

教材研究から研究へ、研究から教材研究へ

北海道美唄尚栄高等学校教諭 山本元太

1. はじめに

夏期講習を受講した生徒から課題を作ってほしいとお願いされ、以下のような問題を作成した。

次の各問いに答えよ。

(1) 105^2 を計算せよ。

(2) 2^{10} を計算せよ。

(3) 10001 を素因数分解せよ。

(1), (2) は簡単な計算問題である。実際 (1) は $105^2 = 11025$, (2) は $2^{10} = 1024$ である。(3) は

$$\begin{aligned} 10001 &= 11025 - 1024 \\ &= 105^2 - 32^2 \\ &= (105 + 32)(105 - 32) \\ &= 137 \times 73 \end{aligned}$$

このように解くことが出来る。これは因数分解 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ を知っていて 11025 と 1024 の差が 10001 になることが出来ることに気がつけば解くことが出来る問題となっている。私自身は $10001 = 137 \times 73$ となることを知っていたため、そこから逆算してこの問題を作成した。

ここからさらに応用できないか、 $10^n + 1$ の素因数分解を考えていった。

$$\begin{aligned} 1001 &= 7 \times 11 \times 13 \\ 10001 &= 73 \times 137 \\ 100001 &= 11 \times 9091 \\ 1000001 &= 101 \times 9901 \\ 10000001 &= 11 \times 909091 \\ &\vdots \end{aligned}$$

このように計算をしている最中に次の命題が成り立つのではないかと考えた。

命題 1. n は 3 以上の自然数とする。このとき $10^n + 1$ はすべて合成数である。

この命題の証明を夏休み中に行った。この証明の要素や性質について、一部分は授業内でふれることができるのではないかと考え、教材研究を行った。本レポートでは、本校の学校設定科目である「生活の数学」の授業

でふれた内容とふれることが出来なかった発展的な内容について共有する.

2. 実際に授業でふれた内容

授業内では「因数分解を利用した素因数分解の存在」について重点的にふれた. まず, 生徒には以下の 5 つの数を素因数分解するように指示をした.

$$21, 56, 119, 133, 221$$

計算が得意な生徒や電卓を使った生徒は早めにすべての数を素因数分解することができたが, 頭の中で計算をしていた生徒は 119 の素因数分解でつまづいていた.

この 5 つの数の素因数分解の答え合わせをした後, 次の 2 つの数を素因数分解するように指示をした.

$$533, 10001$$

これらの数になると計算が得意な生徒も電卓を使った生徒もかなり時間がかかっていた. ここで因数分解を利用した素因数分解についての紹介をした.

533 という数について, 当初は 2024 年に岡山理科大学の入試問題として出題された「53333333 を素因数分解せよ」という因数分解を利用した素因数分解の問題の具体例からふれ始めようと考えていた. 「本校の学力に合わせるならば, 533 の因数分解くらいがちょうど良いのではないか」というアドバイスを別の数学の教諭からいただき, それを授業内で取り入れた. 533 の素因数分解については下の式変形を紹介した.

$$\begin{aligned} 533 &= \frac{1}{3} \times 1599 \\ &= \frac{1}{3}(40^2 - 1^2) \\ &= \frac{1}{3}(40 + 1)(40 - 1) \\ &= \frac{1}{3} \times 41 \times 39 \\ &= 41 \times 13 \end{aligned}$$

また, 10001 については夏期講習の際に作ったプリントを利用して紹介した.

この授業の生徒の反応はとても良かった. このような形で因数分解が出てくるのが新鮮に感じたようであった. 実際, 普段授業中によく寝てしまう生徒もこの授業は最初から最後まで起きていた. 生徒の興味を惹けるような教材を準備できるようにしようと改めて考えた.

3. 授業ではふれることが出来なかった内容

授業内ではふれなかったが, 生徒層によってはふれる可能性があるものについても共有する.

・ mod を利用した証明問題

命題 2. n は自然数とする. このとき $10^{2n+1} + 1$ はすべて 11 で割り切れる.

証明. $10 \equiv -1 \pmod{11}$ であるため,

$$10^{2n+1} \equiv (-1)^{2n+1} \equiv -1 \pmod{11}$$

. したがって, $10^{2n+1} + 1 \equiv 0 \pmod{11}$ となるため, $10^{2n+1} + 1$ は 11 で割り切れる. $\square$

・ ブラーマグプタ-フィボナッチ恒等式の証明

命題 3. ブラーマグプタ-フィボナッチ恒等式

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

を証明せよ.

証明略.

4. 命題 1 の証明

命題 1 の証明についても記載させていただく. 証明には, フェルマーの二平方定理を利用する. フェルマーの二平方定理の主張は以下である.

定理 4 (フェルマーの二平方定理). 奇素数 p について p を 4 で割ったあまりが 1 であることと, p が 2 つの平方数の和で表せることは同値である. また, 2 つの平方数の和で一意的に表せる.

この定理の証明については省略するが, 平方剰余の相互法則など高校の範囲外の内容が利用されている. 以下では命題 1 の証明を行う.

命題 1 の証明. n が 3 以上の奇数の場合は, 命題 2 で証明されている.

n が 3 以上の偶数の場合, すなわち 2 以上の自然数 m を用いて $n = 2m$ と表せる場合を考える. . フェルマーの二平方定理より, $10^{2m} + 1$ が素数であると仮定すると, 2 つの平方数の和で一意的に表すことができる. ここで, $10^{2m} + 1 = (10^m)^2 + 1^2$ と 2 つの平方数の和で表されることに注意する.

$A = 10^n, B = 1$ が解の 1 つである方程式

$$A^2 + B^2 = 10^n A + B \tag{*}$$

という方程式を考える. ただし, A, B はともに自然数である. この方程式をみたす A, B に対して $(2A - 10^n)^2 + (2B - 1)^2$ を考える.

$$\begin{aligned} (2A - 10^n)^2 + (2B - 1)^2 &= 4A^2 - 4A \cdot 10^n + 10^{2n} + 4B^2 - 4B + 1 \\ &= 4\{(A^2 + B^2) - (10^n A + B)\} + 10^{2n} + 1 \\ &= 10^{2n} + 1 \end{aligned}$$

より $(2A - 10^n)^2 + (2B - 1)^2 = 10^{2n} + 1$ が成り立つ. $10^{2n} + 1 = X^2 + Y^2$ が成り立つような自然数 X, Y をとる. $10^{2n} + 1$ は奇数であるので, X, Y の偶奇は異なる. Y を奇数とすることにより, $Y = 2B - 1$ として

もよい. また, $2A - 10^n$ は負になる場合もあるため, $2A - 10^n = \pm X$ である. ここでは $A = \frac{10^n + X}{2}$ とする. $A = \frac{10^n - X}{2}$ の場合も同様の議論をすることができる. $(A, B) \neq (10^n, 1)$ とすると,

$$\begin{aligned} 10^n A + B &= A^2 + B^2 \iff 10^n A - A^2 = B^2 - B \\ &\iff A(10^n - A) = B(B - 1) \\ &\iff \frac{A}{B} = \frac{B - 1}{10^n - A} \end{aligned}$$

より, $\frac{A}{B} = \frac{B - 1}{10^n - A}$ が成り立つ. $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$ が成り立つように $\frac{a}{b}$ をとる. ただし, $\frac{a}{b}$ は既約分数である. したがって, $A = ax, B = bx, B - 1 = ay, 10^n - A = by$ が成り立つように $x, y \in \mathbb{N}$ がとれる. このように設定すると, $ax + by = A + 10^n - A = 10^n, bx - ay = 1$ が成り立つため

$$(ax + by)^2 + (bx - ay)^2 = 10^{2n} + 1$$

が成り立つ. ブラーマグプタ-フィボナッチ恒等式

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (bx - ay)^2 = (ax - by)^2 + (bx + ay)^2$$

より $10^{2n} + 1$ が合成数であることが証明された. □

5. 今後の展望

研究として, 4 章の (*) の方程式に $A = 10^n, B = 1$ 以外の解が無数個あるかどうかを調べたい. 具体的には $(n, A, B) = (4, 588, 2353)$ は (*) の解である. $5882353 = 588^2 + 2353^2$. 時間があるときにこの研究もすすめ, 教材研究と研究のサイクルを続けたい.

参考文献

- [1] 5882353: この数は面白い <https://integers.hatenablog.com/entry/2015/12/10/003000> (閲覧日 2025 年 7 月 28 日)
- [2] 5882353 <https://mathlog.info/articles/3693> (閲覧日 2025 年 7 月 28 日)
- [3] 第 11 章 平方剰余 https://pc1.math.gakushuin.ac.jp/~shin/html-files/Algebra_Introduction/2017/11.pdf (閲覧日 2025 年 7 月 29 日)
- [4] 平方剰余・平方非剰余とルジャンドル記号 <https://mathlandscape.com/quad-residue/> (閲覧日 2025 年 7 月 29 日)
- [5] フェルマーの二平方和定理 <https://manabitimes.jp/math/844> (閲覧日 2025 年 7 月 28 日)
- [6] 複素整数の素因数分解について https://www.chart.co.jp/subject/sugaku/suken_tsushin/30/30-8.pdf (閲覧日 2025 年 7 月 29 日)
- [7] 大学数学への接続シリーズ 3 素因数分解とイデアル https://www.tsuyama-ct.ac.jp/matsuda/eBooks/factrization_ideal.pdf (閲覧日 2025 年 7 月 29 日)
- [8] ラグランジュの恒等式とその仲間 <https://manabitimes.jp/math/607> (閲覧日 2025 年 11 月 18 日)
- [9] J.P. セール 著, 彌永健一 訳, 『数論講義』 岩波書店, 1979 年.