

北数教 “第 94 回数学教育実践研究会”

わかってる・知ってる  
でも説明できる？

レポート

平成 27 年 10 月 3 日 (土)

札幌市立札幌大通高等学校 視聴覚教室

千歳科学技術大学 安田富久一

### 【 当たり前 】

この春、当たり前やから使ってたけど、ほんまにそうか？ と思うことがあった。“実際に確かめた（証明した）ことなかった”ような気がする。他の人はどうなんやろと思うて、数人の学生に聞いてみたらすぐに説明が帰ってこなかった。それを紹介する（問題1）。

さらに、以前数実研で口頭説明のみで話したことがあるものも併せて書いておく（問題3）。

### 【 本当に一番遠い？ 】

ある図形の問題の解答の途中で A さんは、『中心  $O$  半径 1 の円がある。点  $O$  から距離 1 離れた所に点  $O'$  がある。点  $A$  は点  $O'$  から距離が  $\frac{1}{2}$  以内にある。このとき点  $A$  は円  $O$  の外部にはない。』という話をした。それは本当かと尋ねたら、A さんは『円  $O'$  上の点で円  $O$  の中心  $O$  から最も遠くにある点は、直線  $OO'$  と円  $O'$  との共有点のうち点  $O$  から遠い方の点であり、その  $O$  からの距離は  $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$  であり、円  $O$  の半径より小さいので、当然円  $O$  の外部にはない』と答えた。そこで問題

### 【 問題 1 】

『円  $O'$  上の点で点  $O$  から最も遠くにある点は、直線  $OO'$  と円  $O'$  との共有点のうち点  $O$  から遠い方の点である』というのは本当か？

### 【 反例は知ってるけど？ 】

流石に次の問題、反例をすぐに答えられるけれど、証明は・・・の生徒が多い。

### 【 問題 2 】 大きい方どうし

命題：『 $a > b, c > d \implies ac > bd$ 』に関して以下の事柄に沿って答えよ。

- (1) 命題が真なら証明せよ（この場合以下の事柄は考えなくて良い）。
- (2) 命題が偽なら、この命題を修正して真となる命題を提示せよ。
- (3) 提示した命題が真であることを証明せよ。

### 【 下に凸ってどういう意味？ 】

高校 1 年の時に数 1 の 2 次関数で“下に凸”や“上に凸”という言葉が出てくる。ある教科書にはこう書いてある：『上に開いた形の放物線は下に凸であるといい、下に開いた形の放物線は上に凸であるという』。

これは“下に凸”という語の定義ではない。結局これでは下に凸ということについては何も語ってはいない。数 III では、 $f''(x)$  の正負による定義が書かれてあり、その後、グラフ上のどの 2 点を取っても、その 2 点を結ぶ線分の方がグラフよりも上にある・・・、という事実のみが書かれている。

### 【 問題 3 】

- (1)  $y = f(x)$  のグラフが区間  $a \leq x \leq b$  で“下に凸”であるということの定義を（微分を使わないで）述べよ。
- (2) 上の定義に従って  $y = x^2$  は下に凸かどうか確認せよ。
- (3) 微分可能性は十分にある関数  $f(x)$  について、次の命題 (A),(B) は同値であることを示せ。
  - (A)  $f''(x) > 0$  である。
  - (B)  $y = f(x)$  は下に凸である。