北数教“第７１回数学教育実践研究会”

解 の 個 数
Sturm 問 題

レポートの説明

日　時　　平成21年11月28日(土)

会　場　　アスティ 45 ビル 10Fセミナールーム

北海道滝川高等学校　　安　田　富久一

解の個数　(*Sturm* 問題)

1　序

多項式の方程式があったとき、指定された区間に実数解が何個存在するか、高校の授業では、微分を学習し、増減表の技術をマスターし、グラフを考えて調べる、という基本事項である。

今回のレポートは、多項式について、導関数を求める計算ができ、多項式の割り算ができればOK、というマニュアルを紹介する。

そのマニュアルが正しいかどうかの検証（証明）には、次の事実を利用する。

- $f(a) = f'(a) = 0$ と $x = a$ が $f(x) = 0$ の重解であることとは同値
- 中間値の定理：特に多項式 $f(x)$ について、x が a から b へ値を大きくしていったときに $f(x)$ が符合を変えるなら、$f(x)$ は a と b の間に必ず実数解を持つ
- $\dfrac{k}{x-a} + (\text{連続関数})$ の値は、$x = a$ を境に符号 $+$ と $-$ が入れ変わる

2　いきなり例

方程式 $x^3 - 3x^2 - x + 1 = 0$ の実数解が $-2 \leqq x \leqq 2$ に何個あるかを調べる方法を先ず紹介する。証明等は後で見るとして、どうするかという技術面だけに先ず注意してもらいたい。

step 1　$f_0(x) = x^3 - 3x^2 - x + 1$ とおく。

step 2　$f_1(x) = f_0{}'(x) = 3x^2 - 6x - 1$ とおく。

step 3　$f_0(x)$ を $f_1(x)$ で割ったときの余りに -1 をかけたものを $f_2(x)$ とおく。

$f_2(x) = \dfrac{2}{3}(4x-1)$ である。

step 4　$f_1(x)$ を $f_2(x)$ で割ったときの余りに -1 をかけたものを $f_3(x)$ とおく。

$f_3(x) = \dfrac{37}{16}$ である。

step 5　$f_0(-2)$, $f_1(-2)$, $f_2(-2)$, $f_3(-2)$ の 4 つの値の符号を調べ、その符号が変化する回数を $V(-2)$ とする。

$f_0(-2) < 0$, $f_1(-2) > 0$, $f_2(-2) < 0$, $f_3(-2) > 0$ なので、$-,+,-,+$ だから、符号は 3 回変化しているので、$V(-2) = 3$。

step 6　$f_0(2)$, $f_1(2)$, $f_2(2)$, $f_3(2)$ の 4 つの値の符号を調べ、その符号が変化する回数を $V(2)$ とする。

$f_0(2) < 0$, $f_1(2) < 0$, $f_2(2) > 0$, $f_3(2) > 0$ なので、$-,-,+,+$ だから、符号は 1 回変化しているので、$V(2) = 1$。

step 7　$V(-2) - V(2) = 3 - 1 = 2$ となるが、この値 2 が求める解の個数である。

3　準備

使用する記号等について具体例で説明する。

【スツルムの関数列】

実係数多項式 $f(x)$ に対して、$f(x)$ と $f'(x)$ により、ユークリッドの互除法で多項式の列を作る。そして、得られた余りに -1 をかけて関数列を決定する。式で示すと、次のような多項式の列 $f_0(x), f_1(x), \cdots, f_m(x)$ を $f(x)$ のスツルムの関数列と呼ぶ。

$$
\begin{aligned}
f_0(x) &= f(x) \\
f_1(x) &= f'(x) \\
f_{n-1}(x) &= q_n(x) f_n(x) - f_{n+1}(x) \quad (n = 1, 2, \cdots, m-1) \qquad (1) \\
&\qquad (\ f_{n-1}(x) \text{ を } f_n(x) \text{ で割ったときの商が } q_n(x) \text{ 余りが} - f_{n+1}(x)\ ) \\
f_{m-1}(x) &= q_m(x) f_m(x) \qquad (2) \\
&\qquad (\ \text{つまり、割り切れたところで余りを求める作業を打ち切る}\ )
\end{aligned}
$$

（注）　$f_{n-1}(x)$ を $f_n(x)$ で割って余りを得るときに、$f_n(x)$ を定数倍したもので $f_{n-1}(x)$ を割ると、商は変わっても大切な余りの方は変わらないことに注意しておく。

【$V(x)$】

有限個の実数の列 $c_1, c_2, \cdots, c_p$ の符号変化の個数、すなわち c_i のうちで 0 であるものがあればそれを取り除いて $c_{v_1}, \cdots, c_{v_q}$ とし $c_{v_j} c_{v_{j+1}} < 0$ となる $j (1 \leqq j < q)$ の個数を $\widetilde{V}(c_1, \cdots, c_p)$ で表す。

$\widetilde{V}$ を用いて、$f(x)$ のスツルムの関数列に対して

$$V(c) = \widetilde{V}(f_0(c), f_1(c), \cdots, f_m(c))$$

と定義する。

以上の準備をして、本題のスツルムの定理に移る。

4　スツルム (Sturm) の定理

【*Sturm* の定理】

方程式 $f(x) = 0$ について、$x = a, b$ がともに $f(x) = 0$ の重解ではないとき、区間 $a < x \leqq b$ にある実数解の個数は $V(a) - V(b)$ に等しい。但し、重解は 1 個と数えるものとする。

【証明の前に、まず実用例を】

実際に例を見てみる。最初は増減表が簡単にわかる

$$f(x)=x^3-3x+1$$

を例にする。

$$\begin{aligned}
&f_0(x)=x^3-3x+1\\
&f_1(x)=f'(x)=3x^2-3\\
&\qquad f_0(x)=\frac{1}{3}xf_1(x)-(2x-1)\\
\therefore\quad &f_2(x)=2x-1\\
&\qquad f_1(x)=\frac{3}{4}(2x+1)f_2(x)-\frac{9}{4}\\
\therefore\quad &f_3(x)=\frac{9}{4}\quad (\ f_3(x)\ \text{は定数なので}\ f_2(x)\ \text{は}\ f_3(x)\ \text{で割り切れる}\ )
\end{aligned}$$

これでスツルムの関数列が得られた。これをもとに V を幾つか計算すると、

$$\begin{aligned}
V(-2)&=\widetilde{V}(-1,3,-5,\frac{9}{4})=3\\
V(-1)&=\widetilde{V}(3,0,-3,\frac{9}{4})=\widetilde{V}(3,-3,\frac{9}{4})=2\\
V(0)&=\widetilde{V}(1,-1,-1,\frac{9}{4})=2\\
V(1)&=\widetilde{V}(-1,0,1,\frac{9}{4})=\widetilde{V}(-1,1,\frac{9}{4})=1\\
V(2)&=\widetilde{V}(3,3,5,\frac{9}{4})=0
\end{aligned}$$

このことから、$V(-2)-V(-1)=1$ より、$-2<x\leqq -1$ に実数解が 1 個あることがわかる（もっとも、$x=-1$ が解でないことは明らかなので、$-2<x<-1$ に解が一つあると言う方が気持ちがよいが)。同様に、$0<x<1$ 及び $1<x<2$ にも解が一つずつあることもわかる。

このことは、微分をして増減表を元にグラフを描くとすぐわかる。

では、次に

$$4x^4-4x^3-8x^2+6x-1=0 \tag{3}$$

の正の解が何個あるか知りたければどうするかを考えてみる。増減表を利用してグラフが簡単に描けるか？　多分、微分した関数の解を求める段階で悩むことになると思う。

スツルムの方法でやってみる。V の定義を考えると、スツルムの関数列を作る割り算の各ステップにおいて、スツルムの関数列の定義中に記した注から、$f_n(x)$ の係数が分数であるなら、各分母の（正の数の）最小公倍数を $f_n(x)$ に乗じ、かつ各係数の（正の数の）最大公約数で割って、係数を整数にしたものを新たに $f_n(x)$ にして互助法を進めても構わないことに注意をしておく。出てく

る数は大きいが、

$$\begin{aligned}
& f_0(x) = 4x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 6x - 1 \\
& f'(x) = 16x^3 - 12x^2 - 16x + 6 \\
\therefore \quad & f_1(x) = 8x^3 - 6x^2 - 8x + 3 \\
& \qquad f_0(x) = \frac{1}{4}(4x-1)f_1(x) - \frac{1}{8}(38x^2 - 28x + 5) \\
\therefore \quad & f_2(x) = 38x^2 - 28x + 5 \\
& \qquad f_1(x) = \frac{1}{361}(76x-1)f_2(x) - \frac{32}{361}(103x - 34) \\
\therefore \quad & f_3(x) = 103x - 34 \\
& \qquad f_2(x) = \frac{2}{10609}(1957x - 796) - \frac{1083}{10609} \\
\therefore \quad & f_4(x) = 1
\end{aligned}$$

である。これを元に計算すると、また実際に正確な値は不要で、符号を知りたいことに注意すると

$$\begin{aligned}
V(0) &= \widetilde{V}(-1, 3, 5, -34, 1) = 3 \\
V(\infty) &= \widetilde{V}(+, +, +, +, +) = 0 \\
\therefore \quad V(0) - V(\infty) &= 3
\end{aligned}$$

より、正の解は 3 個あることがわかる。

もし、0 と 1 の間に何個あるか知りたければ、

$$V(1) = \widetilde{V}(-, -, +, +, +) = 1$$

より（$\widetilde{V}$ について、正確には $\widetilde{V}(-3, -4, 15, 69, 1)$ だが、どんな値かは不要で符号だけが興味の対象であり、$x = 1$ を代入したときの符号はきっちり計算しなくてもすぐわかるから、無駄な計算はしないのが良い)、解は $V(0) - V(1) = 2$ 個あることがわかる。

実際、(3) は

$$(2x^2 + 2x - 1)(2x^2 - 4x + 1) = 4x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 6x - 1$$

として作っておいたもので、解は

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}, \ \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

である。このうち、$0 < x < 1$ であるものは、

$$x = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}, \ \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$$

であり、確かに 2 個である。

いよいよ証明に取りかかる。

5 Sturm の定理の証明

＜証明の粗筋＞ 次の①〜④をもとにして⑤で証明が終わる。

① x の値を変化させるとき、$V(x)$ の値が変化するのは、x が $f_0(x), f_1(x), \cdots, f_m(x)$ のいずれかの多項式の解を通過するときに限る

② x が $f_0(x)$ の解の値を通過するとき、$f_0(x), f_1(x)$ 間の符合変化の値は 1 減少する。

③ x が $f_1(x), \cdots, f_{m-1}(x)$ のいずれかの解である値を通過するとき、$f_1(x), \cdots, f_m(x)$ の符合変化の値に増減の変化はない。

④ x_0 が $f_m(x)$ の解になるのは、x_0 が $f_0(x)$ の重解になる場合である（つまり、②の場合が適用)。

⑤ 最後の詰め。

上の粗筋に沿って証明を進める。

【①について】 中間値の定理から明らかである。

【②について】 x_0 を $f_0(x)=0$ の解とする。

x が増大しながら x_0 を通過するとき、$f_0(x)f_1(x)$ の符号が $-$ から $+$ に変わることを示せばよい。また、それは $\dfrac{f_1(x)}{f_0(x)}$ の符号が $-$ から $+$ に変わることを示すのと同値である。

x_0 が $f_0(x)$ の k 重解として（$k \geqq 1$）

$$f_0(x) = (x-x_0)^k \varphi(x) \qquad (\ \varphi(x_0) \neq 0\ )$$

とおくと、

$$\frac{f_1(x)}{f_0(x)} = \frac{f\,'(x)}{f(x)} = \frac{k}{x-x_0} + \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

である。右辺第 2 項は $x=x_0$ の近くでは有限値であるから、x が増大しながら x_0 を通過するとき、$\dfrac{f_1(x)}{f_0(x)}$ の符号が $-$ から $+$ に変わる。よって、②は示された。

【③について】 $x=x_0$ が $f_n(x)$ の解であるとする（$1<n<m$)。

$x=x_0$ が $f_{n+1}(x)$ の解ではない場合と解である場合に分けて考える。

$x=x_0$ が $f_{n+1}(x)$ の解ではないとき、(1) より、$f_{n-1}(x)$ は $x=x_0$ で 0 にはならず、しかも $f_{n+1}(x_0)$ と反対の符号になる。よって、$x=x_0$ の直前でも直後でも $f_{n-1}(x)$ と $f_{n+1}(x)$ は反対の符号を持つので、$f_n(x)$ の符号が何であっても、

$$\{f_{n-1}(x), f_n(x), f_{n+1}(x)\} = \{+, \pm, -\} \text{ または } \{-, \pm, +\}$$

なので、$\{f_{n-1}(x), f_n(x), f_{n+1}(x)\}$ 間の符号変化の値は 1 であり、x が x_0 を通過するとき、これら 3 つの関数間での符号変化の値に増減はない。

$x=x_0$ が $f_{n+1}(x)$ の解のとき、(1) より、$x=x_0$ は $f_0(x), f_1(x), \cdots, f_m(x)$ 全ての解になる。特にこの場合、$x=x_0$ は $f_0(x)$ の重解になる。$x=x_0$ が $f_0(x)$ の k 重解とすると（$k>1$）、$f_0(x), f_1(x), \cdots, f_m(x)$ らは全て $(x-x_0)^{k-1}$ で割り切れる。そこで、$f_0(x), f_1(x), \cdots, f_m(x)$ を全て $(x-x_0)^{k-1}$ で割って、この共通因数を取り除いた関数列を

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_{n-1}(x), \varphi_n(x), \varphi_{n+1}(x), \cdots, \varphi_m(x) \tag{4}$$

とすると、(4) においては、これらの関数が 2 つ引き続いて 0 にはならない。また、(1) から

$$\varphi_{n-1}(x) = q_n(x)\varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x) \quad (n=1,2,\cdots,m-1)$$

であるので、$x=x_0$ を解に持つものが (4) の中にあったとしても、$x=x_0$ の直前及び直後において、φ_1 から φ_m 間の符号変化の値の増減がないことは、これまでに調べたとおりである。

よって、ここで共通因数 $(x-x_0)^{k-1}$ を乗じて元のスツルム列に復元して戻っても、x_0 の直前直後の符号変化の数に影響は及ぼさないので、$f_1(x), \cdots, f_m(x)$ 間は x_0 の直前直後の符号変化の増減はなく、③は証明された。

上記後半部分の補足になるが、②で調べたように、この場合は $f_0(x)$ と $f_1(x)$ の間で符号変化の値が 1 減少し、$V(x)$ は 1 だけ減少することになる。

【④について】 (1) と (2) から明らか。

【⑤について】

以上①〜④より、$x=a$ 及び $x=b$ が $f(x)$ の解でなければ、x が a から b まで変わるとき、$V(x)$ は $f_0(x)$ $(=f(x))$ の解を通過する毎に 1 ずつ減少するだけなので、$V(a)-V(b)$ は重複度は無視して $a<x<b$ における $f(x)$ の解の個数になる。

次に、$x=a$ または $x=b$ が $f(x)$ の重解ではない解であるときは、以上の説明から $V(a), V(b)$ は a または b の直後における $V(x)$ に等しい。よって、$V(a)-V(b)$ は a の直後から b の直後までの解の個数、つまり $a<x \leqq b$ における解の個数に等しい。（Sturm の定理の証明おわり）