

冪和覚書

北海道岩見沢農業高等学校

加藤秀隆

E-mail:gori@hokkaido-c.ed.jp

2つ以上の冪和積の差分を考えます。 $S_i = S_i(n) = \sum_{k=1}^n k^i$ とします。

冪和2つの積の差分は、 $S_i(k) \cdot S_j(k) - S_i(k-1) \cdot S_j(k-1)$ になり、2つの冪和積における逆L字和の計算の発展形になります。これによって得られる数式に $k = 1, 2, 3, \dots, n$ を代入して集積します。

冪和3つの積の差分は、 $S_i(k) \cdot S_j(k) \cdot S_p(k) - S_i(k-1) \cdot S_j(k-1) \cdot S_p(k-1)$ です。冪和4つ以上の積の差分もこの発展形です。これらにより、下位冪和公式の積から上位冪和公式を構築することができます。用意するものは、 $S_i(k)$ と $S_i(k-1)$ の展開式形です。昇冪の順で記述します。

$$S_0(k) = k, \quad S_0(k-1) = -1 + k$$

$$S_1(k) = \frac{k}{2} + \frac{k^2}{2}, \quad S_1(k-1) = -\frac{k}{2} + \frac{k^2}{2}$$

$$S_2(k) = \frac{k}{6} + \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{3}, \quad S_2(k-1) = \frac{k}{6} - \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{3}$$

$$S_3(k) = \frac{k^2}{4} + \frac{k^3}{2} + \frac{k^4}{4}, \quad S_3(k-1) = \frac{k^2}{4} - \frac{k^3}{2} + \frac{k^4}{4}$$

4乗冪和以上のものは、各自で用意して下さい。2つの冪和積から上位冪和公式の構築方法は、私加藤や稲葉先生のもの参照して下さい。3つ以上の冪和積から上位冪和公式の構築を図ります。

1. 冪和三重積

(1) 0乗冪和三重積の差分から2乗冪和公式の構築

$$S_0(k) \cdot S_0(k) \cdot S_0(k) - S_0(k-1) \cdot S_0(k-1) \cdot S_0(k-1)$$

$$= (S_0(k))^3 - (S_0(k-1))^3$$

$$= k^3 - (k-1)^3 = 1 - 3k + 3k^2$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ を代入して集積します。

$$(S_0)^3 = S_0 - 3S_1 + 3S_2$$

$$n^3 = S_0 - 3S_1 + 3S_2$$

$$3S_2 = -S_0 + 3S_1 + n^3 = -n + 3 \cdot \left(\frac{n}{2} + \frac{n^2}{2}\right) + n^3 = \frac{n}{2} + \frac{3n^2}{2} + n^3$$

$$S_2 = \frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(2) 1乗冪和三重積の差分から5乗冪和公式の入手

$$(S_1(k))^3 - (S_1(k-1))^3 = \left(\frac{k}{2} + \frac{k^2}{2}\right)^3 - \left(-\frac{k}{2} + \frac{k^2}{2}\right)^3 = \frac{k^3}{4} + \frac{3}{4}k^5$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ を代入して集積します。

$$(S_1(n))^3 = \frac{1}{4}S_3 + \frac{3}{4}S_5$$

$$\begin{aligned} 3S_5 &= 4(S_1(n))^3 - S_3 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^3 - \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \\ &= 4 \cdot \frac{1}{8}n^3(n+1)^3 - \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1) \end{aligned}$$

$$S_5 = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1)$$

(3) 2乗冪和三重積から8乗冪和公式の入手

$$\begin{aligned} (S_2(k))^3 - (S_2(k-1))^3 &= \left(\frac{k}{6} + \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{3}\right)^3 - \left(\frac{k}{6} - \frac{k}{2} + \frac{k^3}{3}\right)^3 \\ &= \frac{1}{12}k^4 + \frac{7}{12}k^6 + \frac{1}{3}k^8 \end{aligned}$$

$$\text{従って、} (S_2(n))^3 = \frac{1}{12}S_4 + \frac{7}{12}S_6 + \frac{1}{3}S_8$$

$$S_4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1), \quad S_6 = \frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4 + 6n^3 - 3n + 1)$$

を既知とすると8乗冪和公式 S_8 を作り上げることができます。

(4) 1乗冪和四重積から7乗冪和公式の構築

$$(S_1(k))^4 - (S_1(k-1))^4 = \left(\frac{k}{2} + \frac{k^2}{2}\right)^4 - \left(-\frac{k}{2} + \frac{k^2}{2}\right)^4 = \frac{k^5}{2} + \frac{k^7}{2}$$

$$(S_1(n))^4 = \frac{1}{2}S_5 + \frac{1}{2}S_7$$

$$S_7 = \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^4 - \frac{1}{12}n(n+1)(2n+1)(2n^2+2n-1)$$
$$= \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)$$

このように複数の冪和公式の積から上位冪和公式を構築することができます。複数冪和の積や単数冪和の累乗の差分に伴う係数アルゴリズムを追跡中です。従って、冪和覚書最終章に至っていません。