平方根の正則連分数に関する考察（その５）

２００８年1月２３日

北海道岩見沢農業高校

加藤秀隆

０．はじめに

今回は、３の平方根の正則連分数の項番号を飛び飛びに飛ばしながら部分分数列を得る計算方法を紹介します。

１．一般項について

$\sqrt{3}$ の正則連分数は、$\frac{1}{0},\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{5}{3},\frac{7}{4},\frac{19}{11},\frac{26}{15},\frac{71}{41},\frac{97}{56},\frac{265}{153},\cdots$ です。

分子、分母を次のように同時に記述します。

$$1+0\sqrt{3},1+\sqrt{3},2+\sqrt{3},5+3\sqrt{3},7+4\sqrt{3},19+11\sqrt{3},26+15\sqrt{3},71+41\sqrt{3},97+56\sqrt{3},\cdots$$

これらを数列として眺めると、1 番地の $1+\sqrt{3}$ が公比的な振る舞いをしています。乗数を順に記述すると、

$$1+\sqrt{3},\frac{1+\sqrt{3}}{2},1+\sqrt{3},\frac{1+\sqrt{3}}{2},\cdots$$

そこで、乗数を $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ とすると一般項は、次のようになります。奇数番の項と偶数番の項で記述が異なります。$k \geq 0$

$$X_{2k}=2^{k}(\frac{1+\sqrt{3}}{2})^{2k} \qquad X_{2k+1}=2^{k+1}(\frac{1+\sqrt{3}}{2})^{2k+1}$$

ここで$\sqrt{2}$ での一般項作成をヒントにして、$\sqrt{3}$ の正則連分数の分子、分母の一般項を作ると、次のようになります。

$$X_{n}=x_{n}+y_{n}\sqrt{3} \quad ,\alpha=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \quad ,\overline{\alpha}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$$ とおくことにより、

$$x_{2k}=2^{k}\bullet\frac{\alpha^{2k}+\overline{\alpha}^{2k}}{2} \quad ,y_{2k}=2^{k}\bullet\frac{\alpha^{2k}-\overline{\alpha}^{2k}}{2\sqrt{3}}$$

$$x_{2k+1}=2^{k+1}\bullet\frac{\alpha^{2k+1}+\overline{\alpha}^{2k+1}}{2} \quad ,y_{2k+1}=2^{k+1}\bullet\frac{\alpha^{2k+1}-\overline{\alpha}^{2k+1}}{2\sqrt{3}}$$

２．項番号を飛ばす計算を導く方法

偶数番の項、奇数番の項の分子数 $x_{2k,}x_{2k+1}$ の奇数乗と偶数乗に分けそれに匹敵する分子数 y_{2k}, y_{2k+1} の計算をしていきます。その都度、行列計算を紹介します。

（1） 偶数番の項について

分子数 x_{2k} の奇数乗を計算します。

$$(x_{2k})^3 = \left(2^k \bullet \frac{\alpha^{2k} + \bar{\alpha}^{2k}}{2}\right)^3 = 2^{3k} \bullet \frac{\alpha^{6k} + \bar{\alpha}^{6k} + 3(\alpha\bar{\alpha})^{2k}(\alpha^{2k} + \bar{\alpha}^{2k})}{8}$$

$$= 2^{3k-2} \bullet \left(\frac{\alpha^{6k} + \bar{\alpha}^{6k}}{2} + 3 \bullet (-\frac{1}{2})^{2k} \bullet \frac{\alpha^{2k} + \bar{\alpha}^{2k}}{2}\right)$$

$$2^2 (x_{2k})^3 = 2^{3k}\left(\frac{x_{6k}}{2^{3k}} + 3 \bullet \frac{1}{2^{2k}} \bullet \frac{x_{2k}}{2^k}\right) = x_{3(2k)} + \binom{3}{1} x_{2k}$$

$$2^4 (x_{2k})^5 = x_{5(2k)} + \binom{5}{1} x_{3(2k)} + \binom{5}{2} x_{2k}$$

$$2^6 (x_{2k})^7 = x_{7(2k)} + \binom{7}{1} x_{5(2k)} + \binom{7}{2} x_{3(2k)} + \binom{7}{3} x_{2k}$$

$$2^8 (x_{2k})^9 = x_{9(2k)} + \binom{9}{1} x_{7(2k)} + \binom{9}{2} x_{5(2k)} + \binom{9}{3} x_{3(2k)} + \binom{9}{4} x_{2k}$$

$$\begin{pmatrix} x_{2k} \\ 2^2(x_{2k})^3 \\ 2^4(x_{2k})^5 \\ 2^6(x_{2k})^7 \\ 2^8(x_{2k})^9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \binom{3}{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \binom{5}{2} & \binom{5}{1} & 1 & 0 & 0 \\ \binom{7}{3} & \binom{7}{2} & \binom{7}{1} & 1 & 0 \\ \binom{9}{4} & \binom{9}{3} & \binom{9}{2} & \binom{9}{1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2k} \\ x_{3(2k)} \\ x_{5(2k)} \\ x_{7(2k)} \\ x_{9(2k)} \end{pmatrix}$$

逆行列を乗じて、次を得ます。詳しい解析をしていません。

$$\begin{pmatrix} x_{2k} \\ x_{3(2k)} \\ x_{5(2k)} \\ x_{7(2k)} \\ x_{9(2k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & 14 & -7 & 1 & 0 \\ 9 & -30 & 27 & -9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2k} \\ 2^2(x_{2k})^3 \\ 2^4(x_{2k})^5 \\ 2^6(x_{2k})^7 \\ 2^8(x_{2k})^9 \end{pmatrix}$$

$$x_{9(2k)}=9x_{2k}-30\cdot 2^2(x_{2k})^3+27\cdot 2^4(x_{2k})^5-9\cdot 2^6(x_{2k})^7+2^8(x_{2k})^9$$

において、$k=1,2$ としてみます。

$k=1\to x_2=2$

$$x_{18}=9\cdot 2-30\cdot 4\cdot 2^3+27\cdot 16\cdot 2^5-9\cdot 64\cdot 2^7+256\cdot 2^9$$

$$=18-960+13824-73728+131072=70226$$

$k=2\to x_4=7$

$$x_{36}=9\cdot 7-30\cdot 4\cdot 7^3+27\cdot 16\cdot 7^5-9\cdot 64\cdot 7^7+256\cdot 7^9$$

$$=63-41160+7260624-474360768+10330523392$$
$$=9863382151$$

関数電卓の計算の範囲を越えています。さらに、$k=3,4,5$ とすると、

$k=3\to x_6=26\to x_{54}=1385331749802026$

$k=4\to x_8=97\to x_{72}=19457261491333077360$

$k=5\to x_{10}=362\to x_{90}=2732811290842180206400562$

ところで、$x_{3(2k)}=-3x_{2k}+2^2(x_{2k})^3$ において $k=1$ として、

$$x_6=-3x_2+4(x_2)^3=-3\cdot 2+4\cdot 2^3=26$$

$k=3$ として、

$$x_{18}=-3x_6+4(x_6)^3=-3\cdot 26+4\cdot 26^3=70226$$

$k=9$ として、

$$x_{54}=-3x_{18}+4(x_{18})^3=-3\cdot 70226+4\cdot 70226^3=1385331749802026$$

のようにも求めることができます。

分母数 y_{2k} の奇数乗を計算します。

$$(y_{2k})^3=\left(2^k\cdot\frac{\alpha^{2k}-\bar{\alpha}^{2k}}{2\sqrt{3}}\right)^3=2^{3k}\cdot\frac{\alpha^{6k}-\bar{\alpha}^{6k}-3(\alpha\bar{\alpha})^{2k}(\alpha^{2k}+\bar{\alpha}^{2k})}{4\cdot 3\cdot 2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2^{3k-2}}{3}\left(\frac{\alpha^{6k}-\bar{\alpha}^{6k}}{2\sqrt{3}}-3(\alpha\bar{\alpha})^{2k}\cdot\frac{\alpha^{2k}-\bar{\alpha}^{2k}}{2\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{2^{3k-2}}{3}\left(\frac{y_{6k}}{2^{3k}} - 3\bullet(-\frac{1}{2})^{2k} \bullet \frac{y_{2k}}{2^{k}} \right)$$

$$= \frac{1}{2^2 \bullet 3}\left(y_{6k} - 3y_{2k} \right)$$

$$2^2 \bullet 3(y_{2k})^3 = y_{3(2k)} - \binom{3}{1} y_{2k}$$

$$2^4 \bullet 3^2 (y_{2k})^5 = y_{5(2k)} - \binom{5}{1} y_{3(2k)} + \binom{5}{2} y_{2k}$$

$$2^6 \bullet 3^3 (y_{2k})^7 = y_{7(2k)} - \binom{7}{1} y_{5(2k)} + \binom{7}{2} y_{3(2k)} - \binom{7}{3} y_{2k}$$

$$2^8 \bullet 3^4 (y_{2k})^9 = y_{9(2k)} - \binom{9}{1} y_{7(2k)} + \binom{9}{2} y_{5(2k)} - \binom{9}{3} y_{3(2k)} + \binom{9}{4} y_{2k}$$

$$\begin{pmatrix} y_{2k} \\ 2^2 \bullet 3(y_{2k})^3 \\ 2^4 \bullet 3^2 (y_{2k})^5 \\ 2^6 \bullet 3^3 (y_{2k})^7 \\ 2^8 \bullet 3^4 (y_{2k})^9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\binom{3}{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \binom{5}{2} & -\binom{5}{1} & 1 & 0 & 0 \\ -\binom{7}{3} & \binom{7}{2} & -\binom{7}{1} & 1 & 0 \\ \binom{9}{4} & -\binom{9}{3} & \binom{9}{2} & -\binom{9}{1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{2k} \\ y_{3(2k)} \\ y_{5(2k)} \\ y_{7(2k)} \\ y_{9(2k)} \end{pmatrix}$$

逆行列を乗じて、

$$\begin{pmatrix} y_{2k} \\ y_{3(2k)} \\ y_{5(2k)} \\ y_{7(2k)} \\ y_{9(2k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 14 & 7 & 1 & 0 \\ 9 & 30 & 27 & 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{2k} \\ 2^2 \bullet 3(y_{2k})^3 \\ 2^4 \bullet 3^2 (y_{2k})^5 \\ 2^6 \bullet 3^3 (y_{2k})^7 \\ 2^8 \bullet 3^4 (y_{2k})^9 \end{pmatrix}$$

ここでも様子を見てみましょう。

$$y_{9(2k)} = 9\bullet y_{2k} + 30\bullet 2^2 \bullet 3(y_{2k})^3 + 27\bullet 2^4 \bullet 3^2 (y_{2k})^5 + 9\bullet 2^6 \bullet 3^3 (y_{2k})^7 + 2^8 \bullet 3^4 (y_{2k})^9$$

において、$k = 1,2$ としてみます。

$$k = 1 \to y_2 = 1$$

$$y_{18} = 9\bullet 1 + 30\bullet 4\bullet 3\bullet 1^3 + 27\bullet 16\bullet 9\bullet 1^5 + 9\bullet 64\bullet 27\bullet 1^7 + 256\bullet 81\bullet 1^9$$

$$= 9 + 360 + 3888 + 15552 + 20736 = 40545$$

$k=2 \to y_4=4$

$y_{36}=9 \cdot 4+30 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4^3+27 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 4^5+9 \cdot 64 \cdot 27 \cdot 4^7+256 \cdot 81 \cdot 4^9$

$=36+23040+3981312+254803968+5435817984$

$=5694626340$

さらに、$k=3,4,5$ とすると、

$k=3 \to y_6=15 \to y_{54}=799821658665135$

$k=4 \to y_8=56 \to y_{72}=1123365515971409146080$

$k=5 \to y_{10}=209 \to y_{90}=1577789334412181408997025$

ここでも、$y_{3(2k)}=3y_{2k}+2^2 \cdot 3(y_{2k})^3$ において $k=1$ として、

$y_6=3y_2+12(y_2)^3=3 \cdot 1+12 \cdot 1^3=15$

$k=3$ として、

$y_{18}=3y_6+12(y_6)^3=3 \cdot 15+12 \cdot 15^3=40545$

$k=9$ として、

$y_{54}=3y_{18}+12(y_{18})^3=3 \cdot 40545+12 \cdot 40545^3=799821658665135$

のようにも求めることができます。

分子数の x_{2k} の偶数乗を計算します。

$$(x_{2k})^2=\left(2^k \cdot \frac{\alpha^{2k}+\bar{\alpha}^{2k}}{2}\right)^2=2^{2k} \cdot \frac{\alpha^{4k}+\bar{\alpha}^{4k}+2(\alpha\bar{\alpha})^{2k}}{2 \cdot 2}$$

$$=2^{2k-1}\left(\frac{\alpha^{4k}+\bar{\alpha}^{4k}}{2}+\frac{2}{2} \cdot (\alpha\bar{\alpha})^{2k}\right)=2^{2k-1}\left(\frac{x_{4k}}{2^{2k}}+(-\frac{1}{2})^{2k}\right)$$

$$=2^{2k-1}\left(\frac{x_{4k}}{2^{2k}}+\frac{1}{2^{2k}}\right)=2^{-1}(x_{4k}+1)$$

$$2(x_{2k})^2=x_{4k}+1=x_{2(2k)}+\frac{1}{2}\binom{2}{1}$$

$$2^3(x_{2k})^4=x_{4(2k)}+\binom{4}{1}x_{2(2k)}+\frac{1}{2}\binom{4}{2}$$

$$2^5(x_{2k})^6 = x_{6(2k)} + \binom{6}{1}x_{4(2k)} + \binom{6}{2}x_{2(2k)} + \frac{1}{2}\binom{6}{3}$$

$$2^7(x_{2k})^8 = x_{8(2k)} + \binom{8}{1}x_{6(2k)} + \binom{8}{2}x_{4(2k)} + \binom{8}{3}x_{2(2k)} + \frac{1}{2}\binom{8}{4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2(x_{2k})^2 \\ 2^3(x_{2k})^4 \\ 2^5(x_{2k})^6 \\ 2^7(x_{2k})^8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\binom{2}{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\binom{4}{2} & \binom{4}{1} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\binom{6}{3} & \binom{6}{2} & \binom{6}{1} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\binom{8}{4} & \binom{8}{3} & \binom{8}{2} & \binom{8}{1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_{4k} \\ x_{8k} \\ x_{12k} \\ x_{16k} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_{4k} \\ x_{8k} \\ x_{12k} \\ x_{16k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 9 & -6 & 1 & 0 \\ 1 & -16 & 20 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2(x_{2k})^2 \\ 2^3(x_{2k})^4 \\ 2^5(x_{2k})^6 \\ 2^7(x_{2k})^8 \end{pmatrix}$$

$$x_{16k} = 1 - 16 \bullet 2(x_{2k})^2 + 20 \bullet 2^3(x_{2k})^4 - 8 \bullet 2^5(x_{2k})^6 + 2^7(x_{2k})^8$$

$$k = 1 \rightarrow x_{16} = 1 - 16 \bullet 2(x_2)^2 + 20 \bullet 2^3(x_2)^4 - 8 \bullet 2^5(x_2)^6 + 2^7(x_2)^8$$

$$= 1 - 32 \bullet 2^2 + 160 \bullet 2^4 - 256 \bullet 2^6 + 128 \bullet 2^8$$
$$= 18817$$

$$k = 2 \rightarrow x_{32} = 1 - 16 \bullet 2(x_4)^2 + 20 \bullet 2^3(x_4)^4 - 8 \bullet 2^5(x_4)^6 + 2^7(x_4)^8$$

$$= 1 - 32 \bullet 7^2 + 160 \bullet 7^4 - 256 \bullet 7^6 + 128 \bullet 7^8$$
$$= 708158977$$

$k = 3 \rightarrow x_{48}$ を作ってみましょう。$x_{48} = 26650854921601$ です。

これらに匹敵する分母数の計算を次のようにします。

$$2x_{4k}y_{4k}=2\bullet 2^{2k}\bullet\frac{\alpha^{4k}+\bar{\alpha}^{4k}}{2}\bullet 2^{2k}\bullet\frac{\alpha^{4k}-\bar{\alpha}^{4k}}{2\sqrt{3}}=2^{4k}\bullet\frac{\alpha^{8k}-\bar{\alpha}^{8k}}{2\sqrt{3}}=y_{8k}$$

$$2x_{8k}y_{4k}=2\bullet 2^{4k}\bullet\frac{\alpha^{8k}+\bar{\alpha}^{8k}}{2}\bullet 2^{2k}\bullet\frac{\alpha^{4k}-\bar{\alpha}^{4k}}{2\sqrt{3}}$$

$$=2^{6k}\bullet\frac{\alpha^{12k}-\bar{\alpha}^{12k}-(\alpha\bar{\alpha})^{4k}(\alpha^{4k}-\bar{\alpha}^{4k})}{2\sqrt{3}}$$

$$=2^{6k}\left(\frac{y_{12k}}{2^{6k}}-(-\frac{1}{2})^{4k}\bullet\frac{y_{4k}}{2^{2k}}\right)$$

$$=y_{12k}-y_{4k}$$

$$2x_{12k}y_{4k}=y_{16k}-y_{8k}$$

$$2x_{16k}y_{4k}=y_{20k}-y_{12k}$$

行列表記すると、

$$2y_{4k}\begin{pmatrix}1\\x_{4k}\\x_{8k}\\x_{12k}\\x_{16k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\-1&0&1&0&0\\0&-1&0&1&0\\0&0&-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_{4k}\\y_{8k}\\y_{12k}\\y_{16k}\\y_{20k}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}y_{4k}\\y_{8k}\\y_{12k}\\y_{16k}\\y_{20k}\end{pmatrix}=2y_{4k}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\\frac{1}{2}&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\\frac{1}{2}&0&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x_{4k}\\x_{8k}\\x_{12k}\\x_{16k}\end{pmatrix}$$

$$=2y_{4k}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\\frac{1}{2}&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\\frac{1}{2}&0&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\-1&1&0&0&0\\1&-4&1&0&0\\-1&9&-6&1&0\\1&-16&20&-8&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2(x_{2k})^2\\2^3(x_{2k})^4\\2^5(x_{2k})^6\\2^7(x_{2k})^8\end{pmatrix}$$

$$=y_{4k}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\-2&2&0&0&0\\3&-8&2&0&0\\-4&20&-12&2&0\\5&-40&42&-16&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2(x_{2k})^2\\2^3(x_{2k})^4\\2^5(x_{2k})^6\\2^7(x_{2k})^8\end{pmatrix}$$

$$y_{20k}=y_{4k}(5-40\bullet 2(x_{2k})^2+42\bullet 2^3(x_{2k})^4-16\bullet 2^5(x_{2k})^6+2\bullet 2^7(x_{2k})^8)$$

$$k=1\rightarrow y_{20}=y_4(5-40\bullet 2(x_2)^2+42\bullet 2^3(x_2)^4-16\bullet 2^5(x_2)^6+2\bullet 2^7(x_2)^8)$$

$$=4(5-80\bullet 2^2+336\bullet 2^4-512\bullet 2^6+256\bullet 2^8)$$
$$=151316$$

$$k=2\rightarrow y_{40}=y_8(5-40\bullet 2(x_4)^2+42\bullet 2^3(x_4)^4-16\bullet 2^5(x_4)^6+2\bullet 2^7(x_4)^8)$$

$$=56(5-80\bullet 7^2+336\bullet 7^4-512\bullet 7^6+256\bullet 7^8)$$
$$=79315912984$$

（2） 奇数番の項について

分子数、分母数を奇数乗します。

$$(x_{2k+1})^3=\left(2^{k+1}\bullet\frac{\alpha^{2k+1}+\overline{\alpha}^{2k+1}}{2}\right)^3$$

$$=2^{3k+3}\bullet\frac{\alpha^{3(2k+1)}+\overline{\alpha}^{3(2k+1)}+3(\alpha\overline{\alpha})^{2k+1}(\alpha^{2k+1}+\overline{\alpha}^{2k+1})}{4\bullet 2}$$

$$=2^{3k+1}\left(\frac{\alpha^{3(2k+1)}+\overline{\alpha}^{3(2k+1)}}{2}+3\bullet(-\frac{1}{2})^{2k+1}\bullet\frac{\alpha^{2k+1}+\overline{\alpha}^{2k+1}}{2}\right)$$

$$=2^{3k+1}\left(\frac{x_{3(2k+1)}}{2^{3k+2}}+3\bullet(-1)^{2k+1}\bullet\frac{1}{2^{2k+1}}\bullet\frac{x_{2k+1}}{2^{k+1}}\right)$$

$$=2^{-1}(x_{3(2k+1)}-3x_{2k+1})$$

$$2(x_{2k+1})^3=x_{3(2k+1)}-\binom{3}{1}x_{2k+1}$$

$$2^2(x_{2k+1})^5=x_{5(2k+1)}-\binom{5}{1}x_{3(2k+1)}+\binom{5}{2}x_{2k+1}$$

$$2^3(x_{2k+1})^7 = x_{7(2k+1)} - \binom{7}{1}x_{5(2k+1)} + \binom{7}{2}x_{3(2k+1)} - \binom{7}{3}x_{2k+1}$$

$$2^4(x_{2k+1})^9 = x_{9(2k+1)} - \binom{9}{1}x_{7(2k+1)} + \binom{9}{2}x_{5(2k+1)} - \binom{9}{3}x_{3(2k+1)} + \binom{9}{4}x_{2k+1}$$

$$\begin{pmatrix} x_{2k+1} \\ 2(x_{2k+1})^3 \\ 2^2(x_{2k+1})^5 \\ 2^3(x_{2k+1})^7 \\ 2^4(x_{2k+1})^9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\binom{3}{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \binom{5}{2} & -\binom{5}{1} & 1 & 0 & 0 \\ -\binom{7}{3} & \binom{7}{2} & -\binom{7}{1} & 1 & 0 \\ \binom{9}{4} & -\binom{9}{3} & \binom{9}{2} & -\binom{9}{1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2k+1} \\ x_{3(2k+1)} \\ x_{5(2k+1)} \\ x_{7(2k+1)} \\ x_{9(2k+1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{2k+1} \\ x_{3(2k+1)} \\ x_{5(2k+1)} \\ x_{7(2k+1)} \\ x_{9(2k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 14 & 7 & 1 & 0 \\ 9 & 30 & 27 & 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2k+1} \\ 2(x_{2k+1})^3 \\ 2^2(x_{2k+1})^5 \\ 2^3(x_{2k+1})^7 \\ 2^4(x_{2k+1})^9 \end{pmatrix}$$

$$(y_{2k+1})^3 = \left(2^{k+1} \bullet \frac{\alpha^{2k+1} - \overline{\alpha}^{2k+1}}{2\sqrt{3}}\right)^3$$

$$= 2^{3k+3} \bullet \frac{\alpha^{3(2k+1)} - \overline{\alpha}^{3(2k+1)} - 3(\alpha\overline{\alpha})^{2k+1}(\alpha^{2k+1} - \overline{\alpha}^{2k+1})}{4 \bullet 2 \bullet 3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2^{3k+1}}{3}\left(\frac{\alpha^{3(2k+1)} - \overline{\alpha}^{3(2k+1)}}{2\sqrt{3}} - 3 \bullet (-\frac{1}{2})^{2k+1} \bullet \frac{\alpha^{2k+1} - \overline{\alpha}^{2k+1}}{2\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{2^{3k+1}}{3}\left(\frac{y_{3(2k+1)}}{2^{3k+2}} - 3 \bullet (-1)^{2k+1} \bullet \frac{1}{2^{2k+1}} \bullet \frac{y_{2k+1}}{2^{k+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{6}(y_{3(2k+1)} + 3y_{2k+1})$$

$$6(y_{2k+1})^3 = y_{3(2k+1)} + 3y_{2k+1} = y_{3(2k+1)} + \binom{3}{1} y_{2k+1}$$

$$6^2(y_{2k+1})^5 = y_{5(2k+1)} + \binom{5}{1} y_{3(2k+1)} + \binom{5}{2} y_{2k+1}$$

$$6^3(y_{2k+1})^7 = y_{7(2k+1)} + \binom{7}{1} y_{5(2k+1)} + \binom{7}{2} y_{3(2k+1)} + \binom{7}{3} y_{2k+1}$$

$$6^4(y_{2k+1})^9 = y_{9(2k+1)} + \binom{9}{1} y_{7(2k+1)} + \binom{9}{2} y_{5(2k+1)} + \binom{9}{3} y_{3(2k+1)} + \binom{9}{4} y_{2k+1}$$

$$\begin{pmatrix} y_{2k+1} \\ 2 \bullet 3(y_{2k+1})^3 \\ 2^2 \bullet 3^2 (y_{2k+1})^5 \\ 2^3 \bullet 3^3 (y_{2k+1})^7 \\ 2^4 \bullet 3^4 (y_{2k+1})^9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \binom{3}{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \binom{5}{2} & \binom{5}{1} & 1 & 0 & 0 \\ \binom{7}{3} & \binom{7}{2} & \binom{7}{1} & 1 & 0 \\ \binom{9}{4} & \binom{9}{3} & \binom{9}{2} & \binom{9}{1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{2k+1} \\ y_{3(2k+1)} \\ y_{5(2k+1)} \\ y_{7(2k+1)} \\ y_{9(2k+1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_{2k+1} \\ y_{3(2k+1)} \\ y_{5(2k+1)} \\ y_{7(2k+1)} \\ y_{9(2k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & 14 & -7 & 1 & 0 \\ 9 & -30 & 27 & -9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{2k+1} \\ 2 \bullet 3(y_{2k+1})^3 \\ 2^2 \bullet 3^2 (y_{2k+1})^5 \\ 2^3 \bullet 3^3 (y_{2k+1})^7 \\ 2^4 \bullet 3^4 (y_{2k+1})^9 \end{pmatrix}$$

$$(x_{2k+1})^2 = \left(2^{k+1} \bullet \frac{\alpha^{2k+1} + \overline{\alpha}^{2k+1}}{2} \right)^2 = 2^{2k+2} \bullet \frac{\alpha^{4k+2} + \overline{\alpha}^{4k+2} + 2(\alpha\overline{\alpha})^{2k+1}}{4}$$

$$= 2^{2k+1} \left(\frac{\alpha^{4k+2} + \overline{\alpha}^{4k+2}}{2} + (\alpha\overline{\alpha})^{2k+1} \right)$$

$$= 2^{2k+1} \left(\frac{x_{4k+2}}{2^{2k+1}} + (-\frac{1}{2})^{2k+1} \right)$$

$$= x_{4k+2} - 1$$

$$(x_{2k+1})^2 = x_{2(2k+1)} - 1 = x_{2(2k+1)} - \frac{1}{2} \binom{2}{1}$$

$$2(x_{2k+1})^4 = x_{4(2k+1)} - \binom{4}{1}x_{2(2k+1)} + \frac{1}{2}\binom{4}{2}$$

$$2^2(x_{2k+1})^6 = x_{6(2k+1)} - \binom{6}{1}x_{4(2k+1)} + \binom{6}{2}x_{2(2k+1)} - \frac{1}{2}\binom{6}{3}$$

$$2^3(x_{2k+1})^8 = x_{8(2k+1)} - \binom{8}{1}x_{6(2k+1)} + \binom{8}{2}x_{4(2k+1)} - \binom{8}{3}x_{2(2k+1)} + \frac{1}{2}\binom{8}{4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ (x_{2k+1})^2 \\ 2(x_{2k+1})^4 \\ 2^2(x_{2k+1})^6 \\ 2^3(x_{2k+1})^8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\binom{2}{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\binom{4}{2} & -\binom{4}{1} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\binom{6}{3} & \binom{6}{2} & -\binom{6}{1} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\binom{8}{4} & -\binom{8}{3} & \binom{8}{2} & -\binom{8}{1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_{2(2k+1)} \\ x_{4(2k+1)} \\ x_{6(2k+1)} \\ x_{8(2k+1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_{2(2k+1)} \\ x_{4(2k+1)} \\ x_{6(2k+1)} \\ x_{8(2k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 16 & 20 & 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ (x_{2k+1})^2 \\ 2(x_{2k+1})^4 \\ 2^2(x_{2k+1})^6 \\ 2^3(x_{2k+1})^8 \end{pmatrix}$$

$$x_{2k+1}y_{2k+1} = 2^{k+1} \bullet \frac{\alpha^{2k+1} + \overline{\alpha}^{2k+1}}{2} \bullet 2^{k+1} \bullet \frac{\alpha^{2k+1} - \overline{\alpha}^{2k+1}}{2\sqrt{3}}$$

$$= 2^{2k+1} \bullet \frac{\alpha^{4k+2} - \overline{\alpha}^{4k+2}}{2\sqrt{3}}$$

$$= y_{4k+2} = y_{2(2k+1)}$$

$$x_{3(2k+1)}y_{2k+1} = y_{4(2k+1)} + y_{2(2k+1)}$$

$$x_{5(2k+1)}y_{2k+1} = y_{6(2k+1)} + y_{4(2k+1)}$$

$$x_{7(2k+1)}y_{2k+1} = y_{8(2k+1)} + y_{6(2k+1)}$$

$$x_{9(2k+1)}y_{2k+1} = y_{10(2k+1)} + y_{8(2k+1)}$$

$$y_{2k+1}\begin{pmatrix} x_{2k+1} \\ x_{3(2k+1)} \\ x_{5(2k+1)} \\ x_{7(2k+1)} \\ x_{9(2k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{2(2k+1)} \\ y_{4(2k+1)} \\ y_{6(2k+1)} \\ y_{8(2k+1)} \\ y_{10(2k+1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_{2(2k+1)} \\ y_{4(2k+1)} \\ y_{6(2k+1)} \\ y_{8(2k+1)} \\ y_{10(2k+1)} \end{pmatrix} = y_{2k+1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{2k+1} \\ x_{3(2k+1)} \\ x_{5(2k+1)} \\ x_{7(2k+1)} \\ x_{9(2k+1)} \end{pmatrix}$$

参考にした文献はありません。