

ベクトルの和(初歩の初歩について)

札幌稲北高等学校
角田 義一郎

はじめに

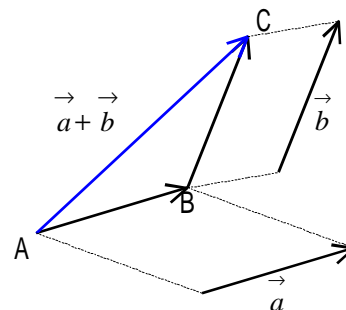
ベクトルを学ぶ生徒にとって、最初につまずきは「ベクトルの和」のところでは

ベクトルの和

2つのベクトル \vec{a} , \vec{b} に対してAを始点として \vec{a} に等しく \vec{AB} をとり, Bを始点として \vec{b} に等しく \vec{BC} をとる。このとき, Aを始点, Cを終点とするベクトル \vec{AC} を \vec{a} と \vec{b} の和といい $\vec{a} + \vec{b}$ で表す。すなわち
$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{a} + \vec{b}$$
である。

これは、「ベクトルの和の定義である」とするも「どうして?」という生徒がいます。

定義が素直に頭に入らず、ここでつまずくと生徒は、なかなかベクトルになじんでくれず「数B」は難しいと思いこみ以後の学習にマイナスになります。



数Bの教科書の「ベクトル」では、矢線ベクトルから始まり、次に成分表示となり、行ベクトルへと進んでいきます。

これを逆に行ベクトルから矢線ベクトルへと進むと「ベクトルの和の定義」が生徒にとって納得しやすくなるのではと思います、まとめてみました。

1. 行ベクトル

みかんとりんごそれぞれ1個の値段を10円, 20円とする。

みかん	りんご
10(円)	20(円)

これを (10, 20) . . .

と表すことにする。

ここでみかんを x 個, りんごを y 個買ったときの合計金額は

$$10x + 20y \quad (\text{円}) \quad \text{である。}$$

一方, $10x + 20y$ を 2 つの文字 x と y に関する 1 次同次式とみなし, 最初に x の係数, 次に y の係数を書くことにすると 同じく

$$(10, 20)$$

と表すことができる。

同様にみかん, りんご, なしのかんずめがあって, それぞれの値段が 1 個ずつ 200 円, 100 円, 300 円するとき, これを

$$(200, 100, 300) \quad \dots$$

と表せる。

また, 3 つの文字 x, y, z に関する 1 次同次式 $2x + y + 3z$ は

$$(2, 1, 3) \quad \dots$$

と表せる。

, , のように横に並べた数の組のことを行ベクトルとよび, 行ベクトルをつくっている個々の数をその成分, 成分の個数を次元という。

ここで, 行ベクトルを $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \quad \dots$ で表すことにする。たとえば

$$\vec{a} = (10, 20), \quad \vec{b} = (200, 100, 300), \quad \vec{c} = (2, 1, 3)$$

と書く。

行ベクトルの相等

2 つの 2 次元の行ベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ が等しいときは $a_1 = b_1, a_2 = b_2$ となる。

よって, 2 つの行ベクトルが等しいときは, 2 つの行ベクトルの次元が等しく, かつ対応する成分がすべて等しいことである。

2 つの 3 次元の行ベクトルについても同様に考える。

みかんとりんご 1 個ずつの値段は $(10, 20)$, それぞれのかんずめ 1 個ずつの値段は $(200, 100)$ と表せる。くだものとかんずめをそれぞれ 1 個ずつ買うと, それぞれの値段は

みかん	りんご
$10 + 200$ (円)	$20 + 100$ (円)

となる。

これは 2 次元の行ベクトル $(10 + 200, 20 + 100)$ で表され,

$$(10 + 200, 20 + 100) = (10, 20) + (200, 100)$$

と考えることができる。

一般に 2つの行ベクトル $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ について

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

が成り立つ。ゆえに

$$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2) \text{ のとき } \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

ここで、くだものとかんずめをそれぞれみかんは x 個ずつ、りんごは y 個買うとくだものとかんずめの合計金額は

くだもの	かんずめ
$10x + 20y$ (円)	$200x + 100y$ (円)

となる。これを 2つの文字 x と y についての1次同次式と考えて加えると

$$(10x + 20y) + (200x + 100y) = (10 + 200)x + (20 + 100)y \dots$$

が成り立つ。

2つの文字 x, y に関する1次同次式 $10x + 20y$ は $(10, 20)$ と表され、同様に $200x + 100y$ は $(200, 100)$ と表される。

また、 $(10 + 200)x + (20 + 100)y$ は、 $(10 + 200, 20 + 100)$ となり から

$$(10, 20) + (200, 100) = (10 + 200, 20 + 100)$$

は成立する。

以上のことから

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

が成立する。

2. 矢線ベクトル

右図においては、平面上の点 P を1組の数 (a, b) で表す。

ここで、平面上の点 $A(x_1, y_1)$ を

$$x_2 = x_1 + 2, y_2 = y_1 + 3$$

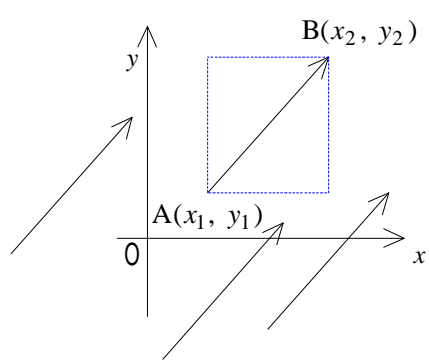
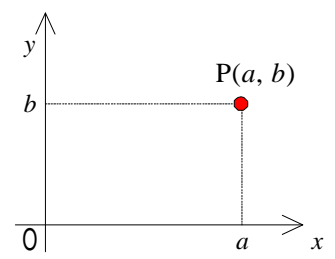
で与えられる点 $B(x_2, y_2)$ に移す変換を考える。

これは図が示すような平行移動である。この平行移動は 点 A が点 B へ移るので有向線分 \vec{AB} と表すことにする。

このように、有向線分で表される量を矢線ベクトルという。平行移動の他に力、速度なども矢線ベクトルである。

いま、有向線分 \vec{AB} を対角線として、それぞれ x 軸、 y 軸に平行な辺をもった長方形を作図する

と、点 A を通る辺の長さは、それぞれ 2 と 3 である。このことは点 A をどこにとっても成り立つ。



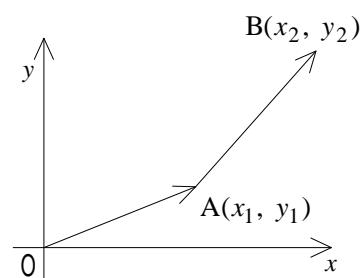
一般に、点 $A(x_1, y_1)$ を

$$x_2 = x_1 + p, y_2 = y_1 + q$$

で与えられる点 $B(x_2, y_2)$ へ移す平行移動は、矢線ベクトルでは \vec{AB} と表されて行ベクトルでは

$$(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (p, q)$$

と表される。



ゆえに $\vec{AB} = (p, q)$ となる。

ここで $O(0, 0)$, $A(x_1, y_1)$ のとき

$$\vec{OA} = (x_1, y_1)$$

である。

平行移動

$$x_2 = x_1 + p_1, y_2 = y_1 + q_1$$

により点 $A(x_1, y_1)$ は点 $B(x_2, y_2)$ に移り、また、平行移動

$$x_2 = x_1 + p_2, y_2 = y_1 + q_2$$

によって点 $B(x_2, y_2)$ が点 $C(x_3, y_3)$ に移されたとする。よって

$$\vec{AB} = (p_1, q_1), \vec{BC} = (p_2, q_2)$$

\vec{AC} を対角線として、それぞれ x 軸、 y 軸に平行な辺をもった長方形を作図すると、点 A を通る辺の長さは、それぞれ $p_1 + p_2, q_1 + q_2$ となる。よって

$$\vec{AC} = (p_1 + p_2, q_1 + q_2)$$

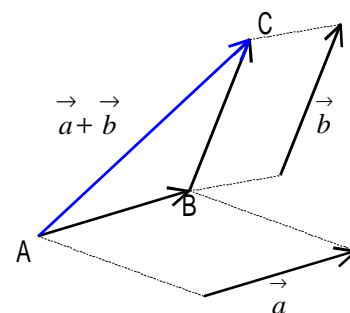
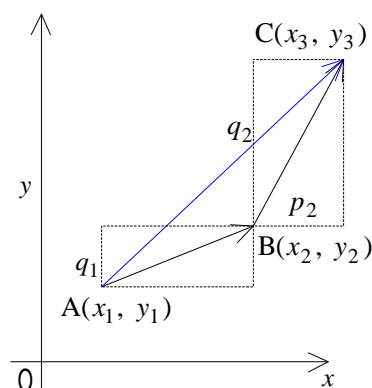
一方 $(p_1 + p_2, q_1 + q_2) = (p_1, q_1) + (p_2, q_2)$

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$$

ゆえに

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

が成り立つ。



ベクトルの和

2つのベクトル \vec{a} , \vec{b} に対して A を始点として \vec{a} に等しく \vec{AB} をとり、 B を始点として \vec{b} に等しく \vec{BC} をとる。このとき、 A を始点、 C を終点とするベクトル \vec{AC} を \vec{a} と \vec{b} の和といい

$$\vec{a} + \vec{b}$$

で表す。すなわち

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{a} + \vec{b}$$

である。

3. ベクトルの初歩「和の定義」

ベクトルの導入として、行ベクトルから矢線ベクトルへと進み、和の定義を平行移動をイメージさせて説明すると、生徒もわかってくれたようでした。

ベクトルの基本となる「和の定義」を論理的に導くことにより、生徒もベクトルの食わず嫌いにおちいることなく以後の授業もわりとスムーズに進めることができました。

みかんとりんごそれぞれ1個の値段を15円、25円とする。

みかん	りんご
15(円)	25(円)

これを $(15, 25) \cdots$ と表すことにする。

ここでみかんとりんごを x 個、 y 個買ったときの合計金額は

$15x + 25y \cdots$ (円) である。

$15x + 25y = (15, 25) \cdot (x, y)$ と書くことにする。

よって $(15, 25) \cdot (x, y) = 15x + 25y$ となり、内積を導くことができる。

ただし、まだ生徒には、このだんかいは「内積」は、教えないことにします。

ここで この合計金額を内積としてしまうと、2つのベクトルのなす角を教えたときに「 $(15, 25)$ と (x, y) のなす角ってなんですか」と無意味な疑問をもってしまう生徒がいるからです。

第27回「数実研」で北海道石狩南高校の清水貞人先生が、発表されたレポート「ベクトルの内積の導入について」を、数学のいずみ(数実研のホームページ)で読んだ大阪の灘高校2年生が、数学のいずみの意見欄にメールを送ってきました。

その中に「清水先生は、授業例として値段ベクトル、個数ベクトルを用いていますが・・・値段ベクトルと個数ベクトルのなす角って何ですか?と質問されれば、困ってしまうのではないのでしょうか」とありました。

このことについて清水先生は、高校生に送ったメールの中で「・・・ベクトルの内積を数ベクトルで定義することについて・・・授業をするときは、十分配慮しなければならないと思っています」と答えています。

このあたりのことについてもっと詳しく知りたい方は、「数学のいずみ：あなたの意見のまとめ」を開くとよいでしょう。

$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2) \text{ のとき } \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

上の式を内積の定義としても生徒は、理解しづらいと思います。

それは以下のようなことからです。

<p style="text-align: center;">スカラー積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の代数的表示</p> $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2) \text{ のとき } \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$
--

実数×実数=実数, 複素数×複素数=複素数 であるが, ベクトルのスカラー積はベクトルにならないので, スカラー積はふつうの意味の積ではない。

しかし, ふつうの積に似た性質(1)(2)(3)があるため, 便宜上積とよぶ。

$$\text{交換法則} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (1)$$

$$\text{分配法則} \quad c \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = c \cdot \vec{a} + c \cdot \vec{b} \quad (2)$$

$$\text{結合法則} \quad c \cdot (a \vec{a}) = a (c \cdot \vec{a}) \text{ ただし } a \text{ は実数} \quad (3)$$

スカラー積のことを, 内積 (inner product) という。

内積を導入するには, 矢線ベクトルを使い図形のイメージから入ると, 生徒も理解しやすいと思います。

4. 内積の導入 (図形のイメージから入る)

余弦定理から $|\vec{a}| |\vec{b}| \cos q = \vec{a} \cdot \vec{b}$ へと進む。

$\vec{0}$ でない2つのベクトル \vec{a}, \vec{b} に対して, 点 O を定め $\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}$ であるように点 A, B をとる。

このとき $\angle AOB$ の大きさを \vec{a}, \vec{b} のなす角という。ただし 0° 180° とする。

$\triangle OAB$ においては, 余弦定理により

$$BA^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \times OB \times \cos$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| |\vec{b}| \cos q \quad \dots$$

これは q が 0° または 180° のときも成り立つ。

このように, 2つのベクトル \vec{a}, \vec{b} に対して $|\vec{a}| |\vec{b}| \cos q$ を考えることは図形的にも意味がある。

$|\vec{a}| |\vec{b}| \cos q$ を, \vec{a} と \vec{b} の内積といい 記号で $\vec{a} \cdot \vec{b}$ と表す。

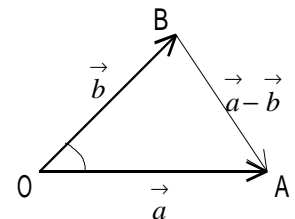
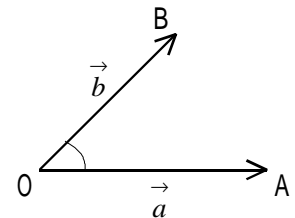
* 考察 余弦定理から $|\vec{a}| |\vec{b}| \cos q$ を導くと, 図形的なイメージがあるので内積がわりとスムーズに導入できる。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos q$$

また $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ のとき は

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

と表されるので $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$



ベクトルの内積

定義 1 . $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$

定義 2 . $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ のとき $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

内積のイメージ化(生徒に対して)

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ は $|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ を表す記号であることを力説してイメージとして2辺きょう角がうかぶよにさせる。

2辺きょう角のイメージ化

$|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ は, \vec{a} と \vec{b} の内積である。記号で $\vec{a} \cdot \vec{b}$ と表す。

$|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$ は, 平行四辺形の面積である。面積は記号で s と表す。

5 . ベクトル積について

2つのベクトル \vec{a} , \vec{b} によってつくられる平行四辺形の面積を, この面に直角の方向をもったベクトル \vec{a} , \vec{b} のベクトル積といい, $\vec{a} \times \vec{b}$ で表す。

ベクトル積のことを外積 (outer product) という。ベクトル積の大きさは, 2つのベクトルのなす角が θ のとき

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

とする。ただし, その向きは \vec{a} から \vec{b} へ 180° の角度でまわるとき右ねじの進む向きとする。

6 . 内積の導入・・・その2 (唐突な感じ)

2つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ に対して, $a_1 b_1 + a_2 b_2$ を \vec{a} と \vec{b} の内積といい, 記号で $\vec{a} \cdot \vec{b}$ と書く。

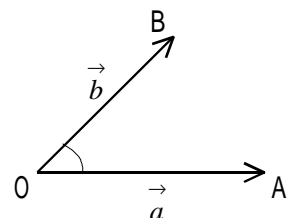
内積の定義

$\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ のとき , $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

(生徒にとっては「??」でわからない)

これを内積の定義とする導入方法は, 唐突な感じうけ生徒にとってはチンプンカンプンと思われる。・・・以下次のように続く。

・ベクトルのなす角



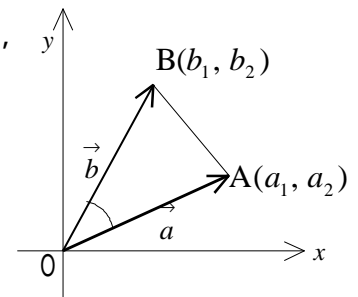
$\vec{0}$ でない2つのベクトル \vec{a} , \vec{b} に対して1点Oを定め, $\vec{a}=\vec{OA}$, $\vec{b}=\vec{OB}$ である点A,Bをとる。
 このとき, AOBの大きさを \vec{a} , \vec{b} のなす角という。ただし, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ 。

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$ に対し, 2点 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ をとれば, $\vec{a}=\vec{OA}$, $\vec{b}=\vec{OB}$ である。

\vec{a} , \vec{b} のなす角が $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき, OABに余弦定理を適用すると,

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA \cdot OB \cdot \cos \theta$$

ここで $a_1b_1+a_2b_2 = \vec{a} \cdot \vec{b}$, $OA=|\vec{a}|$, $OB=|\vec{b}|$ である。



ベクトルの内積

\vec{a} , \vec{b} のなす角を θ とすると

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

7. 最後に・・・まとめとして

今回のレポートは, ベクトルの初歩の初歩として「和の定義」を生徒にわかりやすく指導するには, どうしたらよいかについてまとめてみました。

数Bの教科書は, 矢線ベクトルから成分表示へと進んでいきます(平11年度の教科書を, 10冊調べてみました)。私の見た限りでは, 行ベクトルから矢線ベクトルへ・・・と進む教科書は見あたりませんでした。もし, ありましたら教えていただきたいのですが。

学習指導要領, 教科書検定の関係から, 矢線ベクトルから入らなければならないのかもしれませんが。

教科書では, **矢線ベクトル**という語も**行ベクトル**という語も出てきません。どちらもベクトルですが, 生徒にとっては矢線ベクトルが理解できて無いうちに成分表示に進むと, 以後の学習にマイナスとなりベクトルアレルギーにおちいります。

ベクトルの基本をしっかりと生徒にわかってもらいたく「和の定義」を行ベクトルから矢線ベクトルへと・・・しました。

行ベクトル=矢線ベクトルが理解できると, 生徒にとって苦手な内積もわかってくれると思います。行ベクトルと行ベクトルのなす角もイメージできるようになるでしょう。

$\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$ のなす角は $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ により求められます。