

北数教 “第 84 回数学教育実践研究会”

本日の料理は “多項式による近似” です

講演資料

平成 25 年 1 月 26 日 (土)

ニッケイMKビル 6F 会議室

北海道室蘭栄高等学校 安田富久一

# 1 序言

今回は発表に少しく趣向を入れさせて頂きました。ご容赦ください。“料理をご賞味頂く”というスタイルでまとめてみました。多項式による近似、という話題を軸にフルコース的に組んでみました。勿論、近似の理論は門外漢ですから、満漢全席を用意というわけにはいかないのでご容赦下さい。

# 2 メニュー

## 本日の御料理

### 多項式による近似

		頁
【食前酒】 .....	練習問題（分数式）	3
【前菜】 .....	補間	6
【スープ】 .....	ラグランジュ補間	6
【主菜】 .....	補間と近似	8
	多項式近似	8
	ワイエルシュトラスの定理	9
	ルンゲの例	??
【ご飯物】 .....	ベルンシュタインの多項式	10
【点心】 .....	練習問題（定積分）	14
【デザート】 .....	符号	15
【お土産】 .....	上記補足（厳密な証明等）	17

召しあがって頂く前に、本日の御料理の説明をさせて頂きます。

- 【食前酒】 分数式を用意させて頂きました。  
ここで、少し気持ちよく酔って頂きます（酔いの余韻が後の食事を美味しくしてくれます）。
- 【前 菜】 補間という言葉の定義と定理を紹介します。  
紹介する定理と関係の深い高校の教科書等によくある問題をみます。
- 【ス ー プ】 有名なラグランジュ補間です。  
非常に出汁が利いていて美味しく味わっていただけたと思います。
- 【主 菜】 補間と近似・多項式近似・ワイエルシュトラスの定理・ルンゲの例、メイン料理です。  
ここでこれらの主菜の様々な味を楽しみ、次のご飯物でしっかり満腹感を満たしていただくように、今回のコース料理をコーディネートしました。
- 【ご 飯 物】 ベルンシュタインの多項式を課題研究風味に味付けしました。  
本料理で一番満腹感を感じていただく料理です。実は、主菜はこのご飯を美味しく味わうための料理です。
- 【点 心】 ご飯物に添えた定積分の手頃な練習問題です。  
一般的にはベータ関数の特別な場合に相当するものを、自然数の場合に限って、高校生レベルの問題になっています。漸化式も登場します。
- 【デザート】 符号の理論の話題を紹介します。  
これまで召し上がっていただいた料理とは全く関係のない、スイーツは別腹的トピックです。データを伝えるときに、“データが途中少し変わっても元データが何であるか分かるには”という情報伝達についての話しを紹介합니다。これは例えば音楽 CD について、「CD 表面に傷がついてデジタルデータに少し損失が生じても、傷がついていない元々の CD に保存された音楽と同じ音楽が再現される」という実用性の問題の簡易版になっています。
- 【お 土 産】 正しくお土産です。

### 3 食前酒（練習問題 分数式）

ここでは、今回のレポート「多項式による近似」の前半で活躍する式・証明に使う技術を含むことを、練習問題として解いてみて欲しい。

問題 1  $\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$  を簡単にせよ。

生徒はこの問題を次のように解答すると思う。

$$\begin{aligned} & \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} \\ = & \frac{-(b-c)(x-b)(x-c) - (c-a)(x-c)(x-a) - (a-b)(x-a)(x-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ = & \frac{-\{(b-c) + (c-a) + (a-b)\}x^2 + \{(b^2 - c^2) + (c^2 - a^2) + (a^2 - b^2)\}x}{(a-b)(b-c)(c-a) - (b-c)bc - (c-a)ca - (a-b)ab} \dots\dots (1) \\ = & \frac{(c-b)a^2 + (b^2 - c^2)a - bc(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \dots\dots\dots (2) \\ = & \frac{(c-b)\{a^2 - (b+c)a + bc\}}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ = & \frac{(c-b)(a-b)(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \dots\dots\dots (3) \\ = & 1 \end{aligned}$$

(1)の所で、「おっ！  $x^2$  と  $x$  の係数があっさり 0 になった」という感じがするのではないだろうか。(2)~(3)の因数分解（または分母を展開するのもあり得るが）の練習問題として使えるが、それ以上に次のような視点を養える問題だと思う。

【教材として活用する視点】 感覚を感覚で終わらせず、昇華させる

- (1) で得た感覚を自分で問い直す
- $x$  がなくなったという感覚は、 $x$  の式だと思って整理したからこそのサプライズ
- $x$  が無くなったということは、 $x$  の式としては定数であるということ
- 定数ということは、 $x$  に何でもいから代入したらそれが式の値になる
- $x = a$  を代入すると  $\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}$  は 1 に、 $\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$ ,  $\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$  は共に 0 なので、式の値は 1

計算するばかりでなく、このような物の見方を利用して判断する、という能力を養う教材として活用できるのではないだろうか。

今示した方法を更に見つめると、次のような解答になる。

【ほとんど計算しないですます解答】

$$f(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

とおく。  $f(a) = f(b) = f(c) = 1$  である。ここで、 $x$  の多項式  $f(x) - 1$  は 2 次以下の式で、3 つの値  $a, b, c$  を代入して 0 になる。よって、 $f(x) - 1$  は 0 と恒等的に等しい。つまり、与えられた式を簡単になると 1 になる。

実は上記のような教材開発の参考例として紹介するのが“食前酒”として味わって頂く目的ではない。この分数の式の作り方を味わって頂こうというのが本来の目的である。問題の分数式の作り方をこれから述べよう。

問題の分数式は次のようなルールで作ってある。

- (1) 3 つの数  $a, b, c$  があつたとする。
- (2) 3 つの数のうち 2 つを解に持つ式を全て考える

$$(x-b)(x-c), (x-c)(x-a), (x-a)(x-b)$$

- (3) 今作った 2 次式それぞれを、解として出てこない数を代入し、それで 2 次式を割る

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}, \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}, \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

- (4) 今得た式を全てたして問題とした。

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

この式の作り方は何も 3 つの数でなくても、何個あっても作れる。そこで、次のような問題も作れることになる。

問題 以下の各問の式を簡単にせよ。

$$(1) \quad \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

$$(2) \quad \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)} \\ + \frac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

$$(3) \quad \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0) \cdots (x-x_{k-1})(x-x_{k+1}) \cdots (x-x_n)}{(x_k-x_0) \cdots (x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1}) \cdots (x_k-x_n)}$$

(1)~(3) どの答えも 1 であることは、先ほどの証明と同様で簡単だ。関数の作り方・記号等、今後のこともあるので、念のために (3) について関数記号も用意しながら証明をみておこう。

【(3) の証明】

$x = x_0, x_1, \dots, x_n$  を解に持つ  $n + 1$  次式  $Q(x)$  を考える。

$$Q(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

この  $Q(x)$  から  $k$  番目の因数  $x - x_k$  を取り除いた  $n$  次多項式を  $q_k(x)$  とおく。

$$q_k(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n) \quad \left( q_k(x) = \frac{Q(x)}{x - x_k} \right)$$

また、 $p_k(x)$  を

$$p_k(x) = \frac{q_k(x)}{q_k(x_k)} = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)} \dots\dots\dots (4)$$

とおく。このとき、問題 (3) の式を  $\ell(x)$  とおくと、 $\ell(x) = \sum_{k=0}^n \frac{q_k(x)}{q_k(x_k)}$  である。 $L(x) = \ell(x) - 1$

とおくと、 $L(x)$  は  $n$  次以下の多項式である。また、明らかに  $L(x_0) = L(x_1) = \dots = L(x_n) = 0$  であり、 $L(x)$  は異なる  $n + 1$  個の値で 0 となる。よって、 $L(x)$  は恒等的に 0 に等しい。

$$\therefore \sum_{k=0}^n \frac{q_k(x)}{q_k(x_k)} = 1$$

ところで、この証明を知らないでこの問題を解くとすると数学的帰納法で 1 になることを証明しようとするのでしょうか？ できそうですか。

## 4 前菜 (補間)

補間 (*interpolation*) :

関数  $f(x)$  が未知であるが、その  $n$  個の点  $x_1, \dots, x_n$  における値  $y_1, \dots, y_n$  が知られているとき、

$$g(x_1) = y_1, \dots, g(x_n) = y_n$$

となるような関数  $g(x)$  を求めて  $f(x)$  の代用とすることを、補間と言い、 $g(x)$  を補間公式という。

[ 岩波 数学入門辞典より ]

特に多項式による補間に限ると、次の定理があります。

【補間定理】

$n + 1$  個の異なる点で、定められた値をとる  $n$  次以下の多項式が一意的に存在する。

高校数学の次の基本問題は、大げさに言うところの補間定理に基づくものと見るすることができます。

【問題】

$f(x) = ax^2 + bx + c$  について、 $f(-2) = 1, f(1) = 3, f(5) = -2$  となるように、定数  $a, b, c$  の値を定めよ。

この問題のように  $n = 2$  の場合について、具体的な数が入っていない一般化をして、 $f(x)$  の求め方の概略を示そう。一般の  $n$  の場合にもこの解き方を使えば補間定理が証明されることになる。その一般の場合の証明については、本資料の最後 17 ページに今日の料理のお土産として付けてあります。

【問題の解答（3種）について】

$x_0, x_1, x_2$  は相異なる 3 とする。 $y_0, y_1, y_2$  が与えられたとき、 $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$  を満たす 2 次以下の多項式  $f(x)$  を見つける方法を示す。

【(Vandermonde) ヴァンデルモンド流】

$f(x) = a + bx + cx^2$  とすると、 $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$  は

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

左辺の 3 次正方行列は *Vandermonde* の行列で逆行列を持ち  $a, b, c$  が決まる。

【(Newton 流)】

$$f(x) = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)(x - x_1)$$

この両辺に  $x = x_0, x_1, x_2$  を代入すると、

$$\begin{cases} a = y_0 \\ a + (x_1 - x_0)b = y_1 \\ a + (x_2 - x_0)b + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)c = y_2 \end{cases}$$

である。上の式から順に  $a, b, c$  が順に決まっていくのは明か。

【(Lagrange 流) ラグランジュ補間公式】

$$f(x) = \frac{a(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{b(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{c(x - x_3)(x - x_1)}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)}$$

$a, b, c$  は計算の必要はなく、見事に  $a = y_0, b = y_1, c = y_2$  なのである。

## 5 スープ（ラグランジュ補間）

*Lagrange* 流の補間について、説明を“スープ”として味わって頂くように用意しました。ラグランジュの補間公式による補間定理の証明を紹介しましょう。

【補間多項式の存在の確認】

$n + 1$  個の値  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ ) 及び  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$  が与えられているとき

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, \dots, f(x_n) = y_n$$

を満たす  $n$  次以下の多項式の存在を以下のように構成することで示す。

$$(1) Q(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) : n + 1 \text{ 次多項式}$$

$$(2) q_k(x) = \frac{Q(x)}{(x - x_k)} : n \text{ 次多項式 } (k = 0, 1, \dots, n)$$

$$(3) p_k(x) = \frac{q_k(x)}{q_k(x_k)} : n \text{ 次多項式 } (k = 0, 1, \dots, n)$$

このように構成した  $q_k(x), p_k(x)$  は次のような顕著な性質を持つ。

【 $q_k(x), p_k(x)$  の性質】

$$(1) x_k \text{ だけに反応する } q_k(x) \cdots \begin{cases} q_k(x_k) \neq 0 \\ q_k(x_i) = 0 \quad (i \neq k) \end{cases}$$

$$(2) x_k \text{ だけに単位として働く } p_k(x) \cdots \begin{cases} p_k(x_k) = 1 \\ p_k(x_i) = 0 \quad (i \neq k) \end{cases} \quad \langle q_k(x) \text{ の規格化} \rangle$$

この  $p_k(x)$  を用いて、 $P_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k p_k(x)$  とおくと、 $P_n(x)$  は  $n$  次以下の多項式であり、

$$P_n(x_k) = y_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

を満たし、 $f(x)$  の補間多項式であることが分かるのである。なぜなら

$$\begin{aligned} P_n(x_k) &= y_0 p_0(x_k) + \cdots + y_{k-1} p_{k-1}(x_k) \\ &\quad + y_k p_k(x_k) \\ &\quad + y_{k+1} p_{k+1}(x_k) + \cdots + y_n p_n(x_k) \\ &= y_k \quad (\because p_k(x) \text{ の性質}) \end{aligned}$$

だからである。

この  $P_n(x)$  をラグランジュの多項式と呼ぶ。

- 補間多項式の存在は確認された。
- 補間多項式はたくさんあるのか。
- 実は、補間多項式は 1 つしかない。

補間多項式が一つしかないのは、*Vandermonde* 流に考えれば明らかだが、もっとカッコイイ (?) 示し方がある。食前酒の余韻が残っているでしょうか。

【証明】

$P(x), \bar{P}(x)$  は共に  $n$  次以下の補間多項式とし、 $L(x) = P(x) - \bar{P}(x)$  とおく。 $L(x)$  が恒等的に 0 であることを示せば、補間多項式は一つであることが示せたことになる。もし、恒



等的には0とはならないとすると、方程式  $L(x) = 0$  を考えると、 $n$  次以下の方程式であるが、この方程式は  $n + 1$  個の解  $x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  を持っている。これは矛盾である。よって、 $L(x)$  は恒等的に0であることがわかり、補間多項式は一つであることが示された。

この事実から、Newton 流・Lagrange 流、どれも整理すると全て Vandermonde 流の式になることがわかる（単に、展開して降べきの順に並べたらどれも同じ式になる、と言っているだけ）。

## 6 主菜（多項式と近似）

### 6.1 補間と近似

補間と関数の近似の関係を見ていきます。閉区間  $I = [0, 1]$  上の連続関数  $f(x)$  について考えます。区間  $I$  の  $n$  等分点  $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \dots, 1$  を  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  とおいておきます（但し、 $x_k = \frac{k}{n}$   $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ）。この  $n$  等分点に対応する  $y = f(x)$  上の点を

$$(x_0, y_0), \dots, (x_k, y_k), \dots, (x_n, y_n) \quad \text{但し } y_k = f(x_k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

とおいておきます。

この  $n + 1$  個の点を通る 7 ページでその存在を保証したラグランジュ多項式を  $P_n(x)$  とします。分点を多く取ると  $P_n(x)$  は  $f(x)$  を近似していると期待できます。

$P_n(x)$  は、ラグランジュの補間公式から

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^n f(x_k) p_k(x) \\ &= f(x_0) p_0(x) + f(x_1) p_1(x) + f(x_2) p_2(x) + \dots + f(x_n) p_n(x) \end{aligned}$$

です。

$n$  を十分大きく取ることによって、この  $P_n(x)$  は  $f(x)$  の近似に必ずなるか、ということが課題になる。このことはひとつ後の“6.3 ワイエルシュトラス (Weierstrass) の定理”との関わりで、興味深い話を紹介しよう。その前に、近似ということについていくつか話題を見ておこう。

### 6.2 多項式近似

関数を多項式で近似することを考えたい。6.1 の補間と近似で見たように、 $f(x)$  を  $n$  等分した点をぴったり通る  $n$  次以下の多項式があり、しかもその多項式を作るマニュアルが分かっている。 $n$  を大きな値に取れば、好きなだけ細かい間隔にできるから、それらの点を通る多項式はほぼ元のグラフと近いグラフ、つまり  $f(x)$  の近似になっているだろう。

関数を多項式で近似することについてすぐに頭に浮かぶのはテイラー展開だ。ただこの場合、元の関数に微分可能性という強い制約が課せられる。

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

を思い出すと、テイラー展開は  $n$  階までの微分可能性がなければ、 $n$  次多項式が得られないことになる。

テイラー展開という多項式に比べて補間で作る多項式は、微分可能性が不必要なことだ。事実、ラグランジュの補間多項式は

$$f(x_0)p_0(x) + f(x_1)p_1(x) + f(x_2)p_2(x) + \cdots + f(x_n)p_n(x)$$

であり、微分可能ではない関数  $f(x)$  でも作ることが出来る  $n$  次以下の多項式になっている。どんな連続関数でも、この補間多項式で近似できると、テイラー展開にはない良さがあることになる。補間多項式が必ず近似になっていることを示したくなる。しかも、多項式近似について歴史的にも有名なワイエルシュトラスの定理がある。

### 6.3 ワイエルシュトラス (Weierstrass) の定理

連続関数と近似多項式の関係について、次に紹介するワイエルシュトラスの定理は有名である。

【ワイエルシュトラスの定理】

有限閉区間上の連続関数は、任意の精度で多項式によって近似できる。

である。これを  $\epsilon - \delta$  流を使わずに、高校レベルで言い換えれば次のようになる。

【ワイエルシュトラスの定理】

閉区間  $[a, b]$  でのどのような連続関数  $f(x)$  にも、次のような多項式の列  $\{f_n(x)\}$  が存在する。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - f_n(x)| = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

当然これまでの流れから、 $f_n(x)$  として  $f(x)$  の補間多項式  $P_n(x)$  をとればいいんじゃないかという予測がたつ。この予想に関して、そうは簡単にいかない、というのが次のルンゲにより得られた例である。

### 6.4 ルンゲの例

ルンゲは、閉区間  $[0, 1]$  での連続関数  $f(x) = |x - \frac{1}{2}|$  についての補間多項式  $P_n(x)$  については、

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - f_n(x)|$$

は 0 に収束しないことを示した。これは、微分不可能な点がある例だが、何階でも微分可能であったとしても、0 に収束しない例としてルンゲは  $f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$  を挙げている。

このルンゲの例から、補間多項式は必ずしもワイエルシュトラスの定理に言う  $f_n(x)$  であってくれないとは限らないことがわかったことになる。では、ワイエルシュトラスの定理に言う  $f_n(x)$  を見つけることは可能だろうか？

次に  $f_n(x)$  を見つけるマニュアル作成に取り組んでみたいと思う。それが次節のベルンシュタインの多項式である。

## 7 ご飯物 (ベルンシュタイン (Bernstein) の多項式)

### 7.1 課題の設定

前節末で述べたように、この節ではワイエルシュトラスの定理に言う  $f_n(x)$  を具体的に見つけた。ここでは、高校生にも非常に見やすい多項式であるベルンシュタイン多項式を紹介する。紹介すると言っても、“ベルンシュタイン多項式をすぐに見せて、これがワイエルシュトラスの定理に言う  $f_n(x)$  になっている”という紹介の仕方ではなく、課題研究的アプローチ風味の味付けで紹介したい。つまり、造り上げる、見つけていく、というスタイルで迫ることにする。

全く真新しいところから物を考えるより、これまでに知っている方法をアレンジするというのは問題解決方法としてよく使われる手法だ。そこで、ラグランジュの補間多項式の方法を少し真似て改造してみたい。ラグランジュ多項式  $P_n(x)$  は

$$P_n(x) = f(x_0)p_0(x) + f(x_1)p_1(x) + \cdots + f(x_n)p_n(x)$$
$$x_k = \frac{k}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

だった。この  $P_n(x)$  の雰囲気を実似ようと思う。真似方はいろいろあるだろうが、近似多項式  $f_n(x)$  を

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) w_{n,k}(x)$$

のような形で作ろう、という真似の仕方を考えてみる。つまり、 $f_n(x)$  が (5) を満たすようにするには  $w_{n,k}(x)$  はどのように作ればいいのかということ課題に取り組む事にする。

課題として取り組むと、「いろいろ仮説を立てて検証し、その中で気づく不具合、不適合、不都合等の処理をするためにまた新たに仮説を立てて検証する」という研究作業を続けて、ようやく何かの成果が得ることになる。それが課題研究の醍醐味だと思う。

ここで紹介するのは、その一つの流れの紹介でしかないことをお断りしておきたい (同じ料理を作っても、料理人さんが違えば、また季節やその日の天候が違えば味付けが違ってしまうように)。

### 7.2 ラグランジュ補間の良さと悪さ

ラグランジュ多項式  $P_n(x)$  の近似という意味での“良さと悪さ”について反省を加えることで  $w_{n,k}(x)$  作成での課題を浮き彫りにしたい。次のような良さ悪さがある

- ①  $p_k(x_k) = 1, p_k(x_i) = 0$  という性質により、 $P_n(x)$  は各  $x_k$  で近似どころか  $f(x)$  と一致。  
$$P_n(x_k) = f(x_k)$$
- ②  $p_k(x)$  は  $x = x_k$  から遠くにある  $x$  での雑音を拾う可能性がある ( $x_k$  から離れたところの  $x$  での  $f(x)$  の値が  $P_n(x_k)$  の値に大きく影響を及ぼす可能性がある)。
- ③  $p_k(x)$  は山と谷がひどく出現して雑音を拡大しそう

(講演当日はプレゼンでグラフを見て視覚的に説明を加えた。“HP 数学の泉”に当日プレゼンを掲載してもらっているので参照して下さい)。

①は誤差ゼロということで、究極の良さを示している。しかし、②,③は近似としては有り難くない。多分、ルンゲの例が (5) を満たさないのは、このせいではないかと予想できる。

### 7.3 $\{w_{n,k}(x)\}_{k=0,1,2,\dots,n}$ に課したい条件

大前提としてルンゲの例がある限り、 $f_n(x)$  としてラグランジュの補間多項式は捨てないといけない。ということは、補間定理 (5 ページ) から各分点  $x_k$  で  $f(x)$  と値が一致する  $n$  次以下の多項式は補間多項式になってしまうので、一致しなくても良い、と条件を弱くする必要がある。

- $u_n(x)$  が  $x_k$  で  $f(x)$  と一致するという足かせを解く
- $w_{n,k}(x_k) = 1$  や  $w_{n,k}(x_i) \neq 1$  であるかどうかは気にしない

つまり、「近似はあくまでも近いということであり、同じ値であるという必要性は全くない」という当たり前のことを確認しただけである。自由度を広げるということは数学でよくやる手法であるが、もっともここではそうしなければ不可能だということが、ルンゲの例で分かっているのでなおさらである。

以上より  $w_{n,k}(x)$  について要求したいことが感覚的に次のようになる。

- $x = x_k$  から離れた区間の端点で 0

(2) に言う単峰関数とは、極大点がただ一つあり、その極大点の両側で狭義単調である関数のことを言う。これを数学で取り扱えるようにもう少し具体的な課題条件に書き換えてみたい。 $n$  次以下の多項式の列  $\{w_{n,k}(x)\}_{k=0,1,2,\dots,n}$  を次のように決められるだろうか。

【 $w_{n,k}(x)$  に課す具体的条件】

- (1) 0 以上の値をとる単峰関数である :  $I = [0, 1]$  で  $w_{n,k}(x) \geq 0$ 。
- (2)  $I$  における極大点は  $x = x_k$  の所にある。
- (3)  $k \neq 0, n$  のとき  $I$  の端点で 0 になる :  $w_{n,k}(0) = w_{n,k}(1) = 0$ 。
- (4)  $w_{n,0}(1) = 0$  ,  $w_{n,n}(0) = 0$ 。
- (5) 9 ページの (5) を満たす。

条件最後の (5) をもっと  $w_{n,k}(x)$  のグラフ的イメージに訴える条件を設定することもできる。例えば、(5) の代わりに次の (5)' を考えても同じ結果が得られる。

(5)' どの  $w_{n,k}(x)$  の大きさ ( $x$  軸とで囲まれる面積) も同じ。

これについては 18 ページで説明する。

### 7.4 $\{w_{n,k}(x)\}_{k=0,1,2,\dots,n}$ を見つけよう

上の条件を満たす多項式として (1)~(4) を見てすぐに単純に頭に浮かぶのは、 $a, b, c$  を定数として

$$w_{n,k}(x) = ax^b(1-x)^c \quad (b+c=n) \dots\dots\dots (6)$$

である。定数  $a, b, c$  を  $n, k$  の式で書けないか、という課題に取り組んでみたい。

$b+c=n$  なので、もう一つ  $b, c$  に関する式があれば連立方程式として解けるのはすぐに思い浮

かぶ。そこで、単峰が  $x = x_k$  の所にあることから

$$\begin{aligned} w_{n,k}'(x) &= abx^{b-1}(1-x)^c - acx^b(1-x)^{c-1} \\ &= a\{b - (b+c)x\}x^{b-1}(1-x)^{c-1} \\ w_{n,k}'(x_k) &= a\{b - (b+c)x_k\}x_k^{b-1}(1-x_k)^{c-1} \\ \therefore \frac{b}{b+c} &= x_k = \frac{k}{n} \end{aligned}$$

ところで  $b+c=n$  なので

$$\begin{aligned} b &= k \\ \therefore c &= n - b = n - k \\ w_{n,k}(x) &= ax^k(1-x)^{n-k} \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

となる。

あとは  $a$  を  $n, k$  の式で表すことを考えたいが、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - f_n(x)| = 0$  を活かすためにどうするか？ 課題研究風味仕立てでやってみよう。

- 近似になっているなら  $\int_0^1 u_n(x) dx \doteq \int_0^1 f(x) dx$  であって欲しい

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_n(x) dx &= \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \int_0^1 w_{n,k}(x) dx \\ \int_0^1 f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 w_{n,k}(x) dx = 1$$

- $\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k} dx$  が求まれば何とかかなりそうだ。
- $\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k} dx = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n C_k}$  はそれほど難しくはない。

(この定積分を求める問題は後で点心として味わって頂く)。

- $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 w_{n,k}(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{a}{n C_k} (= 1)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$  なので、単純に考えれば  $a = n C_k$  として OK なら儲け物。
- そこで、

$$w_{n,k}(x) = n C_k x^k (1-x)^{n-k} \dots\dots\dots (8)$$

とおいてうまくいくかどうか確認してみよう。

- つまり、 $u_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) n C_k x^k (1-x)^{n-k}$  として

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = f(x) \dots\dots\dots (9)$$

を示すことができればよい！

実は、(9) を示すことができる。証明には一様連続性を使うことになるので、高校段階としては感覚的におおらかに理解することにしよう。厳密な証明を知りたいければ、たとえば次の書物等をご覧願いたい。

高木貞治 著 「解析概論」 岩波書店 第6章の78.Weierstrassの定理  
(改定第3版 2008年2月15日 第31冊発行 では 284ページ)

### 7.5 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = f(x)$ の証明 (1の分解)

(8) の  $w_{n,k}(x)$  は、 $p_n(x)$  がラグランジュの多項式の構成で基本的役目を果たした

$$p_0(x) + \cdots + p_{k-1}(x) + \cdots + p_n(x) = 1$$

のような性質を持っている。実際に調べてみると

$$\begin{aligned} & w_{n,0}(x) + \cdots + w_{n,k}(x) + \cdots + w_{n,n}(x) \\ &= {}_{n,0}C(1-x)^n + \cdots + {}_{n,k}C_x^k(1-x) + \cdots + {}_{n,n}C_x^n \\ &= \{(1-x) + x\}^n \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。特に  $w_{n,k}(x)$  は  $0 \leq w_{n,k}(x) \leq 1$  でもあるので、『1の分解』という性質を持っている。

(1の分解：定義は18ページを参照)。

この性質を利用して  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = f(x)$  が示される。以下に上記性質の効用が現れる部分に焦点を当てて見てみよう (前ページでも述べたように、あくまでもおおらかな説明である)。

$$\begin{aligned} f(x) - u_n(x) &= f(x) \sum_{k=0}^n w_{n,k}(x) - \sum_{k=0}^n f(x_k) w_{n,k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \{f(x) - f(x_k)\} w_{n,k}(x) \cdots \cdots \cdots (10) \end{aligned}$$

- $k = i, i+1, \dots, j$  のときの  $x_k$  が  $x$  の近くにあるとする。
- 近くにあるので  $|f(x) - f(x_k)| < \varepsilon$  ( $k = i, i+1, \dots, j$ ;  $\varepsilon$  は十分小さな数) となる。
- (10) の  $\sum_{k=0}^n$  について、 $\sum_{0 \leq k < i} + \sum_{i \leq k \leq j} + \sum_{j < k \leq n}$  に分けて考える。
- $\left| \sum_{i \leq k \leq j} \{f(x) - f(x_k)\} w_{n,k}(x) \right| \leq \sum_{i \leq k \leq j} |f(x) - f(x_k)| w_{n,k}(x) \leq \varepsilon \sum_{i \leq k \leq j} w_{n,k}(x)$
- $\sum_{i \leq k \leq j} w_{n,k}(x) \leq \sum_{k=0}^n w_{n,k}(x) = 1$  なので、 $\left| \sum_{i \leq k \leq j} \{f(x) - f(x_k)\} w_{n,k}(x) \right| \leq \varepsilon$
- $0 \leq k < i$  や  $j < k \leq n$  である  $k$  については、 $x$  と  $x_k$  は離れているので、 $w_{n,k}(x)$  の値が小さい。

という具合に近似になっている。

私はこの様子に、1の分解で  $x_k$  の近くを<sup>にじ</sup>滲ませて近似したようなイメージを感じている。

## 8 点心（定積分を求める問題）

『7.4  $\{w_{n,k}(x)\}_{k=0,1,2,\dots,n}$  を見つけよう』の12ページで予告済みの点心を味わいましょう。それは、

$$\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k} dx$$

を求める問題です。

これは、次のように小問に分けると実力テストや入試問題レベルである。

**【問題】**  $n, k$  を0以上の整数であり、 $n \geq k$  とする。 $\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k} dx$  について、以下の問いに答えよ。

(1)  $a(n, k) = \int_0^1 x^k(1-x)^{n-k} dx$  とおき、 $a(n, k), a(n, k-1)$  の間に成り立つ漸化式を求めよ。

(2)  $\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k} dx$  を求めよ。

**【解答】**

(1)  $n > k$  のとき、

$$\begin{aligned} a(n, k) &= \left[ \frac{1}{k+1} x^{k+1}(1-x)^{n-k} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{n-k}{k+1} x^{k+1}(1-x)^{n-(k+1)} dx \\ &= \frac{n-k}{k+1} a(n, k+1) \\ \therefore a(n, k+1) &= \frac{k+1}{n-k} a(n, k) \end{aligned}$$

(2) このことから、 $n > k$  のとき

$$\begin{aligned} a(n, k) &= \frac{k}{n-k+1} a(n, k-1) \\ &= \frac{k}{n-k+1} \cdot \frac{k-1}{n-k+2} a(n, k-2) \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \frac{k(k-1)\cdots 1}{(n-k+1)(n-k+2)\cdots n} a(n, 0) \\ &= \frac{k(k-1)\cdots 1}{(n-k+1)(n-k+2)\cdots n} \int_0^1 (1-x)^n dx \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{1}{n C_k} \end{aligned}$$

$$\text{よって、} \int_0^1 x^k(1-x)^{n-k} dx = \frac{1}{n+1} \frac{1}{n C_k}$$

## 9 デザート：符号（デジタルの世界を味わう）

これからの話題はこれまでの話とは関係なく読んでいただこう。口直しにといったようなトピックを味わっていただければ幸いである。内容としては、『符号の理論』と呼ばれるものである。

偶数全体を代表して 0 と表し、奇数全体を代表して 1 と表すことにする。

$$\begin{array}{cccc} 0+0=0 & 0+1=1 & 1+0=1 & 1+1=0 \\ 0\times 0=0 & 0\times 1=0 & 1\times 0=0 & 1\times 1=1 \end{array}$$

という計算になる。これは、足し算かけ算では

- 奇数を奇数個たしたら奇数
- 奇数を偶数個たしたら偶数
- 偶数は何個たしても偶数になる
  
- 奇数は何個かけても奇数
- 偶数を 1 個でもかけたら偶数になってしまう

と当たり前のことを言っているだけである。（専門用語ではいわゆる 2 を法とする剰余類のことだが、そのような言葉を知らなくても大丈夫）。このような数の世界を味わってみよう。

次のような行列  $H$  を考える。

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$H\vec{x} = \vec{0}$  となる  $\vec{x}$  を集めると、次の集合  $C$  になる。（但し、 $\vec{0} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ ）

$$C = \{ (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), \\ (0, 1, 1, 0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0), \\ (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1), \\ (0, 0, 1, 1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0, 1, 1, 0) \}$$

ここで、まず次の簡単な作業をして、0 と 1 だけの世界の計算を体験し、上の  $C$  が本当に  $H\vec{x} = \vec{0}$  となる  $\vec{x}$  を集めたものだということを信頼してもらおう（勿論、すべてについて調べ、余裕があればこれら以外にないことも確かめるのはいい練習になるが、ちょっと量が多い）。

**【作業 1】**  $C$  中のどれか一つを選び、本当に  $H\vec{x} = \vec{0}$  となっていることを確かめよ。

次に、今選んだ一つについて次のような操作をしてもらおう。具体的なものがないと説明しづらいので、例えば  $\vec{x} = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 1)$  を選んでいたとしてみよう。この 7 個並んでいる数字のどこか 1 ヶ所を 0, 1 逆の数字にしたものを作ってみよう。そして、それを  $\vec{x}'$  とおいてみよう。



例えば前から3番目を選んだとすると、3番目は0なので、その0を1に変えて

$$\vec{x}' = (0, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$$

にするのである。

ここで、今作った  $\vec{x}'$  に行列  $H$  をかけてみよう

$$H\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (1+1, 1+1+1, 1+1+1) = (0, 1, 1)$$

今得た  $(0, 1, 1)$  をそのまま括弧とカンマを取り去ってみると  $011$  となる。

これを2進数と見て、見慣れた10進数に書き直すと

$$0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 3$$

となる。

実は今計算して得た数3は、先ほど0,1逆の数字にするのに選んだ7個の数字の中で選んだ数が前から何番目だったかを示しているのである。

これを確認してもらうために次の作業をしてみよう。

## 【作業2】

- $C$  中のどれか一つを選び  $\vec{x}$  とする。
- $\vec{x}$  の7個の数字のどこか1ヶ所を選ぶ
- その選んだ箇所の0,1を逆にしたものを作り  $\vec{x}'$  とおく
- $H\vec{x}'$  を計算する。
- 上の計算結果で得た数字を並べて2進数とみなし、それを10進数に書き換えたものが、0,1を逆にした所の番号と一致することを確認せよ。

この作業を終えた今、最後に問題を考えてみよう。

**【問題】** 上の事実に出くわしたあなたは、これを何に応用したいか。

何に応用したいかは個人の自由なので、正解はないだろうが、私がデザートとして用意した素材の出所はお話しておかなければいけない。ここに書いてしまうと考える楽しみを奪ってしまうので、次の『お土産』の19にそのことを書いておくことにする。

## 10 お土産

本日の料理を味わっていただく中で、お土産として残した品を以下に記していこう。

### 【多項式補間】6 ページ

互いに異なる  $n + 1$  個の値  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  及び、 $n + 1$  個の値  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$  が与えられているとする。このとき、

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, \dots, f(x_n) = y_n \quad \dots\dots\dots (11)$$

を満たす  $n$  次以下の多項式  $f(x)$  がただ一つ存在することを、3 種類の方法で示そう。

#### 【Vandermonde 行列の利用】

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  とおくと、(11) を行列を用いて表し

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (12)$$

となる  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  を求めることと同値である。

(12) の左辺の行列は有名な Vandermonde の行列で、その行列式の値は

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \neq 0$$

なので、方程式 (11) はただ一組の解を持つので証明された。

#### 【Newton 流の存在証明】

$a_0, a_1, \dots, a_n$  を次のように帰納的に定義する。

$$a_k = \begin{cases} y_0 & (k = 0 \text{ のとき}) \\ \frac{y_k - a_0 - \sum_{i=1}^{k-1} a_i(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{i-1})}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})} & (k = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (13)$$

これは、(11) となる  $n$  次の多項式  $f(x)$  があったとして、それを

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

の形で求められないかと考えたときに見つかっていく  $a_0, a_1, \dots, a_n$  である。実際にこの式の両辺に  $x = x_k$  を代入してみると、(13) の漸化式が得られることがすぐわかる。また、このように作った  $f(x)$  が (11) を満たすことは明らかである。

### 【Lagrange 流の存在証明】

5 ページの (4) で作った多項式  $p_k(x)$  を利用しよう。  $p_k(x)$  は明らかに次の性質を持っている。

(1)  $n$  次の多項式である。

$$(2) p_k(x_i) = \begin{cases} 1 & (i = k \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq k \text{ のとき}) \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

この準備の基に、  $f(x) = \sum_{k=0}^n y_k p_k(x)$  とおくと、  $f(x)$  は (11) を満たす  $n$  次以下の多項式になっていることがわかる。

### 【 $w_{n,k}(x)$ に課す具体的条件 (5)′】

11 ページで予告しておいたが、(5) の代わりに (5)′ を考えても良いことを以下に見ていこう。

(7) ページの (7) 式  $w_{n,k}(x) = ax^k(1-x)^{n-k}$  は、一切条件 (5) を使わずに得られた式なので、(5)′ を使って  $a$  を  $n, k$  で表すことを考えれば良い。  $a$  は  $n, k$  により決まるので  $a$  を  $a(n, k)$  と書いておくことにする。

$$\int_0^1 w_{n,k}(x) dx = a(n, k) \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx = a(n, k) \frac{1}{n+1} \frac{1}{{}_n C_k}$$

である。(5)′ で言っていることは、『 $k$  には無関係な定数  $C(n)$  があって、  $0 \leq k \leq n$  である任意の整数  $k$  について  $\int_0^1 w_{n,k}(x) dx = C(n)$  になる』ということである。

$$\therefore a(n, k) \frac{1}{n+1} \frac{1}{{}_n C_k} = C(n)$$

$$\therefore a(n, k) = C(n) \cdot (n+1) {}_n C_k$$

最後にこの  $C(n)$  を求めることになるが、7.5 節で示したのと同様に  $\sum_{k=0}^n {}_n C_k x^k (1-x)^{n-k} = 1$  を

利用して  $f(x) - u_n(x) = \sum_{k=0}^n \left( \frac{f(x)}{C(n) \cdot (n+1)} - f(x_k) \right) w_{n,k}(x)$  となる。この後、7.5 節の流れを再確認すると、  $C(n) \cdot (n+1) = 1$  つまり  $C(n) = \frac{1}{n+1}$  と取れば良いことがわかり、

$$w_{n,k}(x) = {}_n C_k x^k (1-x)^{n-k}$$

が得られることがわかる。

### 【1 の分解】

18 ページで、ベルンシュタインの多項式が持つ性質として 1 の分解という用語を紹介した。

1 の分解 (分割) は多様体のテキストによく出てくるが、ここでは少し広い意味で記されている定義を紹介しよう。ベルンシュタインの多項式は、次に紹介する定義にあてはまっているのである。

M. スピヴァック 著 / 齋藤正彦 訳

「多変数の解析学」 古典理論への現代的アプローチ 東京図書

の 71 ページに次のように記されている。

$A$  を  $\mathbb{R}^n$  の部分集合、 $\mathcal{O}$  を  $A$  の開被覆とする。このとき、 $A$  を含むある開集合上の  $C^\infty$  関数の加算族  $\Phi$  で、次の性質を持つものが存在する。

- (1) 各  $\varphi \in \Phi$ 、各  $x \in A$  に対し、 $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ 。
- (2) 各  $x \in A$  に対し、 $x$  を含む開集合  $V$  を十分小さくとると、 $V$  上 0 でないような  $\varphi \in \Phi$  は有限個しかない。
- (3) 各  $x \in A$  に対し、 $\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(x) = 1$ 。  
但し、各  $x$  に対して (2) で存在の保証されている  $V$  をとると、その上でこの和は有限和になり、左辺は意味を持つ。
- (4) 各  $\varphi \in \Phi$  に対し、開集合  $U \in \mathcal{O}$  で、 $U$  に含まれるあるコンパクト集合の外で  $\varphi = 0$  となるようなものが存在する。

(1),(2),(3) を満たす関数族  $\Phi$  を  $A$  に対する 1 の  $C^\infty$  分解という。さらに、(4) も満たすとき、 $\Phi$  は開被覆  $\mathcal{O}$  に乗っているという。

#### 【デザートで紹介した内容の出所】

ある情報を伝えようとするときに生じる課題の解決に関わる話として次のようなものがある。

##### 【音楽CDの例】

音楽CDは音を 0 と 1 の列の並び方で表現して記録したものである。このデータは表面に傷やほこりが付着することで、CDプレイヤーに間違ったデータが渡されることになる。間違った情報を受け取っても元のデータが何だったかをプレイヤーが理解できれば問題は無い。

このことの非常に単純な場合が“デザート”で紹介した話である。この話題は「符号の理論」と呼ばれる分野の内容で、誤り訂正の理論だそうです（参照：[6]）

## 参考文献

- [1] (編集委員) 青本和彦・上野健爾・加藤和也・神保道夫・砂田利一・高橋陽一郎・深谷賢治・俣野博・室田一雄  
『数学入門辞典』, 岩波書店 (2005 年) 569 ページに 補間 という用語の説明がある。
- [2] P. ヘンリッチ  
『数値解析の基礎』, 一松信・平本巖・本田勝 共訳, 培風館  
( Peter Henrici : Elements of numerical analysis ) 9 ページからの 6.4 節 ルンゲの例 で紹介した例は、この本の 195 ページの本文と訳注に記載されていたものである。
- [3] E.W.CHENEY  
『近似理論入門』, 一松信・新島耕一 共訳, 共立出版株式会社  
( E. W. Cheney : Introduction to Approximation Theory, McGrawHill, 1966 )

[4] Philip J. Davis

Interpolation and Approximation, Dover, 1975

本書の 108 ページ以降に ベルンシュタイン多項式 に関する様々な性質及び Weierstrass の定理の証明が記載されている。

[5] 高木貞治

『解析概論』, 岩波書店, 2008

284 ページ Weierstrass の定理 の節に、Weierstrass の定理の 2 種類の証明が書かれている。一つは本レポートで紹介したベルンシュタイン多項式を利用するものである。

[6] 荻原学

『なぜ、数学が産業に役立つか』, 数学セミナー vol.51 no.7 609, 2012

連載第 1 回