順列や円順列のちょっとしたアイデア

2010 年 6 月 22 日
北海道岩見沢農業高校
加藤秀隆

０．はじめに

順列や円順列について私なりのアイデアを紹介します。なにげなく 30 年近く生徒に教えてきました。

１．順列

基本的には、P（Permutation）記号による順列計算については、計算自体は生徒に教えますが、実際の授業では使っていません。○（マル）計算と称して丸の中に数を書き込み、掛け算処理（積の法則）させています。階乗計算は、重複順列計算や二項定理、多項定理における係数のピンポイント計算に用いています。

男子 4 人と女子 2 人の計 6 人が横一列に並ぶとき、次の場合の数を求めたい。

(1)　6 人全体の場合
(2)　両端に女子が並ぶ場合
(3)　両端に男子が並ぶ場合
(4)　女子 2 人が隣り合って（続いて）並ぶ場合
(5)　男子 4 人が隣り合って（続いて）並ぶ場合
(6)　女子 2 人の間に男子 1 人が並ぶ場合

(1)　6 人全員を並べることより、⑥⑤④③②①=720 通り
$6!=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$ 通り

(2)　まず両端に女子 2 人を並べ、残っている男子 4 人全員を女子 2 人の間にフリーに並べるとよいので，　②④③②①①=48 通り
${}_2P_2\times4!=2\cdot1\times4\cdot3\cdot2\cdot1=48$ 通り

(3)　まず両端に男子を並べ、残っている男子 2 人と女子 2 人の計 4 人を女子 2 人の間に自由に並べるとよいので（以外に生徒は、間違いますね。）
④④③②①③=288 通り
${}_4P_2\times4!=4\cdot3\times4\cdot3\cdot2\cdot1=288$ 通り
間違う例→④②①②①③=48 通り→勢いで、残っている男子 2 人から中央部に並べてしまう。

(4)　教科書での扱いは、隣り合う女子生徒を必ず 1 まとめの 1 人にして、男子 4 人と合わせ計 5 人全員を並べる順列を作り、そのあと 1 まとめになっている女子をその場所で並び変えをさ

せます。

$$5!\times 2! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\times 2\cdot 1 = 240\text{通り}$$

女子、男子をそれぞれ別々に並ばせます。(私と同じアイデアで授業展開されている方がおられると思ってきました。)

女子 2 人→②①

男子 4 人→④③②①×5=240 通り(全部を掛け算処理します。)

∧∧∧　∧∧

女子 2 人は、せっかく隣り合っているのでそのままセットにして、割り込み(5 通り、実際は ${}_5C_1 = 5$)させて、最後にかけます。階乗計算を意識すると、

$$2!\times 4!\times 5 = 2\cdot 1\times 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\times 5 = 240\text{通り}$$

(5) 教科書に従うと隣り合う男子 4 人を 1 まとめにして、女子 2 人との計 3 人の順列を考えてから、男子がいる場所で男子 4 人の並び変えを考えて、

$$3!\times 4! = 3\cdot 2\cdot 1\times 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 144\,(\text{通り})$$

になります。

ここでも男子、女子をそれぞれ別々に並ばせます。

男子 4 人→④③②①

女子 2 人→②①×3=144 通り(私は、この書き方で正解にしています。)

∧∧∧

隣り合っている男子 4 人のセットを割り込ませ(3 通り)ます。

階乗計算を意識すると、$4!1\times 2!\times 3 = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\times 2\cdot 1\times 3 = 144$(通り)

(6) 女男女→②④①

男 3 人→③②①×4=192 通り

∧∧∧∧女男女をセットとして割り込ませ(4 通り)です。

2．円順列

男子 4 人女子 2 人の計 2 人が手をつないで輪を作るとき、次の場合の数を求めたい。

(1)6 人全体のつなぎ方　　(2)女子 2 人が隣り合って(続いての)つなぎ方

(3)女子 2 人が向い合せになるつなぎ方　　(4)女子 2 人の間に男子 1 人を挟んでつなぐつなぎ方

円順列を作る場合は、公式を意識しません。円形の周りに○を置きながら、円形の配置の回転を止めるために一番上の○に斜線を入れるか、塗りつぶしをさせます(座席指定です)。3 人と 4 人が手をつなぐ輪についてのプリントを用意して、20 分ほど時間をかけて座席指定(指定席)のアイデアをまとめています。プリントには、3 人では 6 通りの輪、4 人では 24 通りの輪をあらかじめ書いてあります。回転を考えたとき同じ輪は同じ手つなぎだという判定を次々にさせて

いきます。手つなぎなので生徒は、納得しながら作業をしていきます。3 人のときは、2 通り 4 人のときは、6 通りが残ります。

(1) ● ① ●は、特定の男子または女子にします。

⑤ ② 残りの 5 人により $5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120$ 通り

④ ③ =120 通り（私は、この書き方で正解にしています。）

(2) 女子 1 女子 2 は、ここにいてもらいます。

Δ ●Δ

④ ① 最後に 2 つのΔのどちらかに女子 2 の生徒を割り込みさせます。

③ ② ×2=48 通り（私は、この書き方で正解にしています。）

男子 1 を固定する方法もあります。こちらのほうが応用の範囲が広まります。

男子 1 女子 2 人は、ここで並んで待機します。

Δ ● Δ

③ ① 女子 2 人の割り込み(Δ4 通り)

Δ ② Δ ×②①×4=48 通り（私はこの書き方で了解しています。）

※男子 4 人、女子 3 人の計 7 人が手をつないで輪を作るとき、女子 3 人が続いて手をつないでいるのは何通りあるか。

男子 1 女子 3 人は、ここで並んで待機します。

Δ ● Δ

③ ① 女子 3 人割り込み(Δ4 通り)

Δ ② Δ ×③②①×4=144 通り

(3) 女子 1

●

④ ①

③ ↓↓ ② =24 通り

●女子 2

(4) 女子 男子 女子 ←ポイントは、この女子男子女子の居場所の指定です。

② ④ ①

③ ② ① =48 通り

男 男 男

公式$(n-1)!$は、意識的に使用していません。●印は、座席指定のもとに固定します。問題文により●には都合のいいように父や母、兄、姉などと生徒に決めさせています。生徒の勘の良さにその都度感心させられます。

参考文献

数研通信：2004 年 12 月号「後から入れる円順列と順列」楠田　貴至

（兵庫県立武庫荘総合高等学校）

（2010 年 6 月 15 日に拝読しました。）