

# 1 数学教育への思い

## 1.1 全ての生徒に本当の数学を

- 教科書を説明する
- 例題を説明する、
- 問題解法の演習をさせる
- 「同じ値か 同じ式か」だけに關心を注ぐ

このようなことだけの授業が1年間続いて良いのか。  
出来たかどうかということだけにとらわれてはいけない。

- よい点数を取る生徒 ↔ 取らない生徒
- 要領よく覚える生徒 ↔ 覚えられない生徒
- じっくり考える生徒 ↔ 考えない生徒
- 理解の早い生徒 ↔ 遅い生徒

全ての生徒に本当の数学を。

### 【プリント作成の動機と目的】

- 授業で簡単に触れた数学的に密度の濃いもの
- 授業で話したいが長くなり時間がうまくとれない
- 授業とは関係がないが（発作的に？）是非とも伝えたい

### 【数学教育への思い】

- 心の中にある数学的なものを伝えたい
- 幾多の数学者が寝食を忘れた『数学』
- 面白くないはずがない。
- 興味深くないはずがない。
- 是非とも生徒に伝えたい

## 1.2 これで良いのか

かつて、入試地獄という言葉が広まり、次のような時代があった。

入試のためだけに勉強している生徒。

宿題を出してくれないと勉強できないから、宿題をどんどん出して欲しいと言う生徒。

疑問点があっても、理由がわからなくても、丸暗記してそれが使えさえすればテストで良い点が取れると言われると、何のためらいもなく従う生徒。

また、

入試のために点数を取る技術だけ身に付けろと言う教師。

疑問点があっても、理由がわからなくても、丸暗記してそれが使えさえすればテストで良い点が取れるから、何のためらいもなく指示に従え、と言う教師。

全生徒が、全教員がこうだったというわけではない。しかし、このような状況は笑えない現実として、程度の問題はあるにせよ、確かにあった。

このようになりたくはなかった。気をつけていないと、この危険に知らず知らず足をふみいれてしまう可能性があった。

### 1.3 数学教育で大切なこと

公式を覚え、それを用いて問題を解く技術。これが大切なものの一つであることは確かだ。しかし、将来数学の公式を利用して仕事をしない人にとっては何も残らない。公式を覚え、使う、こと以外にも、大切なことがたくさんある。

日常生活や仕事の上で、数学を学んだ者とそうでないものとの間には大きな違いが出てくると信じている。例えば、どんな仕事にも、処理しなければならない問題が発生したときには、問題の本質がどこにあるのか、その本質を睨みながら、問題を変形し、過去の知識や経験でよく似たものを利用したり、問題を単純化したりなど、課題解決・問題解決に取り組むことによく出くわす。

これらのことで、思い浮かぶ大切なものをいくつか並べてみる。

- ① 法則性を見抜く能力。
- ② 日常生活の中の事物から数学的対象を取り出して考えていく能力。
- ③ 自分が今考えていることの完全解決ができなくても、アプローチの中で見つけた事柄から数学的に面白い結果などをまとめていく能力。
- ④ 一つの問題の解決を終わりとせず、更にそれを発展させたり、別の角度から問題を変えて考えていく能力。
- ⑤ 『こんなことが成り立てばいいのに』…。などの夢を見ることができること。及び、その夢が実現するための条件などを調べていく能力。

などである。

また、数学自身としても大切だと思うことに、

- ⑥ 数学は死に絶えた学問ではなく、今もどんどん発展している。
- ⑦ 日常生活と切り離された世界として、数学それ自身の中での興味深さがある。

大学生だったときに、万葉集の研究で有名な犬養先生という方がいらっしゃった。先生のお宅を訪れる機会に恵まれたとき、私が数学系統の人間と知られて先生は『昔は、数学なんて嫌いだとしが思わなかったけど、最近、数学のダイジェスト版を読んでみたら、実に面白かったですねえ。…』と話して下さった。

『何か役に立つのか』、を度外視して何か知らないが楽しい、という部分があってもよいのではないか（我々は実用書ばかりでなく小説を読んだり、また、歴史から何かを学び取ろうというのでなく、へえこんなこともあったんや、という興味を満たしたりする）。

文化や教養としての数学があっても良いのではないか

## 2 資料の説明

### 【基礎力テスト】

- 【1】 初めに左辺のみが書いてあり、それを変形して右辺になるという意味での  $=$  として認められものとそうでないものの判断。特に、方程式の同値変形に関わる問題を正しく捉えるために必要な判断（この基礎力テスト【3】がこれに関わる問題）。
- 【2】 特に、9番以降を意識して問題を考えてみた。12番など、定義域が一つの区間であると思いきわために間違いを起こすことを見込んでここに出してみた。多くの生徒はひっかかってしまうと思う（オレオレ詐欺にひっかかるのも、自分で勝手に我が子と思いきわることが原因。勝手に思いきわことの危険を生徒に注意しておいてやりたい）。13番に関わっては、今回のレポートとして「作図不可能問題に関わる話題の紹介」というタイトルのものを次の資料に付けた。
- 記憶に間違いがなければ、デデキントが「およそ科学においては、証明できることを証明なしに信じてはいけない」と語っていたと思ったが、この言葉を喚起したいと思う。
- 【3】 上の【1】で注意した、方程式の同値変形に関する注意を促す問題。

以下のレポートについて、レポートのタイトルに続いてある  $\langle \quad \rangle$  内の 囲み数字は、“1.3 数学教育で大切なこと”中に示した番号を示す。プリント作成等の当時の私の思いや意識を今から思い返して、相当していると思うものを示したものである。

### 【数学談話室】

倍取りゲーム  $\langle \textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{6} \rangle$

これは漸化式をする前や後（前にするか後にするかでプリントの書き方や授業での話し方の雰囲気は微妙に変わる）に、1時間ほど授業を使って倍取ゲームを生徒に遊ばせる。少し後で後手必勝の石の数を小さい順に答えさせる。この並び方が、規則性を持っていることを、予め生徒に知らせたりはしない。『先手・後手どちらが必勝になる？石の数が何個でも同じか？』ぐらいのことを言って生徒に調べさせる。後手必勝の2,3,5,8個ぐらいまで来て、にやにやしながら『次は13でしょ』と言う生徒がいたりすると楽しい。

これはその授業後に配ったプリントで、その答え及びその時の必勝法についてのもの。（漸化式を話す前の授業なら、このプリントは何週間か後に出すつもり）。

Fibonacci 数列と母関数 < ⑦ >

教養と言っていいたろうか。学生時代に組み合わせ論という本を読んでいて、私自身非常に興味を覚えたので、生徒に伝えたいと思ったのが作成した動機。

整数論 < ⑥,⑦ >

これは、夏休みの読み物として作った。長い休みには、日頃こまぎれの時間ではできないものにじっくり取り組める良さがある。

受験問題や、基礎の復習問題の宿題だけを与えて終わりというのはどうか? というのが動機で作成した。3 ページに目次があるが、この目次は生徒に渡したプリントのものであり、今回ここに資料として示したものは、生徒に渡したプリント(当時手書きだった)を  $\text{TeX}$  でデジタルデータにしたものであり、ページ番号は違っている。

6 ページの 1 行目に『一つ一つはどうなっているかわからないが、全体としてみると同じ』、と書いてある部分などは、私の生徒に伝えたいところ。数回前のこの研究会にも、これを含めて「全体を見ると美しい」というレポートを提出したことがあった。つまり、公式自身以上に伝えたいことがあったりする。

8 ページの談話などは、未解決のもの(今となっては解決されたが、記載当時はまだ未解決だった)があることなどについて知らせる例。今回の資料には入れなかったが、この整数論のプリントでは、問題の文章自身は難しくないが未解決である問題を集めたコーナーも作った(10 ページ目次 § 4 の所)。

円の面積について < ③,④,⑤ >

授業の中でプリントを元にして話をしたこともあった。数学が得意とっていない生徒にも、わりと好評であった。2 年生で、見学旅行前に 3 回ほど授業があり、ちょうど次に微分に入ろうというところ。そのまま入ると中途半端なので、 $\pi$  について話し、 $\pi$  の近似値をどうやって求めるか、曲線で囲まれる面積をどのように測ろうと昔の人は考えたか、… など面白いのではないかと。また  $\pi$  という日頃見慣れているものに近づいていくものを示すことで、限りなく近づくという事柄が生徒に受け入れやすいのではないかと。“限りなく近づくということ、余りにも抽象的な雰囲気の中で教え過ぎていないか。”というのが動機の一つ。いくらでも好きなだけ本当の値を、漸化式から求めていけるというのは、近づくということの実感を与えるように思う。2 年生でも生徒は十分興味を持って取り組んでいた。

どちらが正しい? < ①,③,④,⑤ >

これは、生徒に宿題として提出したレポートについてのプリント。日頃の授業では気がつかない一人一人の生徒の側面の発見があり、レポートを読むのにかなり時間がかかるが楽しいプリント作りだった。

このレポートでは、受験技術には長けているが本当に数学(科学)的にいいのかなと思うのがあったり、それほどいつも素晴らしい点数をとっているわけではないが、本来ならこういう生徒こそ科学(数学)的にはいいなあ、と思ったりすることがよくある。

日頃ペーパーテストである程度良い点をとっている生徒に次のようなことが意外と多い。問題が与えられれば解くが、別段自分から進んで興味をもっているわけではない。他人から

与えられた問題が解けると安心してしまって、“自分はもっと詳しくわからないとわかった気がしないから、更に深く考えてみよう。このような問題が解けたぐらいでは不満が残る。”とはならない。自分はどうか、という部分がなく、はい答えがわかりましたよ、というクイズの解答のようになってしまう。

対称式 < ① >

対称式が基本対称式で書けることを、証明無しで事実だけ教えていることに気持ち悪さを感じ、何とか雰囲気くらいでも証明らしそうなことを話してやれないか考えてみたら、意外と簡単に証明できることに気づき、プリントを作成した。1年生に数学的帰納法? 教えて悪いわけではないと思っている。

必要に迫られて使っているものほど、実感を持って理解できるのではないかと思う。むしろ、無味乾燥な形式的書き方を無理に暗記させようとする方が罪が重いように思う。2年生になって、あれ、この考え方1年生の時既にやったような気がする、というのも良いのではないかと思う。

解と係数の関係 < ⑦ >

“解と係数の関係”の使い方を伝えるのが目的ではない。“解と係数の関係”に対して持っている自分のイメージなどを伝えるため作成した。物理や化学での気体分子運動論で、「一つ一つの分子がどんな動きをするかということなどについては分からなくても、それらが集まった気体全体の様子は統計的に分かる」というのがある。ちょうどそのように“解と係数の関係”で伝えたいのは、「一つ一つの解が何であるかが分からなくても、それら全体に関わる様子は分かる」ということ。

正三角形に等積変形 < ③,⑤ >

これは、数学クラブで生徒と取り組んだ問題で、かなり気持ち的に満ちたりた思いになれた出来事だった。数学セミナーの エレガントな解答を求む の問題について、そのコーナーではなく、ノートという研究コーナーに生徒と共著で出し、掲載され原稿料を頂いた記念の原稿。

数学的活動という言葉がぴったり当てはまるのではないかと思っている。求められている方向での回答が得られなくても、別の角度から要請に近い解決に迫ることができ、楽しく充実した時間を過ごせた思い出深いものであった。また、新学習指導要領(案)“第3款：各科目にわたる指導計画の作成と内容の取扱い”の3「・・・次の事項に配慮するものとする」とあり、その(3)で

自らの考えを数学的に表現し根拠を明らかにして説明したり、議論したりすることとある。数学の大切なところに光が当てられていると思ってこの(3)を見ている。当時、共著の生徒と“何を以て正三角形に近づくという判断ができるか”ということについて考え、そのことを決めた後、それまでに身に付けている技術でどうアプローチするかを二人で考えたのを覚えている。その当時の他の生徒とのやりとりをプリントには再現しておいた。

作図不能問題 / ラグランジュ・出張途次の問題作り

これらはいずれも授業をしなくなつてからのもので、生徒に直接渡すことを想定しては作っていない。教材開発、特に問題作成をどうするかという点で参考にさせていただいたり、自分が大学時代にし残した分野の勉強をする際の参考にして頂ければありがたい。

### 3 教師自身が学ぶ姿勢を

『何故、虹はあんなにきれいで、いつも丸くかかり、いつも7色なんだろう』という興味・疑問を持つ生徒よりも、虹を1度も見たことが無く興味も何もなくても、百科事典か参考書を読んで『ブリズムの原理で、…』と知っているだけで、その生徒をよし、とし過ぎていないか。

数学教育は、他の科学などの計算処理のための計算処理技術習得を図るという目的と、数学(科学)する心を伝えるという役目を持っている。前者については演習を通しての練習ということになるが、後者はやはり教師自身が数学(科学)する心を日頃から持っていないといけないのではないかと思う。そのために、数学史を読んでみる、グループで数学書の輪読会を開く、その他色々ある。確かに、“生徒指導・進路指導に時間をとられてそれどころではない”ということもあるかと思うが、できる限りの範囲で教師自身が数学そのものの中で自分自身を伸ばして行かないといけないのではないか。

教科書がこなせれば、入試問題がこなせれば、…、それで教師の役目が済むのではない。

今から約10年ほど前のことを話しておきたい。私は東京国立博物館で横山大観の「無我」という画を見ていた。小学生が何人か展示室に入ってきた。皆、手にノートとシャープペンシルを持っている。展示室入り口入ってすぐの壁に解説版がある。小学生達は解説版の所に行き、一心不乱に書き写した。写し終わると、皆で別の展示室に移動して行った。驚いたことに、どの子もその室の作品をひとつも見ずに移動していった。この子達は夏休みあけにノートを提出し、先生から「名画を見て、素晴らしい経験をしましたね」と褒められるんでしょう。非常に哀しい思いをした。

教師は自分の教科で自分を鍛えなければ、手を多くの回数あげるだけで自分は積極的に授業に参加していると思ってしまう児童生徒か、本当にその教科としてよいものを持った児童生徒かの判断ができないのではないかと思う。

最後に、かつて週刊朝日百科の『日本の歴史』という雑誌を読んでいて次のような文章に出会った。

週刊朝日百科『日本の歴史』58

古代から中世へ③<境・峠・道>中世への旅3-95頁

柳田国男「旅人のために」と題する講演から

「郷土の美点を世に紹介するということは口癖であるが、それには先ず自分たちが自ら其美点を知って居なければならぬ。それよりも更に適切なことは、之に伴う欠点をも気づくこ



とである。欠点は大抵は改められるものであって、人が風景を良くする最も手軽な著（着）手でもある。たとえば所謂観光道路が、終点にばかり急ぐのは不経済な話である。幾ら早く走ってももし来る路が退屈であれば、遠い処は必ず近い処に負ける。だから近路を作るよりも、みてあるかれる路を考えることが必要である」 『豆の葉と太陽』から