div \frac{1}{2} = 2$

と決めるのは妥当ではないか。

【演習 1】

点  $B(1, 1)$  での曲率を  $A$  の曲率を求めた方法で求めてみよう。

点  $B$  の左右に  $x$  座標の値が  $h (> 0)$  離れた点  $P(1 + h, (1 + h)^2)$ ,  $Q(1 - h, (1 - h)^2)$  を取り、3 点  $A, P, Q$  を通る円の中心と半径を求め、 $h \rightarrow 0$  として求める。

【演習 2】

$y = x^2$  の上の任意の点  $C(a, a^2)$  での曲率を求めよ。

【演習 3】

$y = x^2$  の曲がり方は、原点から右の方へ見ていくとどうなっていくか理由を付けて述べよ。



【 アイデア 2 】

$A$  の近く  $x$  座標の値が  $h(> 0)$  離れた所に点  $P(h, h^2)$  を取る。そして、点  $A$  での法線及び点  $P$  での法線を求める。この法線の交点は、 $h$  を  $0$  に近づけていくと、点  $A$  近辺の曲線に一番ふさわしい円の中心に近づいて行くだろう。

(1) まず円の中心を求めてみよう。

＜点  $A$  での法線＞

- 点  $A$  で法線は明らかに  $y$  軸であり、 $y$  軸の方程式は

$$x = 0 \dots\dots\dots ⑤$$

＜点  $P$  での法線＞

- 点  $P$  での接線の傾きは、 $y' = 2x$  より、 $2h$  である。
- よって、法線の傾きは  $y = -\frac{1}{2h}$  となる。
- よって、点  $P$  での法線の方程式は

$$y = -\frac{1}{2h}(x - h) + h^2 \dots\dots\dots ⑥$$

以上より、2 法線の交点は、⑤, ⑥の連立方程式を解いて

$$\left(0, \frac{2h^2 + 1}{2}\right) \dots\dots\dots ⑦$$

だとわかる。

(2) 一番ふさわしい円の中心は、⑦で  $h \rightarrow 0$  とすれば求まる。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(0, \frac{2h^2 + 1}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right) \dots\dots\dots ⑧$$

アイデア 1 で求めた円の中心④と同じ中心⑧が得られた。中心が同じで通る点  $A$  が同じなので、アイデア 1 とアイデア 2 について、点  $A$  については同じ結果となることがわかった。

【 演習 1 】

点  $B(1, 1)$  での曲率をアイデア 2 の方法で求めてみよう。以下の手順で問題を解け。

- (1) 点  $B$  での法線を求める。
- (2) 点  $B$  の近くに  $x$  座標の値が  $h(> 0)$  離れた点  $P(1 + h, (1 + h)^2)$  を取り、点  $P$  での法線を求める。
- (3) 上の (1),(2) で求めた両法線の交点を求める。
- (4) 上の (3) で求めた交点について、 $h \rightarrow 0$  としてふさわしい円の中心を求める。
- (5) ふさわしい円の半径を求め、曲率を求める。

【 演習 2 】

$y = x^2$  の上の任意の点  $C(a, a^2)$  でアイデア 2 の方法で求め、アイデア 1 の結果と比較せよ。

【 演習 3 】

一般の曲線  $y = f(x)$  について、曲率中心、曲率半径、曲率を求めよ（公式を作れ）。

【 アイデア 3 (ニュートン) 】

曲線  $y = f(x)$  上の点  $(a, f(a))$  での法線

$$y = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) + f(a) \dots\dots\dots \textcircled{9}$$

は  $a$  をものすごく小さな値だけ増やすと、元の法線と曲率中心で交わると予想される。曲率中心を  $(x_0, y_0)$  とすると、 $\textcircled{9}$  に  $x = x_0$  を代入した値が  $y_0$  である。 $a$  の値をものすごくわずかにだけ変化させると、 $x = a + h$  のときの法線の  $x = x_0$  での  $y$  の値は、曲率中心の  $y_0$  から変わらないだろうと予想される。つまり、 $x$  を  $x_0$  のまま変えずにおいて、 $a$  の値を変えたときの  $\textcircled{9}$  の  $y$  の値は変化しないはず。これは、 $\textcircled{9}$  について、 $\frac{\partial y}{\partial a} = 0$  となる  $x$  の値が  $x = x_0$  であることを示している。実際に  $\textcircled{9}$  について計算してみると、アイデア 2 の演習 3 で求めた曲率中心が得られ、以下がわかる。

$$\text{曲率中心} : \left( a - \frac{f'(a) + \{f'(a)\}^3}{f''(a)}, f(a) + \frac{1 + \{f'(a)\}^2}{f''(a)} \right)$$

$$\text{曲率半径} = \frac{\sqrt{(1 + \{f'(a)\}^2)^3}}{|f''(a)|}$$

$$\therefore \text{曲率} = \frac{|f''(a)|}{\sqrt{(1 + \{f'(a)\}^2)^3}}$$

【 演習 】  $\textcircled{9}$  において、 $\frac{\partial y}{\partial a}$  を計算し、上記の曲率中心、曲率半径、曲率が正しいことを確認せよ。