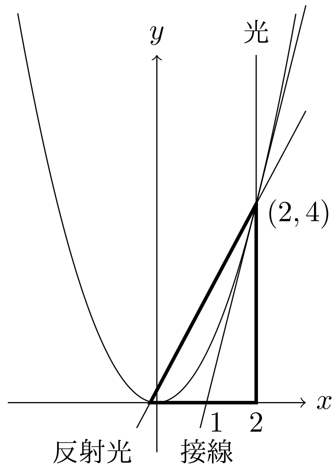
後　日　談

【 放物線の焦点の問題 】

時間が足りなくなり、飛ばした問題、急ぎ足で話した問題を次に書きます。そして、折角なので接線に関わるトピックスを紹介します。興味がわけば読んでみて下さい。

0.1　説明できなかった問題

【2】　放物線 $y = x^2$ に $x = 2$ の上から来た光が、点 $(2, 4)$ で放物線の鏡にぶつかった。その反射光の式を次の各問いに沿って求めよう。



(1) 点 $(2, 4)$ での放物線の接線を求めよう。

$$\begin{aligned} x^2 &= (\ t\ + 2\ )^2 \\ &= \quad t^2\ + 4t\ + 4 \\ &= \quad (\ x\ - 2\ )^2 + 4(\ x\ - 2\ ) + 4 \end{aligned}$$

なので、接線は

$$y = 4(\ x\ - 2\ ) + 4 = 4x - 4$$

(2) 接線と x 軸との交点を求めよう。

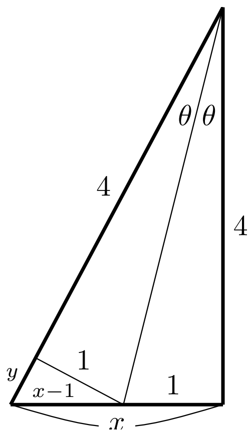
$4x - 4 = 0$, $x = 1$ 　$\therefore\ (1, 0)$

(3) 反射光の傾きを求めよう。(参照：下の図)

$$\begin{cases} y : x = 1 : 4 & \therefore\ x = 4y \\ (x - 1) : (y + 4) = 1 : 4 & \therefore\ y = 4x - 8 \end{cases}$$

$15x = 32\ \therefore\ x = \dfrac{32}{15}$

以上から、傾き $= \dfrac{4}{x} = \dfrac{15}{8}$



(4) 反射光の直線の式を求めよう。

反射光の式を

$$y = Ax + B$$

とすると、傾きは $A = \dfrac{15}{8}$。点 $(2, 4)$ を通るので、

$$4 = 2A + B$$

$$\therefore\ B = 4 - 2A = 4 - 2 \times \frac{15}{8} = \frac{1}{4}$$

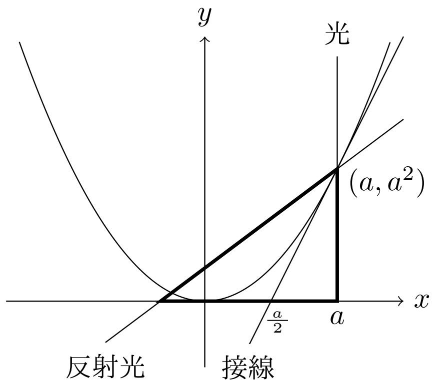
以上から、反射光の式は

$$y = \frac{15}{8}x + \frac{1}{4}$$

今回も【1】と同じく $B = \dfrac{1}{4}$ だ。

ひょっとして $\cdots\cdots$ $\Longrightarrow$【3】

【3】　放物線 $y=x^2$ に $x=a$ の上から来た光が、点 (a,a^2) で放物線の鏡にぶつかった。その反射光の式を求めると



(1) 点 (a,a^2) での放物線の接線を求めると

$x=t+a$ を代入

$$x^2=(t+a)^2=t^2+2at+a^2$$

$t=x-a$ を代入し 1 次の部分が接線になるので、

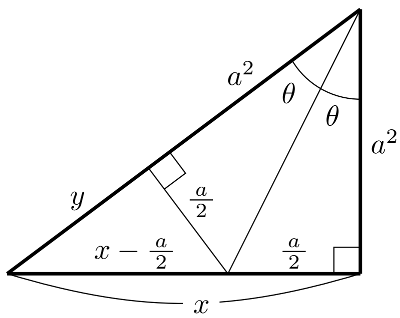
接線：$y=2a(x-a)+a^2=2ax-a^2$

(2) 接線と x 軸との交点を求めると

$$2ax-a^2=0 \quad , \quad 2ax=a^2$$

$$\therefore x=\frac{a^2}{2a}=\frac{a}{2} \qquad \therefore \left(\frac{a}{2},0\right)$$

(3) 反射光の傾きを求めると



$$\begin{cases} y:x=\dfrac{a}{2}:a^2=1:2a \\ \left(x-\dfrac{a}{2}\right):\left(y+a^2\right)=1:2a \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x=2ay \\ y=2ax-2a^2 \end{cases}$$

$$x=2a(2ax-2a^2)\ ,\ (4a^2-1)x=4a^3$$

$$\therefore\ x=\frac{4a^3}{4a^2-1}$$

以上から、

$$傾き=\frac{a^2}{x}=\frac{a^2(4a^2-1)}{4a^3}=\frac{4a^2-1}{4a}$$

(4) 反射光の直線の式を求めると

反射光の式を

$$y=Ax+B$$

とすると、傾きは $A=\dfrac{4a^2-1}{4a}$。点 (a,a^2) を通るので、

$$a^2=aA+B$$

$$\therefore\ B=a^2-aA=a^2-a\times\frac{4a^2-1}{4a}=a^2-\frac{4a^2-1}{4}=\frac{4a^2-(4a^2-1)}{4}=\frac{1}{4}$$

以上から、反射光の式は

$$y=\frac{4a^2-1}{4a}x+\frac{1}{4}$$

この式から、a が何であっても反射光の y 切片は $\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$ になることがわかった。つまり、反射光は必ず点 $\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$ を通る（焦点）ことがわかった。

0.2　発展

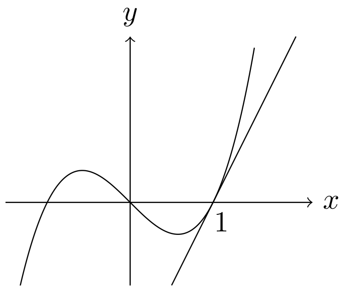
　今回紹介した接線マジックは、2 次関数でなくても、3 次関数や 4 次関数及び何次関数でも接線が求められます。例を一つ紹介しましょう。

【 例 】　$y = x^3 - x$ の上の点 $(1, 0)$ での接線を求めてみよう。

$$\begin{aligned} x^3 - x &= (t+1)^3 - (t+1) \\ &= t^3 + 3t^2 + 2t \\ &= (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 2(x-1) \end{aligned}$$

1 次式の部分を取り出して、接線は

$$y = 2(x-1) \quad \therefore\ y = 2x - 2$$



【 例　終了 】

【 テイラー展開 】

ここまでに見てきた接線マジックを振り返ると、そのキーポイントが見えてきます。いったん x に t の式を代入した後、展開計算してその t に x の式を代入して元の x の式に直しました。この途中段階の t の式を省いて x の式に戻ったものを書いてみると、そのキーポイントがわかります。これまでの例で列挙すると、

$$\begin{aligned} x^2 - x - 1 &= (x-2)^2 + 3(x-2) + 1 \\ 2x^2 + x + 1 &= 2(x-1)^2 + 5(x-1) + 4 \\ x^2 &= (x-1)^2 + 2(x-1) + 1 \\ x^2 &= (x-2)^2 + 4(x-2) + 4 \\ x^2 &= (x-a)^2 + 2a(x-a) + a^2 \\ x^3 - x &= (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 2(x-1) \end{aligned}$$

です。考えてみれば当然ですが、n 次式の x に $x = t + a$ を代入して、その t の式を展開計算したら t の n 次式になります。今度はその t の n 次式に $t = x - a$ を代入して展開計算すれば、x の n 次式で当然元の式と等しい式です。これを t の式の部分を省いて書くと次のことがわかります。

【 定理 】どんな n 次の式 $f(x)$ も必ず次のような式に書き換えられる。

$$f(x) = A(x-a)^n + B(x-a)^{n-1} + \cdots + C(x-a) + D \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

ただし、$A, B, \cdots, C, D$ は a の値により決まる数である。

　そして、グラフ $y = f(x)$ の $x = a$ での点 $(a, f(a))$ におけるグラフの接線は

$$y = C(x-a) + D$$

になっている。

　$f(x)$ を①の右辺のように書き換えることを $f(x)$ を**テイラー展開**すると言います。これは、大学で学ぶ数学の一つで、皆さんが将来勉強する三角関数（$\sin x, \cos x, \tan x$ が関数になったもので、高校 2 年生で学習）や指数・対数関数（$a^x, \log_a x$ これも 2 年生で学習）といったものにまでこの定理が成り立ち（但し、①の右辺の足し算は無限個の足し算になるという、まだ皆さんの未知の数学の世界になります）、様々なところで活躍します。このような関数ではなく、皆さんがよく目にする 2 次関数なら、定理と大げさに言わなくてもすぐにわかる内容なので、今回 “接線マジック” と勝手に私が命名して大学の数学の一端を紹介しました。

【 余話 】

“光が一点に集まる（焦点がある）ような式は 2 次式以外にもあるんじゃないか？”、そういうようなことに興味ありませんか。もし、関心があれば次の問題を考えてみてはどうでしょう。

【 問題 】

y 軸に平行に真上から来た光が、グラフ $y = f(x)$ の鏡に当たって反射した。その反射光が必ず原点を通っている（原点が焦点）。2 次式以外に $f(x)$ はあるか？

接線マジックを使って接線の式を求められるので、この問題を解くことができます。