偶数乗の冪和覚書

北海道岩見沢農業高等学校
加藤秀隆

現札幌旭丘高校の中村文則先生が「$\sum_{k=1}^{n} k^p$の計算のちょっとした小手技」で紹介していた奇数乗の冪和を下位の奇数乗の冪和のリレーで求めることと同様に偶数乗の冪和を下位の偶数乗の冪和のリレーで求めることができる。用いる数式を記述します。

① $k(k+1)(2k+1)-(k-1)k(2k-1)=6k^2$

② $k^2(k+1)^2(2k+1)-(k-1)^2k^2(2k-1)=10k^4+2k^2$

③ $k^3(k+1)^3(2k+1)-(k-1)^3k^3(2k-1)=14k^6+10k^4$

④ $k^4(k+1)^4(2k+1)-(k-1)^4k^4(2k-1)=18k^8+28k^6+2k^4$

⑤ $k^5(k+1)^5(2k+1)-(k-1)^5k^5(2k-1)=22k^{10}+60k^8+14k^6$

⑥ $k^6(k+1)^6(2k+1)-(k-1)^6k^6(2k-1)=26k^{12}+110k^{10}+54k^8+2k^6$

⑦ $k^7(k+1)^7(2k+1)-(k-1)^7k^7(2k-1)=30k^{14}+182k^{12}+154k^{10}+18k^8$

⑧ $k^8(k+1)^8(2k+1)-(k-1)^8k^8(2k-1)=34k^{16}+280k^{14}+364k^{12}+88k^{10}+2k^8$

⑨ $k^9(k+1)^9(2k+1)-(k-1)^9k^9(2k-1)=38k^{18}+408k^{16}+756k^{14}+312k^{12}+22k^{10}$

これらの記述でも偶数乗の冪和のリレーを十分に見ることができます。
いずれも、$k=1,2,3,\cdots\cdots,n$を代入して集積していきます。因数分解形のリレーを見ることができ、偶数乗の冪和は、必ず因数に$n(n+1)(2n+1)$をもつことがわかります。

① $n(n+1)(2n+1)=6\sum_{k=1}^{n} k^2$ ， $\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$

② $n^2(n+1)^2(2n+1)=10\sum_{k=1}^{n} k^4+2\sum_{k=1}^{n} k^2$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4=\frac{1}{10}n^2(n+1)^2(2n+1)-\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$=\frac{1}{10}n^2(n+1)^2(2n+1)-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

$$=\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}$$

③ $n^3(n+1)^3(2n+1)=14\sum_{k=1}^{n} k^6+10\sum_{k=1}^{n} k^4$

$$\sum_{k=1}^{n} k^6=\frac{1}{14}n^3(n+1)^3(2n+1)-\frac{5}{7}\sum_{k=1}^{n} k^4$$

$$=\frac{1}{14}n^3(n+1)^3(2n+1)-\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

$$=\frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)$$

$$=\frac{n^7}{7}+\frac{n^6}{2}+\frac{n^5}{2}-\frac{n^3}{6}+\frac{n}{42}$$

④ $n^4(n+1)^4(2n+1)=18\sum_{k=1}^{n} k^8+28\sum_{k=1}^{n} k^6+2\sum_{k=1}^{n} k^4$

$$\sum_{k=1}^{n} k^8=\frac{1}{18}n^4(n+1)^4(2n+1)-\frac{14}{9}\sum_{k=1}^{n} k^6-\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n} k^4$$

$$=\frac{1}{18}n^4(n+1)^4(2n+1)-\frac{14}{9}\cdot\frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^2-3n+1)$$

$$-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

$$=\frac{1}{90}n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)$$

$$=\frac{n^8}{9}+\frac{n^8}{2}+\frac{2n^7}{3}-\frac{7n^5}{15}+\frac{2n^3}{9}-\frac{n}{30}$$

⑤ $n^5(n+1)^5(2n+1)=22\sum_{k=1}^{n} k^{10}+60\sum_{k=1}^{n} k^8+14\sum_{k=1}^{n} k^6$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{10}=\frac{1}{22}n^5(n+1)^5(2n+1)-\frac{30}{11}\sum_{k=1}^{n} k^8-\frac{7}{11}\sum_{k=1}^{n} k^6$$

$$=\frac{1}{66}n(n+1)(2n+1)(3n^8+12n^7+8n^6-18n^5-10n^4+24n^3+2n^2-15n+5)$$

$$=\frac{1}{66}n(n+1)(2n+1)(n^2+n-1)(3n^6+9n^5+2n^4-11n^3+3n^2+10n-5)$$

$$=\frac{n^{11}}{11}+\frac{n^{10}}{2}+\frac{5n^9}{6}-n^7+n^5-\frac{n^3}{2}+\frac{5n}{66}$$

⑥ $n^6(n+1)^6(2n+1)=26\sum_{k=1}^{n} k^{12}+110\sum_{k=1}^{n} k^{10}+54\sum_{k=1}^{n} k^8+2\sum_{k=1}^{n} k^6$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{12}=\frac{1}{26}n^6(n+1)^6(2n+1)-\frac{55}{13}\sum_{k=1}^{n} k^{10}-\frac{27}{13}\sum_{k=1}^{n} k^8-\frac{1}{13}\sum_{k=1}^{n} k^6$$

$$=\frac{1}{2730}n(n+1)(2n+1)(105n^{10}+525n^9+525n^8-1050n^7-1190n^6+2310n^5$$

$$+1420n^4-3285n^3-287n^2+2073n-691)$$

$$=\frac{n^{13}}{13}+\frac{n^{12}}{2}+n^{11}-\frac{11n^9}{6}+\frac{22n^7}{7}-\frac{33n^5}{10}+\frac{5n^3}{3}-\frac{691n}{2730}$$

⑦ $n^7(n+1)^7(2n+1)=30\sum_{k=1}^{n}k^{14}+182\sum_{k=1}^{n}k^{12}+154\sum_{k=1}^{n}k^{10}+18\sum_{k=1}^{n}k^8$

$$\sum_{k=1}^{n}k^{14}=\frac{1}{30}n^7(n+1)^7(2n+1)-\frac{91}{15}\sum_{k=1}^{n}k^{12}-\frac{77}{15}\sum_{k=1}^{n}k^{10}-\frac{3}{5}\sum_{k=1}^{n}k^8$$

$$=\frac{1}{90}n(n+1)(2n+1)(3n^{12}+18n^{11}+24n^{10}-45n^9-81n^8+144n^7+182n^6$$

$$-345n^5-217n^4+498n^3+44n^2-315n+105)$$

$$=\frac{n^{15}}{15}+\frac{n^{14}}{2}+\frac{7n^{13}}{6}-\frac{91n^{11}}{30}+\frac{143n^9}{18}-\frac{143n^7}{10}+\frac{91n^5}{6}-\frac{691n^3}{90}+\frac{7n}{6}$$

⑧ $n^8(n+1)^8(2n+1)=34\sum_{k=1}^{n}k^{16}+280\sum_{k=1}^{n}k^{14}+364\sum_{k=1}^{n}k^{12}+88\sum_{k=1}^{n}k^{10}+2\sum_{k=1}^{n}k^8$

$$\sum_{k=1}^{n}k^{16}=\frac{1}{34}n^8(n+1)^8(2n+1)-\frac{140}{17}\sum_{k=1}^{n}k^{14}-\frac{182}{17}\sum_{k=1}^{n}k^{12}-\frac{44}{17}\sum_{k=1}^{n}k^{10}-\frac{1}{17}\sum_{k=1}^{n}k^8$$

$$=\frac{1}{510}n(n+1)(2n+1)(15n^{14}+105n^{13}+175n^{12}-315n^{11}-805n^{10}+1365n^9$$

$$+2775n^8-4845n^7-6275n^6+11835n^5+7485n^4-17145n^3-1519n^2$$

$$+10851n-3617)$$

$$=\frac{n^{17}}{17}+\frac{n^{16}}{2}+\frac{4n^{15}}{3}-\frac{14n^{13}}{3}+\frac{52n^{11}}{3}-\frac{143n^9}{3}+\frac{260n^7}{3}-\frac{1382n^5}{15}$$

$$+\frac{140n^3}{3}-\frac{3617n}{510}$$

⑨ $n^9(n+1)^9(2n+1)=38\sum_{k=1}^{n}k^{18}+408\sum_{k=1}^{n}k^{16}+756\sum_{k=1}^{n}k^{14}+312\sum_{k=1}^{n}k^{12}+22\sum_{k=1}^{n}k^{10}$

$$\sum_{k=1}^{n}k^{18}=\frac{1}{38}n^9(n+1)^9(2n+1)$$

$$-\frac{204}{19}\cdot\frac{1}{510}n(n+1)(2n+1)(15n^{14}+105n^{13}+175n^{12}-315n^{11}-805n^{10}+1365n^9$$

$$+2775n^8-4845n^7-6275n^6+11835n^5+7485n^4-17145n^3-1519n^2$$

$$+10851n-3617)$$

$$-\frac{378}{19}\cdot\frac{1}{90}n(n+1)(2n+1)(3n^{12}+18n^{11}+24n^{10}-45n^9-81n^8+144n^7+182n^6$$

$$-345n^5-217n^4+498n^3+44n^2-315n+105)$$

$$-\frac{156}{19}\cdot\frac{1}{2730}n(n+1)(2n+1)(105n^{10}+525n^9+525n^8-1050n^7-1190n^6+2310n^5$$

$$+1420n^4-3285n^3-287n^2+2073n-691)$$

$$-\frac{11}{19}\cdot\frac{1}{66}n(n+1)(2n+1)(n^2+n-1)(3n^6+9n^5+2n^4-11n^3+3n^2+10n-5)$$

$$=\frac{1}{3990}n(n+1)(2n+1)(105n^{16}+840n^{15}+1680n^{14}-2940n^{13}-9996n^{12}+16464n^{11}$$

$$+48132n^{10}-80430n^9-167958n^8+292152n^7+380576n^6-716940n^5$$

$$-454036n^4+1039524n^3+92162n^2-658005n+219335)$$

$$=\frac{n^{19}}{19}+\frac{n^{18}}{2}+\frac{3n^{17}}{2}-\frac{34n^{15}}{5}+34n^{13}-\frac{663n^{11}}{5}+\frac{1105n^9}{3}-\frac{23494n^7}{35}+714n^5$$

$$-\frac{3617n^3}{10}+\frac{43867n}{798}$$

文献

中村文則　$\sum_{k=1}^{n} k^p$ の計算のちょっとした小手技　http://www.nikonet.or.jp/spring/sigma/sigma.htm