**あってよかった複素数**（コレクション）

　複素数まで世界を拡げたお陰で、どんな 2 次方程式も解けるようになった。しかし、結果に虚数が顔を出して解決している。

　式や文章中どこにも虚数はなく実数しかでてこないが、その式の正当性を証明したり、式を導いたり、何かの法則を発見したりするときに、複素数が威力を発揮する。

『実数の世界のみで記述されるているが、複素数があればこそ』

というものを拾い集めてみた。

**【三角関数の公式】**　$n$ が自然数のとき、次の等式が成り立つことを示せ

$$\sum_{k=1}^{n} \sin \frac{2k}{n}\pi = 0 \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos \frac{2k}{n}\pi = 0 \quad (n \geqq 2) \tag{2}$$

$$\sin(n\theta) = \sum_{r=0}^{[\frac{n-1}{2}]} (-1)^r \ {}_nC_{2r+1} \sin^{2r+1}\theta \cos^{n-2r-1}\theta \tag{3}$$

$$\cos(n\theta) = \sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^r \ {}_nC_{2r} \sin^{2r}\theta \cos^{n-2r}\theta \tag{4}$$

**(証明)**

(1), (2) について、$n \geqq 2$ のとき、$\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \neq 1$ なので、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (\cos \frac{2k}{n}\pi + i \sin \frac{2k}{n}\pi) &= \sum_{k=1}^{n} (\cos \frac{2}{n}\pi + i \sin \frac{2}{n}\pi)^k \\ &= \frac{(\cos \frac{2}{n}\pi + i \sin \frac{2}{n}\pi)\{1 - (\cos \frac{2}{n}\pi + i \sin \frac{2}{n}\pi)^n\}}{1 - (\cos \frac{2}{n}\pi + i \sin \frac{2}{n}\pi)}\end{aligned}$$

となるが、

$$1 - (\cos \frac{2}{n}\pi + \sin \frac{2}{n}\pi)^n = 1 - (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 0$$

なので、

$$\sum_{k=1}^{n} (\cos \frac{2k}{n}\pi + i \sin \frac{2k}{n}\pi) = 0$$

となり、この左辺の実部と虚部がともに 0 となり、(1), (2) が成り立つ。

次に (3), (4) について、

$$\begin{aligned}\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)&=(\cos\theta+i\sin\theta)^n\\&=\sum_{k=0}^{n} i^k\ {}_nC_k\cos^{n-k}\theta\sin^k\theta\\&=\sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^r\ {}_nC_{2r}\sin^{2r}\theta\cos^{n-2r}\theta+i\sum_{r=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-1)^r\ {}_nC_{2r+1}\sin^{2r+1}\theta\cos^{n-2r-1}\theta\end{aligned}$$

であり、実部と虚部の比較で (3), (4) が正しいことがわかる。

**【因数分解に関する一定理】**

実数係数の多項式は、必ず実数係数の 2 次以下の多項式の積に表せることを証明せよ。

**(証明)**

代数学の基本定理より、1 次式の積に因数分解される。ところで、実数係数なので、$\alpha$ が解ならば、その共役複素数 $\bar{\alpha}$ も必ず解となっている。

$$(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})=x^2-(\alpha+\bar{\alpha})x+\mid\alpha\mid^2$$

で、$\alpha+\bar{\alpha}, \mid\alpha\mid$ はどちらも実数なので、示された。

**【因数分解】**

$x^8+x^6+x^4+x^2+1$ を実数の範囲で因数分解せよ。

**(答)** $x^8+x^6+x^4+x^2+1=\prod_{k=1}^{4}\left\{x^2-2(\cos\frac{k}{5}\pi)x+1\right\}$

**《解》** 「一旦複素数の世界に入って因数分解し、共役複素数の和と積が実数になることを利用して実数の世界に戻る」という方法で次のように因数分解できる。

$$\begin{aligned}x^8+x^6+x^4+x^2+1&=\frac{x^{10}-1}{x^2-1}\\&=\frac{1}{x^2-1}\prod_{k=0}^{9}\left\{x-(\cos\frac{k}{5}\pi+i\sin\frac{k}{5}\pi)\right\}\\&=\prod_{k=1}^{4}\left\{x-(\cos\frac{k}{5}\pi+i\sin\frac{k}{5}\pi)\right\}\left\{x-(\cos\frac{10-k}{5}\pi+i\sin\frac{10-k}{5}\pi)\right\}\\&=\prod_{k=1}^{4}\left\{x^2-2(\cos\frac{k}{5}\pi)x+1\right\}\end{aligned}$$

**【オイラーの恒等式】**

$$A = \{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \mid a, b, c, d \text{ は全て整数 }\}$$

とするとき、集合 $A$ は積について閉じていることを示せ。

**(証明)**

$\alpha = x_1 + x_2 i$ , $\beta = x_3 + x_4 i$ , $\gamma = y_1 + y_2 i$ , $\delta = y_3 + y_4 i$ とおく。

$$\begin{aligned}
&({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2)({y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2 + {y_4}^2) \\
&= (\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta})(\gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta}) \\
&= \alpha\bar{\alpha}\gamma\bar{\gamma} + \alpha\bar{\alpha}\delta\bar{\delta} + \beta\bar{\beta}\gamma\bar{\gamma} + \beta\bar{\beta}\delta\bar{\delta} \\
&= (\alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta})\overline{(\alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta})} + (\alpha\delta - \beta\gamma)\overline{(\alpha\delta - \beta\gamma)} \qquad (5)
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} &= (x_1 + x_2 i)(y_1 - y_2 i) + (x_3 + x_4 i)(y_3 - y_4 i) \\
&= (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4) + (-x_1y_2 + x_2y_1 - x_3y_4 + x_4y_3)i \qquad (6) \\
\alpha\delta - \beta\gamma &= (x_1 + x_2 i)(y_3 + y_4 i) - (x_3 + x_4 i)(y_1 + y_2 i) \\
&= (x_1y_3 - x_2y_4 - x_3y_1 + x_4y_2) + (x_1y_4 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_4y_1)i \qquad (7)
\end{aligned}$$

(5),(6),(7) より

$$\begin{aligned}
&({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2)({y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2 + {y_4}^2) \\
= \quad &(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4)^2 \\
&+ (-x_1y_2 + x_2y_1 - x_3y_4 + x_4y_3)^2 \\
&+ (x_1y_3 - x_2y_4 - x_3y_1 + x_4y_2)^2 \\
&+ (x_1y_4 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_4y_1)^2 \qquad (8)
\end{aligned}$$

なので、$A$ は積について閉じていることが示された。

＜注＞

この恒等式 (8) は、『オイラーの恒等式』と呼ばれている（岩波　数学入門辞典 64 ページ）とのことです。そして、この恒等式は四元数の世界で見ると、『2 つの四元数の積のノルム（絶対値）が、それぞれの四元数のノルムの積に等しい』ことを示す式になっています。

また、この恒等式は「どのような自然数も 4 つの平方数の和として表せる」ことの証明でも活躍します（和田秀男　著「数の世界 – 整数論への道」＜岩波書店＞：p.98〜p.104 や、ハーディ・ライト　共著「数論入門」＜ Springer-Verlag ＞：日本語訳本　の p.38〜p.40 に記述があります)。

**【解の隔離】**

$f(x), g(x)$ はそれぞれ実数係数の多項式であり、方程式 $f(x)=0$ の解と方程式 $g(x)=0$ の解が互いに解を隔離しているなら、方程式 $f'(x)=0$ の解と方程式 $g'(x)=0$ の解もそれぞれ互いに解を隔離していることを示せ。

**【注：解の隔離】**

方程式 $f(z)=0$ の解と方程式 $g(z)=0$ の解が互いに解を隔離するとは、どちらの方程式も重解を持たず、大小の順において $f(z)=0$ の隣接する 2 つの解の間に $g(z)=0$ の 1 つの解があり、また $g(z)=0$ の隣接する 2 つの解の間に $f(z)=0$ の 1 つの解があることを言う。

**(証明)**

代数方程式の解が複素数平面上にどのように現れるかに関する次の有名な定理を利用する。

**《ガウスの定理》**

$F(z)$ を多項式とする（係数は一般に複素数でよい）。方程式 $F(z)=0$ の解の全てを含む凸多角形（周も含んで考える）は、方程式 $F'(z)=0$ の全ての解を含む。

(注)　凸多角形を最小凸多角形と言ってもよい。

**《エルミートの定理》**

$f(z)$ を多項式とする。方程式 $f(z)=0$ の解の虚数部の符号が全部同一であるとき、$f(z)$ の係数の実部と虚部を分けて $f(z)=U(z)+iV(z)$ とすると、$U(z)=0$ も $V(z)=0$ も実数解のみを持ち、しかも $U(z)=0$ の解と $V(z)=0$ の解とは互いに隔離する。

**《エルミートの定理の逆》**

実数係数の方程式 $U(z)=0, V(z)=0$ は実数解のみを持ち、しかもそれらは全て重解ではなく、互いに隔離しているとする。このとき、方程式 $U(z)-\kappa V(z)=0$ の解について、

**$\kappa$ が実数のとき**

方程式 $U(z)-\kappa V(z)=0$ の解は全て実数解である。しかも、$\kappa_1 \neq \kappa_2$ のとき、2 つの方程式 $U(z)-\kappa_1 V(z)=0$ と $U(z)-\kappa_2 V(z)=0$ の解は、互いに相隔離する。

**$\kappa$ が虚数のとき**

方程式 $U(z)-\kappa V(z)=0$ の解は全て虚数であり、全て実数軸の片側に存在する。しかも、そのいずれ側にあるかは $\kappa$ の虚数部の符号により決定される。

**《上の３定理の証明について》**

ここでは、上の 3 つの定理の証明はしない。例えば、高木貞治 著「代数学講義」（共立出版株式会社　昭和 47 年 10 月 20 日　改訂新版 11 冊）の 66 ページ定理 2.9、70 ページ問題 1 及び 72 ページ定理 2.11 を見てください。また、この後とりかかる解の隔離の証明も、この本の 74 ページ問題 3 を少し書き換えたもの)。

この 3 つの定理を認めると、証明は次のようになる。

エルミートの定理の逆から、方程式 $f(z)+ig(z)=0$ の解は全て実数軸の片側にある。よって、ガウスの定理から、方程式 $f'(z)+ig'(z)=0$ の全ての解も実数軸の同じ片側にある。よって、エルミートの定理から、$f'(z)=0$ の解と $g'(z)=0$ の解は互いに隔離する。(証明終わり)

**＜説明＞**

この証明、“ 実数のみの世界から一旦複素数の世界に入って眺め、わかった結果が実数の世界の話しになっているので、実数の世界のみの出来事として処理できる ” 見事な例の一つだと思う。

**【作問】** これを元にして、次のような問題を作ってみた。

$f(x), g(x)$ はそれぞれ 3 次関数、2 次関数であるとする。$y=f(x)$ は $x$ 軸と異なる 3 点で交わっているとする。$x$ 軸は $y=f(x)$ により 4 つの部分に分けられていることになるが、このうち線分である部分が 2 つある。この 2 つの部分で $y=g(x)$ は $x$ 軸と交わっているとする。

このとき、放物線 $y=f'(x)$ は $x$ 軸と異なる 2 点で交わり、この 2 点を端点とする線分上で直線 $y=g'(x)$ は $x$ 軸と交わっていることを証明せよ。

**【解答】**

$$f(x)=h(x-a)(x-b)(x-c) \quad (\text{但し、}k,a,b,c\text{ は全て実数であり、}a<b<c\ )$$
$$g(x)=k(x-s)(x-t) \quad (\text{但し、}h,s,t\text{ は全て実数であり、}a<s<b<t<c\ )$$

とおける。

$$f'(x)=h\{(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)\}$$
$$g'(x)=k(2x-s-t)$$

よって、題意を示すには、$h(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$ とおいて、$h(\frac{s+t}{2})<0$ を示せばよい。ところで、$\frac{a+b}{2}<\frac{s+t}{s}<\frac{b+c}{2}$ であり、$h(x)$ は下に凸な関数なので、

$$h(\frac{a+b}{2})<0 \text{ かつ } h(\frac{b+c}{2})<0$$

を示せば十分であることがわかる。

$$h(x)=(x-a)(x-b)+(2x-a-b)(x-c)$$
$$\therefore\ h\left(\frac{a+b}{2}\right)=-\frac{1}{4}(a-b)^2<0$$
$$h(x)=(x-b)(x-c)+(2x-b-c)(x-a)$$
$$\therefore\ h\left(\frac{b+c}{2}\right)=-\frac{1}{4}(b-c)^2<0$$

よって証明された。

**【実正規行列の標準形】**

実数を成分とする行列のみを考える。正方行列 $A$ が ${}^tAA = A^tA$ ( ${}^tX$ は行列Xの転置行列を表す) を満たしているとき、適当に直交行列 $P$ (${}^tPP = E$ を満たす) をとると、

$$
{}^tPAP = \begin{pmatrix}
\alpha_1 & & 0 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & O & \\
0 & & \alpha_s & & & & & & \\
& & & \mu_1 & \nu_1 & & & & \\
& & & -\nu_1 & \mu_1 & & & & \\
& & & & & \ddots & & & \\
& O & & & & & & \mu_t & \nu_t \\
& & & & & & & -\nu_t & \mu_t
\end{pmatrix} \tag{9}
$$

とできる。

**(証明の概略)**

$A$ は $n$ 次の正方行列とする。$A$ は実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ での線形写像であるが、$n$ 次元複素ベクトル空間 $V$ での線形写像と見直すことにする。$A$ は $V$ 上のユニタリー行列であり、正規行列である。よって、Toeplitz の定理より ${}^t\overline{U}AU$ が対角行列となるようなユニタリー行列 $U$ が存在する。また、$A$ の固有多項式は実数係数なので、$\lambda$ を $A$ の固有値とすれば、$\overline{\lambda}$ も $A$ の固有値になっており、$\mathbf{x}$ を $\lambda$ に属する $V$ の固有ベクトルとすると、$\overline{\mathbf{x}}$ は $\overline{\lambda}$ に属する $V$ の固有ベクトルになっている。

固有多項式の全ての解を重複を含めて、$\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \lambda_1, \ldots, \lambda_t, \overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_t}$ とする（但し、$\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ は実数、$\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ は虚数であり、$n = s + 2t$ である)。また、$\alpha_i$ $(1 \leqq i \leqq s)$ に対して、実固有ベクトル $\mathbf{u_i}$ を、$\lambda_j$ $(1 \leqq j \leqq t)$ に対して、虚固有ベクトル $\mathbf{x_j}$ ととり、

$$\{\mathbf{u_i}\ (1 \leqq i \leqq s)\ ,\ \mathbf{x_j}\ ,\ \overline{\mathbf{x_j}}\ (1 \leqq j \leqq s)\ \}$$

が $V$ の正規直交基底となるようにできる。

ここで、

$$\mathbf{v_k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{x_k} + \overline{\mathbf{x_k}}) \quad , \quad \mathbf{w_k} = \frac{1}{\sqrt{2}i}(\mathbf{x_k} - \overline{\mathbf{x_k}})$$

とおくと、$\mathbf{v_k}, \mathbf{w_k}$ は実ベクトルであり、

$$\{\mathbf{u_i}\ (1 \leqq i \leqq s)\ ,\ \mathbf{v_j}\ ,\ \mathbf{w_j}\ (1 \leqq j \leqq s)\ \}$$

は実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ での正規直交基底と見ることができる。

複素数の世界から実数の世界に戻ることにする。

$\lambda_k = \mu_k + i\nu_k$ ($\mu_k, \nu_k$ は共に実数 $, 1 \leqq k \leqq t$) としておく。このとき、

$$\begin{aligned}
Ax_k &= A(\sqrt{2}\mathbf{v_k} + \sqrt{2}i\mathbf{w_k}) \\
&= \sqrt{2}(A\mathbf{v_k} + iA\mathbf{w_k}) \\
Ax_k &= \lambda x_k \\
&= (\mu_k + i\nu_k)(\sqrt{2}\mathbf{v_k} + \sqrt{2}i\mathbf{w_k}) \\
&= \sqrt{2}(\mu_k\mathbf{v_k} - \nu_k\mathbf{w_k}) + \sqrt{2}i(\nu_k\mathbf{v_k} + \mu_k\mathbf{w_k}) \\
\therefore \quad A\mathbf{v_k} + iA\mathbf{w_k} &= \mu_k\mathbf{v_k} - \nu_k\mathbf{w_k} + i(\nu_k\mathbf{v_k} + \mu_k\mathbf{w_k})
\end{aligned}$$

を得る。$\mu_k, \nu_k$ は実数であり、$\mathbf{v_k}, \mathbf{w_k}$ は実ベクトルなので、

$$\begin{aligned}
A\mathbf{v_k} &= \mu_k\mathbf{v_k} - \nu_k\mathbf{w_k} \\
A\mathbf{w_k} &= \nu_k\mathbf{v_k} + \mu_k\mathbf{w_k} \\
\therefore \quad A(\mathbf{v_k}, \mathbf{w_k}) &= (\mathbf{v_k}, \mathbf{w_k})\begin{bmatrix} \mu_k & \nu_k \\ -\nu_k & \mu_k \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

である。よって、(9) は証明された。

**＜説明＞**

この実正規行列の標準形は、まさしく今回のレポートの動機を私に与えてくれた例です。見事に“複素数の世界として処理し、その結果が実数の世界での話しになっているので、実数の世界の出来事”になっているところ、非常に小気味よい感じがしたのを覚えている。

**【定積分の計算】**　定積分 $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\cos x}\cos(\sin x)dx$ の値を求めよ。

( **解**Ⅰ)

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\,dz &= 2\pi i \quad (\because \text{コーシーの積分公式}) \\
\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\,dz &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{\cos x + i\sin x}}{\cos x + i\sin x}(\cos x + i\sin x)'dx \\
&= i\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos x}\{\cos(\sin x) + i\sin(\sin x)\}dx
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\cos x}\cos(\sin x)dx = 2\pi$$

（解 II） $z=-e^{ix}$ とする。

$$
\begin{aligned}
e^z &= e^{-\cos x}e^{-i\sin x} \\
&= e^{-\cos x}\{\cos(\sin x) - i\sin(\sin x)\} \\
e^z &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}e^{inx} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(\cos\ nx + i\sin\ nx)
\end{aligned}
$$

$$
\therefore\quad e^{-\cos x}\cos(\sin x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cos\ nx
$$

右辺は一様収束するため項別積分でき、

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}e^{-\cos x}\cos(\sin x)dx &= \int_{-\pi}^{\pi}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\ nx\ dx \\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

（解 III）

$f(r) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}e^{-r\cos x}\cos(r\sin x)dx$ とおく。

$$
\begin{aligned}
f'(r) &= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial}{\partial r}\{e^{-r\cos x}\cos(r\sin x)\}dx \\
&= -\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\ e^{-r\cos x}\cos(r\sin x)\}dx - \int_{-\pi}^{\pi}e^{-r\cos x}\sin x\ \ \cos(r\sin x)\}dx
\end{aligned}
$$

$r\neq 0$ のとき、

$$
\begin{aligned}
f'(r) = \int_{-\pi}^{\pi}&\cos x\ e^{-r\cos x}\cos(r\sin x)\}dx - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{r}e^{-r\cos x}\sin x\right\}\cos(r\sin x)\}dx \\
&= -\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\ e^{-r\cos x}\cos(r\sin x)\}dx \\
&\quad -\left[\left\{\frac{1}{r}e^{-r\cos x}\sin x\right\}\cos(r\sin x)\}\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{r}e^{-r\cos x}\sin x\frac{d}{dx}\{\cos(r\sin x)\}\}dx \\
&= -\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\ e^{-r\cos x}\cos(r\sin x)\}dx + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{r}e^{-r\cos x}r\cos x\cos(r\sin x)dx \\
&= 0
\end{aligned}
$$

また、

$$
f'(0) = -\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\ dx = 0
$$

であるから、$f(r)$ は定数となり、$f(r)=f(0)$ つまり、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-r\cos x}\cos(r\sin x)dx &= \int_{-\pi}^{\pi} 1\ dx \\ &= 2\pi\end{aligned}$$

**＜説明＞**

複素関数論の本を見ると、実数値関数の定積分の値を求める方法として複素関数が利用される例をたくさん見ることができる。

この問題は数学セミナー 2008.3 号のエレガントな解答を求むに出されていた問題である。紹介した解答は、6 月号の解答に紹介されたものの一部である。

**(余談)**　解 III はかなり突拍子もないことを考えたように見えるが、岩波講座 基礎数学 解析学 ( )v 複素解析　小平邦彦 (著) の 38 ページに、概略次のことが書かれている（細かな条件設定等省きます)。

**【平均値の定理】**(mean value theorem)

$$f(c)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(c+re^{i\theta})d\theta$$

**（証明）**$\mu(r)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(c+re^{i\theta})d\theta$ とおく。

$$|\mu(r)-f(c)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(c+re^{i\theta})-f(c)\right|d\theta \tag{10}$$

であり、$r\to+0$ のとき $\left|f(c+re^{i\theta})-f(c)\right|$ は $\theta$ に関して一様に 0 に収束するから、(10) から、

$$\lim_{r\to+0}\mu(r)=f(c)$$

である。よって、$\mu(r)$ が $r$ によらない定数関数であることを示せばよい。ここで、次のことに注意しておく。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}f(c+re^{i\theta}) &= f'(c+re^{i\theta})e^{i\theta} \\ \frac{\partial}{\partial\theta}f(c+re^{i\theta}) &= f'(c+re^{i\theta})rie^{i\theta} \\ \therefore\quad \frac{\partial}{\partial r}f(c+re^{i\theta}) &= \frac{1}{ir}\frac{\partial}{\partial\theta}f(c+re^{i\theta})\ (r>0)\end{aligned} \tag{11}$$

定数関数であることを示すために微分してみる。

$$\begin{aligned}2\pi\frac{d}{dr}\mu(r) &= \int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}f(c+re^{i\theta})d\theta \\ &= \frac{1}{ir}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\theta}f(c+re^{i\theta})d\theta \quad (\because\ (11)) \\ &= \frac{1}{ir}\{f(c+re^{2\pi i})-f(c+r)\} \\ &= 0\end{aligned}$$

よって示された。

この証明のエッセンスを真似したものが解 III となっている。