第83回　数学教育実践研究会　実践レポート【教材編】

『大学受験に必要な重要項目の整理（1）～面積公式について』

小松　弘直

残り受験まで1ヶ月切った時に、受験内容に直結する内容として何がいいかと考えたときに頭にふと思った内容をまとめました。現在大学受験の通信添削指導をしていますが、多くの受験生が盲点にしているのが,

「入試問題で公式をどのように使うか」

であると私は日々感じています。それであれば, 基本事項・知識の使い方を正しく学び, 問題演習することで数学の実力は自然とついてくると思い, このテキストを作成しました。

第1回目は、センター試験のみならず毎年出題が高い面積公式を教科書レベルからスタートし, 大学入試レベルへと段階ごとに整理しました。

本テキストは, 以下のような流れでまとめています。

- **基本事項の確認**・・・押さえるべき基本事項をどう使うかを説明しています。
- **受験数学で押さえるべき重要事項**・・・入試で言われる標準問題, 応用・発展問題を解く際に必要な知識をまとめています。
- **難関大学に必要な知識**・・・公式においては, かなり高いレベルの知識を押さえるべきことがあります。ここでは, 難関大学に必要な知識を習得すべき内容をまとめています。

また, 問題配列は, 以下のように4段階でまとめています。

- Hop 問題・・・教科書レベルの問題
- Step 問題・・・教科書レベル～標準問題（大学入試では基本問題)。
- Jump 問題・・・大学入試でいう標準問題が中心
- Hi Jump 問題・・・大学入試でいう応用・発展問題が中心

§ 1)　面積公式の使い方

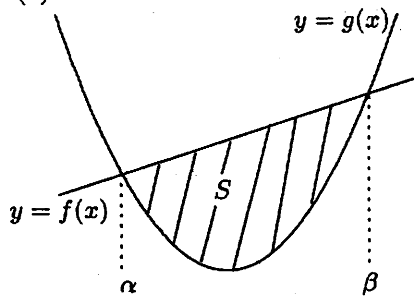
基本事項の確認 1

2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の囲まれる部分の面積を S とする。求める面積 S は,

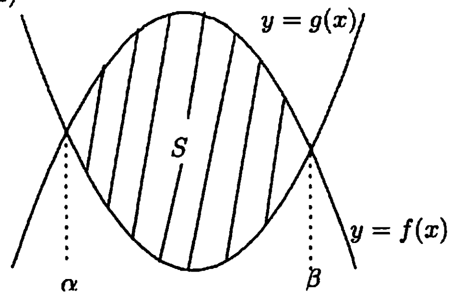
$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta}\{f(x)-g(x)\}\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}$$

となります。$f(x)-g(x)=0$ の解が α,β のとき,$f(x)-g(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解ができます。これが重要です。さて, この公式が使える 2 つの形を押さえましょう。

(1)



(2)



それでは, まずは教科書レベルの問題からスタートしましょう。

Hop 問題

【1】次の定積分の値を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int_{-2}^{4}(x^2-2x-8)dx$

(2)　$\displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{3}}(1-2x-3x^2)dx$

(基本問題)

【2】次の曲線や直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1)　$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}, y=x^2-x$

(2)　$y=x^2-2x-1,\quad y=-x^2+2x-2$

(基本問題)

さて次は, この基本事項を活かしてどのようにして入試問題を解くかを考えましょう。少しずつレベルを上げてチャレンジしていきましょう。

Step 問題

【3】2 つの放物線 $C_1: y=x^2, C_2: y=-\dfrac{1}{2}x^2+3x+\dfrac{9}{2}$ がある。C_1 と C_2 の 2 つの交点を通る直線を l_1 とする。以下の各問に答えよ。

(1)　l_1 の式を求めよ。

(2)　C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S_1 とし,C_1 と l_1 で囲まれた図形の面積を S_2 とする。この 2 つの面積の比 $S_1:S_2$ を求めよ。

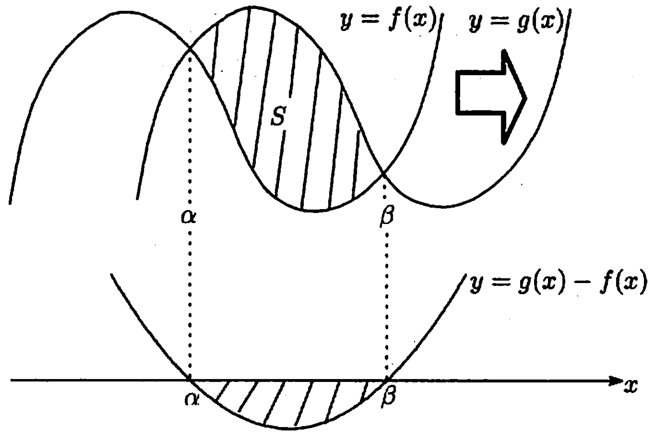
(2012. 高崎経済大一一部省略)

基本事項の確認２

曲線 $y=f(x)$ を x 軸方向に平行移動した曲線を $y=g(x)$ とする。2 曲線で囲まれる部分の面積を S とするとき,

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta}\{g(x)-f(x)\}\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}$$

となります。



さて, これに関した問題にチャレンジしてみましょう。なんとそれは, センター試験です。

【4】 $a>0$ として,x の関数 $f(x)$ と $g(x)$ を

$$f(x)=x^3-x \qquad g(x)=f(x-a)+2a$$

とする。

(1)　二つの関数の差 $g(x)-f(x)$ は,$g(x)-f(x)=a(\boxed{\text{アイ}}x^2+\boxed{\text{ウ}}ax-a^2+\boxed{\text{エ}})$ と表され,x の方程式 $g(x)-f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつような a の範囲は,

$$0<a<\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$$

である。また,$g(x)-f(x)$ は,$x=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ のとき, 最大値 $\dfrac{a}{\boxed{\text{ケ}}}(\boxed{\text{コサ}}-a^{\boxed{\text{シ}}})$ をとる。

(2)　(1) で得られた最大値を $h(a)=\dfrac{a}{\boxed{\text{ケ}}}(\boxed{\text{コサ}}-a^{\boxed{\text{シ}}})$ と表す。$h(a)$ を a の関数と考えるとき,$h(a)$ は $a=\boxed{\text{ス}}$ で最大値 $\boxed{\text{セ}}$ をとる。

(3)　$a=\sqrt{3}$ のとき, 曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ の二つの交点 P,Q の座標は P$(\boxed{\text{ソ}},0)$,Q$(\sqrt{\boxed{\text{タ}}},\boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}})$

であり, 二つの曲線 $y=f(x), y=g(x)$ で囲まれた部分の面積 S は $S=\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。さらに, 交点 P$(\boxed{\text{ソ}},0)$ における曲線 $y=f(x)$ の接線と曲線 $y=g(x)$ の接線がなす角を θ $\left(0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると,$\tan\theta=\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ である。

(2007. センター試験・本試験)

$\frac{1}{6}$ 公式という面積を使う際に, 注意すべき 3 つの項目があります。

面積公式を使うときに注意する３つの項目

2 つの曲線に囲まれる図形の面積を考える際は,

① 最高次数

② 最高次数の項の係数

③ 共有点の x 座標

に着目しましょう。

さて, 次は **Jump 問題** を解く際に, 重要な重要事項を整理していきましょう。

受験数学で押さえるべき重要事項１

絶対値を含む曲線と直線とで囲む面積を求める問題では, 面積公式

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

を用いると, 計算量を減らすことができます。

Jump 問題

【5】 m を正の実数とする。xy 平面において $y = |2x(x-2)|$ で表される曲線を C, $y = mx$ で表される直線を l とする。

(1) C と l の共有点が 3 個であるような m の値の範囲を求めよ。

(2) m が (1) で求めた範囲にあるとき,C と l で囲まれる部分の面積 S を m の式で表せ。

(3) m が (1) で求めた範囲で変化するとき,C と l で囲まれた部分の面積 S の増減表をかいて,S を最小にする m の値を求めよ。

(2011. 関西学院大)

MEMO

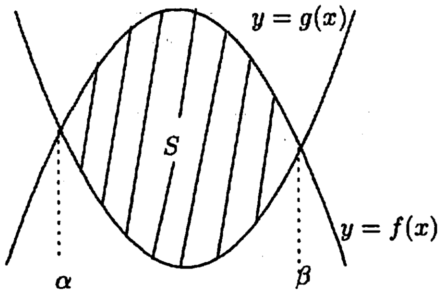
受験数学で押さえるべき重要事項２

面積公式

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$(x-\alpha)(x-\beta)=0$ は２次方程式であり, その２つの解は α,β です。ここでのポイントは、面積公式と解と係数の関係とが関連しています。

解　説



２つの放物線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ を連立すると, 方程式

$$f(x)-g(x)=0\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot①$$

となります。

①が２次方程式となるとき, 異なる２つの実数解をもてばよい。よって, (①の判別式) >0 となればよいです。

また,①が異なる２つの実数解を持つことから,2つの解を α,β とおくと, 解と係数の関係より

$$\alpha+\beta,\alpha\beta$$

の値が求まります。よって,$y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれる面積を S とおくと,

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\{f(x)-g(x)\}\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot②$$

となり,$\beta-\alpha=\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}^{\frac{1}{2}}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot③$ なので,②,③より,

$$\int_{\alpha}^{\beta}\{f(x)-g(x)\}\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}}$$

となります。

【6】(1)　次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(2)　放物線 $y=x^2+px+q$ を C_1 とし, 放物線 $y=-x^2$ を C_2 とする。C_1 は直線 $y=2x$ 上に頂点をもち,C_2 と相異なる２点で交わるとする。C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積が最大となる実数 p,q の値と, そのときの面積を求めよ。

(2011. 琉球大)

受験数学で押さえるべき重要事項３

図形を分割して考える問題の際に、面積公式を用いて解くこともあります。

今回は, 面積公式を使わない問題を用いてどのようにして図形を分割するかを考えてみましょう。

【7】座標平面上において, 点 A(0,1) を中心とし原点 O を通る円 C_1 について, 点 B$(0,-1)$ から引いた２本の接線の接点を P,Q とする。ただし, 点 P の x 座標は正とする。さらに,y 軸に関して対称な放物線 C_2 が直線 BP と直線 BQ にそれぞれ点 P と点 Q で接するものとする。

(1)　２点 P,Q の座標を求めよ。

(2)　放物線 C_2 を表す方程式を求めよ。

(3)　点 A から放物線 C_2 上の各点までの距離は１以上であることを示せ。

(4)　円 C_1 の原点 O を含む弧 PQ と放物線 C_2 で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

(2011. 宮崎大)

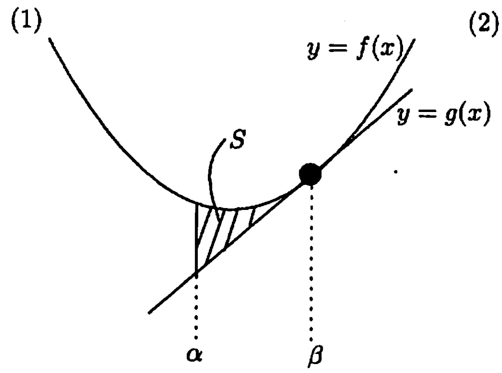
最後に,$\frac{1}{6}$ 公式以外の面積公式を紹介します。しかし, 記述式では使ってしまうと「説明不足」と言われます。マーク形式の問題で活用しましょう。

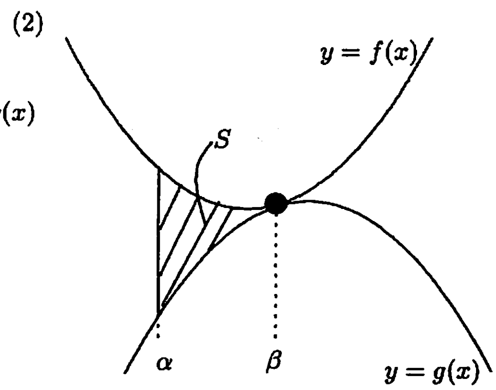
面積公式 ①

２つの曲線 $y=f(x)$,$y=g(x)$ において,$x=\beta$ において２つの曲線が接するとき囲まれる面積を S とおくと,

$$\boxed{S=\frac{|a|}{3}(\beta-\alpha)^3}$$

となります。





【8】 c を定数とし, 関数 $f(x), g(x)$ を

$$f(x)=-x+c,\quad g(x)=-x^2+2x+3$$

と定める。また, 直線 $y=f(x)$ は放物線 $y=g(x)$ の接線であるとする。

(1)　c の値を求めよ。

(2)　直線 $y=f(x)$, 放物線 $y=g(x)$, および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

(2010. 室蘭工業大)

面積公式 ②

下の図のように, 放物線 $y=ax^2+bx+c(a \neq 0)$ と 2 つの接線 l, m を考えます。
2 つの接線の交点の座標は

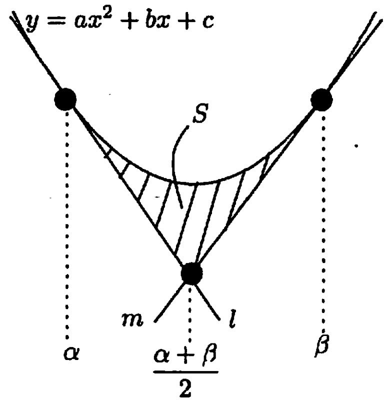
$$\boxed{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, a\alpha\beta\right)}$$

となります。

よって, 放物線 $y=ax^2+bx+c(a \neq 0)$ と 2 つの接線 l, m で囲まれる面積 S は,

$$\boxed{S=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3}$$

となります。



【9】点 P から放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ へ 2 本の接線が引けるとき,2 本の接点 A, B とし, 線分 PA, PB およびこの放物線で囲まれた図形の面積を S とする。PA, PB が直交するときの S の最小値を求めよ。

(2009. 東京工業大)

【10】a を正の実数,b と c を実数とし,2 点 P$(-1,\ 3)$,Q$(1,4)$ を通る放物線 $y=ax^2+bx+c$ を C とおく。C 上の 2 点 P,Q における C の接線をそれぞれ l_1, l_2 とする。

(1) b の値を求め,c を a で表せ。

(2) l_1 と l_2 の交点の座標を a で表せ。

(3) 放物線 C と接線 l_1, l_2 で囲まれる図形の面積が 1 に等しくなるような a の値を求めよ。

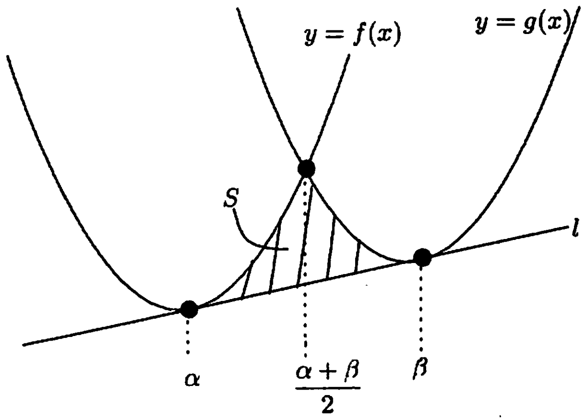
(2011. 北海道大)

面積公式③

2つの曲線 $y=f(x), y=g(x)$ において,2つの曲線と接線 l とが接した時に囲まれた面積 S とおくと

$$\boxed{S=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3}$$

となります。ここでの直線 l は,2つの曲線の共通接線です。



【11】x についての4次の整式 $f(x)$ は, 次の条件 i), ii),iii) を満たしている。

i) $f(x)$ の4次の係数は1である。

ii) $f(1)=0, f(2)=-1$ である。

iii) $f(x)$ を x^2-3x で割った余りは $7x+5$ である。

$f(x)$ を x^2-3x+2 で割ったときの商を $g(x)$, 余りを $k(x)$ とするとき, 次の各問に答えよ。

(1) $k(x)$ を求めよ。

(2) $g(x)$ を求めよ。

(3) 座標平面上において,3つの関数 $y=x^2-3x+2, y=g(x), y=k(x)$ のグラフで囲まれた部分の面積を求めよ。

(2008. 宮崎大)

【1】次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{4}(x^2-2x-8)dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{3}}(1-2x-3x^2)dx$

(基本問題)

解　答

(1)
$$\begin{aligned}\int_{-2}^{4}(x^2-2x-8)dx &= \int_{-2}^{4}(x-4)(x+2)dx\\ &= \frac{1}{6}\{4-(-2)\}^3dx\\ &= \frac{1}{6}\cdot 6^3\\ &= 36 \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \text{(答)}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{\frac{1}{3}}(1-2x-3x^2)dx &= -\int_{-1}^{\frac{1}{3}}(3x-1)(x+1)dx\\ &= -3\int_{-1}^{\frac{1}{3}}(x-\frac{1}{3})(x+1)dx\\ &= \frac{3}{6}\left\{\frac{1}{3}-(-1)\right\}^3\\ &= \frac{3}{6}\cdot\frac{64}{27}\\ &= \frac{32}{27} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \text{(答)}\end{aligned}$$

※ (1) の 別解

今回考えている面積について利用して考えてみましょう。定積分を面積として理解できれば以下のように解くこともできます。(1) を例にすると,x 軸方向に 2 平行移動すると考えて式変形すると, 計算量を少なくすることができます。

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{4}(x^2-2x-8)dx &= \int_{-2}^{4}(x-4)(x+2)dx\\ &= \int_{0}^{6}\{(x-4)-2\}\{(x+2)-2\}dx \quad (\because\ x\text{ 軸方向を 2 平行移動})\\ &= \int_{0}^{6}x(x-6)dx\\ &= \frac{1}{6}\cdot 6^3\\ &= 36 \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \text{(答)}\end{aligned}$$

【2】次の曲線や直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}, y=x^2-x$

(2) $y=x^2-2x-1, \quad y=-x^2+2x-2$

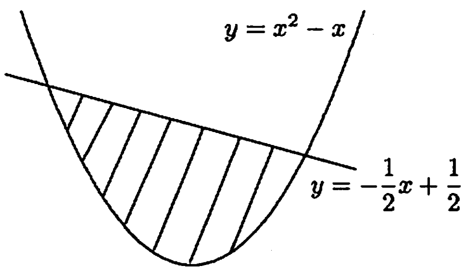
(基本問題)

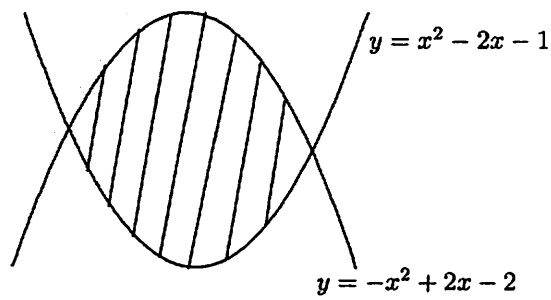
方 針

① 軸などの正確な図は必要ありません。位置関係がわかるような簡単な図を書く。

② (2) のように積分区間が無理数の場合は, 文字で置いて計算すると楽！

解 答





(1) $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$ と $y=x^2-x$ を連立すると,

$$-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=x^2-x \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2-x-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad (2x+1)(x-1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=1,-\frac{1}{2}$$

よって, 求める面積は, $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left\{\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)-(x^2-x)\right\}dx=-\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(2x+1)(x-1)dx$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)\times 2\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)dx$$

$$=\frac{1}{6}\times\left(1+\frac{1}{2}\right)^3$$

$$=\frac{9}{16}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $y=x^2-2x-1$ と $y=-x^2+2x-2$ を連立すると,

$$x^2-2x-1=x^2+2x-2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2-4x+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$$

ここで, $\alpha=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}, \beta=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ とおくと, 求める面積は,

$$\int_{\alpha}^{\beta}\{(-x^2+2x+2)-(x^2-2x-1)\}dx=-\int_{\alpha}^{\beta}(2x^2-4x+1)dx$$

$$=-2\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3$$

次に, $\beta-\alpha=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}-\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ なので, $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}\{(-x^2+2x+2)-(x^2-2x-1)\}dx$

$$=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdots\cdots(\text{答})$$

【3】2 つの放物線 $C_1 : y = x^2, C_2 : y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2}$ がある。C_1 と C_2 の 2 つの交点を通る直線を l_1 とする。以下の各問に答えよ。

(1) l_1 の式を求めよ。

(2) C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S_1 とし, C_1 と l_1 で囲まれた図形の面積を S_2 とする。この 2 つの面積の比 $S_1 : S_2$ を求めよ。

(2012. 高崎経済大一一部省略)

解　答

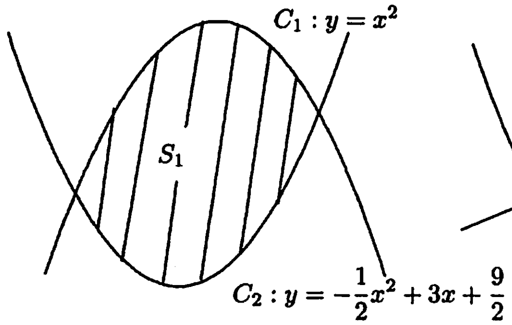
(1) C_1 と C_2 の交点の x 座標は $x^2 = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2}$

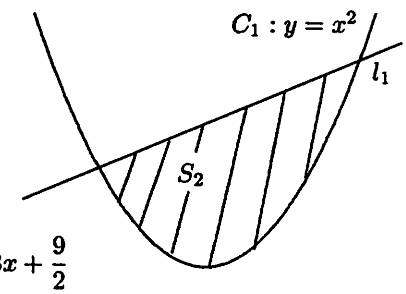
$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 = -x^2 + 6x + 9$$
$$\Leftrightarrow \quad 3x^2 - 6x - 9 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (x-3)(x+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x = -1, 3$$

よって, C_1 と C_2 の交点は, $(-1, 1), (3, 9)$ より, 求める直線 l_1 は

$$y - 1 = \frac{9-1}{3-(-1)}(x+1)$$
$$\therefore \quad y = 2x + 3 \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot (\text{答})$$

(2)





$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-1}^{3} \left\{ \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2} \right) - x^2 \right\} dx \\ &= \int_{-1}^{3} \left(-\frac{3}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2} \right) dx \\ &= -\frac{3}{2} \int_{-1}^{3} (x^2 - 2x - 3) dx \\ &= -\frac{3}{2} \int_{-1}^{3} (x-3)(x+1) dx \\ &= -\frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{6} \right) \{3 - (-1)\}^3 \\ &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-1}^{3} \{(2x+3) - x^2\} dx \\ &= -\int_{-1}^{3} (x^2 - 2x - 3) dx \\ &= -\int_{-1}^{3} (x-3)(x+1) dx \\ &= \frac{1}{6}\{3 - (-1)\} \\ &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$

以上, 求める 2 つの面積の比 $S_1 : S_2$ は, $S_1 : S_2 = 3 : 2 \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot (\text{答})$

【4】 $a>0$ として,x の関数 $f(x)$ と $g(x)$ を

$$f(x)=x^3-x \qquad g(x)=f(x-a)+2a$$

とする。

(1) 二つの関数の差 $g(x)-f(x)$ は,$g(x)-f(x)=a(\boxed{アイ}x^2+\boxed{ウ}ax-a^2+\boxed{エ})$

と表され,x の方程式 $g(x)-f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつような a の範囲は,

$$0<a<\boxed{オ}\sqrt{\boxed{カ}}$$

である。また,$g(x)-f(x)$ は,$x=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ のとき, 最大値 $\dfrac{a}{\boxed{ケ}}(\boxed{コサ}-a^{\boxed{シ}})$ をとる。

(2) (1) で得られた最大値を $h(a)=\dfrac{a}{\boxed{ケ}}(\boxed{コサ}-a^{\boxed{シ}})$ と表す。$h(a)$ を a の関数と考えるとき,$h(a)$ は $a=\boxed{ス}$ で最大値 $\boxed{セ}$ をとる。

(3) $a=\sqrt{3}$ のとき, 曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ の二つの交点 P,Q の座標は P$(\boxed{ソ},0)$,Q$(\sqrt{\boxed{タ}},\boxed{チ}\sqrt{\boxed{ツ}})$ であり, 二つの曲線 $y=f(x)$,$y=g(x)$ で囲まれた部分の面積 S は $S=\dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}$ である。さらに, 交点 P$(\boxed{ソ},0)$ における曲線 $y=f(x)$ の接線と曲線 $y=g(x)$ の接線がなす角を θ $\left(0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると,$\tan\theta=\dfrac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}$ である。

(2007. センター試験・本試験)

方 針

①マーク形式の解き方で重要なことは, 誘導にのること!

②図をイメージして書くことが重要。(2) においては, 増減表は不要!

解 答

(1) $y=g(x)$ は,$y=f(x)$ を x 軸方向に a,y 軸方向に 2a 平行移動したグラフである。

$$\begin{aligned} g(x)-f(x)&=(x-a)^3-(x-a)+2a-(x^3-x)\\ &=-3ax^2+3a^2x-a^3+3a\\ &=a(-3x^2+3ax-a^2+3)\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \text{ア〜エの答} \end{aligned}$$

x の方程式 $g(x)-f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつ条件は,

$a(-3x^2+3ax-a^2+3)=0 \Leftrightarrow -3x^2+3ax-a^2+3=0$ ($\because$ $a>0$) の判別式を D とおくと,

$$\begin{aligned} D&=(3a)^2-4\cdot(-3)\cdot(-a^2+3)>0\\ &\Leftrightarrow\quad a^2-12<0\\ &\Leftrightarrow\quad (a+2\sqrt{3})(a-2\sqrt{3})<0 \end{aligned}$$

$a>0$ より, $0<a<2\sqrt{3}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$ オカの答

また,$g(x)-f(x)=a(-3x^2+3ax-a^2+3)=a\left\{-3\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}a^2-a^2+3\right\}$

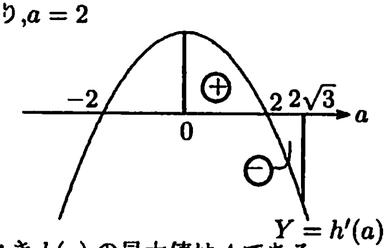
$$\begin{aligned} &=-3a\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+a\left(-\frac{a^2}{4}+3\right)\\ &=-3a\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{a^3}{4}+3a\right)\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot ① \end{aligned}$$

①より,$a>0$ より上に凸のグラフであるから,$x=\dfrac{a}{2}$ のとき, 最大値 $\dfrac{a}{4}(12-a^2)\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$ キ〜シの答

(2) $h(a) = \dfrac{a}{4}(12 - a^2) = \dfrac{1}{4}(12a - a^3)$

$h'(a) = 0$ より $12 - 3a^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3(a+2)(a-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm 2$

$0 < a < 2\sqrt{3}$ より,$a = 2$



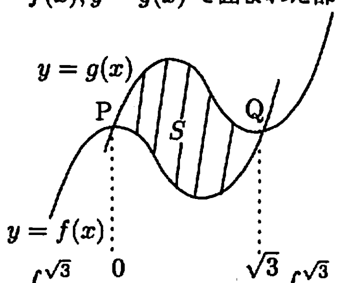
よって,$a = 2$ のとき,$h(a)$ の最大値は 4 である。・・・・・ス〜セの答

(3) $a = \sqrt{3}$ のとき,$g(x) - f(x) = a(-3x^2 + 3ax - a^2 + 3) = 0$ に代入すると,

$$\begin{aligned} -3\sqrt{3}x^2 + 9 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - \sqrt{3}x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x(x - \sqrt{3}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \therefore \ x = 0, x = \sqrt{3} \end{aligned}$$

以上より,P(0,0),Q($\sqrt{3}, 2\sqrt{3}$)・・・・・ソ〜ツの答

次に, 二つの曲線 $y = f(x), y = g(x)$ で囲まれた部分の面積 S は,



$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\sqrt{3}} \{g(x) - f(x)\}dx = \int_0^{\sqrt{3}} (-3\sqrt{3}x^2 + 9)dx \\ &= -3\sqrt{3} \times \left(-\frac{1}{6}\right)(\sqrt{3} - 0)^3 \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

・・・・・テトの答

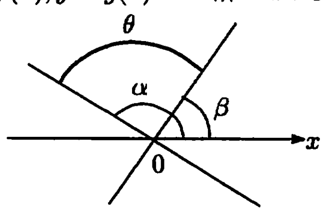
最後に,$f(x) = x^3 - x$ より,$f'(x) = 3x^2 - 1$ ・・・・・②なので,

曲線 $y = f(x)$ 上の点 P における接線の傾きは $f'(0) = -1$ である。

$g(x) = f(x - \sqrt{3}) + 2\sqrt{3}$ より,$g'(x) = f'(x - \sqrt{3}) = 3(x - \sqrt{3})^2 - 1$($\because$・・・・・②) より,

曲線 $y = g(x)$ 上の点 P における接線の傾きは,$g'(0) = 3(-\sqrt{3})^2 - 1 = 8$ である。

よって,2 つの接線 $y = f(x), y = g(x)$ と x 軸の正のなす角をそれぞれ α, β とおくと,



$$\begin{aligned} \tan\theta = \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} \\ &= \frac{-1-8}{1 + (-1)\cdot 8} \\ &= \frac{9}{7} \end{aligned}$$

・・・・・ナニの答

【5】 m を正の実数とする。xy 平面において $y=|2x(x-2)|$ で表される曲線を C,$y=mx$ で表される直線を l とする。

(1) C と l の共有点が 3 個であるような m の値の範囲を求めよ。

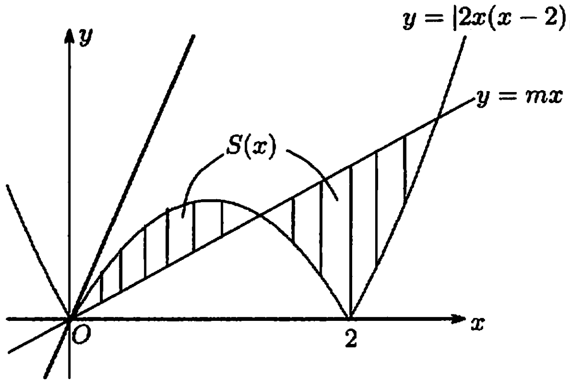
(2) m が (1) で求めた範囲にあるとき,C と l で囲まれる部分の面積 S を m の式で表せ。

(3) m が (1) で求めた範囲で変化するとき,C と l で囲まれた部分の面積 S の増減表をかいて,S を最小にする m の値を求めよ。

(2011. 関西学院大)

解 答

(1)

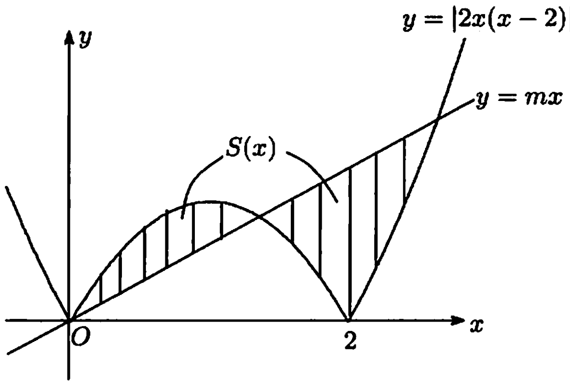


$y=-2x(x-2)$ 上の点 (0,0) における接線の傾きは,$y'=-4x+4$ より,4 であるから,

C と l の共有点が 3 個ある条件は,

$$0<m<4 \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \text{(答)}$$

(2)

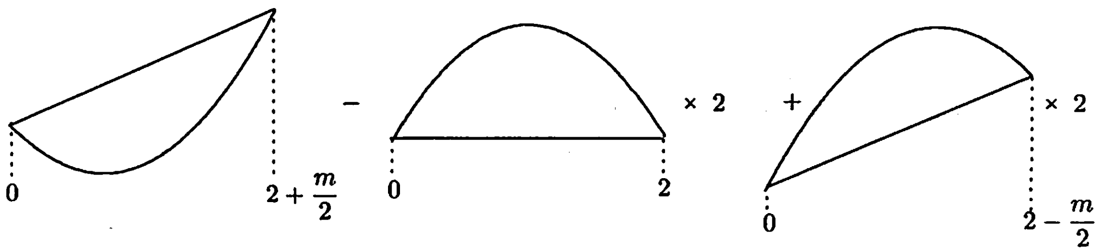


$y=2x(x-2)$ と $y=mx$ を連立すると,

$$\begin{aligned} 2x(x-2)=mx &\Leftrightarrow 2x(x-2)-mx=0 \\ &\Leftrightarrow x(2x-4-m)=0 \\ &\therefore\ x=0,2+\frac{m}{2} \end{aligned}$$

$y=-2x(x-2)$ と $y=mx$ を連立すると,

$$\begin{aligned} -2x(x-2)=mx &\Leftrightarrow 2x(x-2)+mx=0 \\ &\Leftrightarrow x(2x-4+m)=0 \\ &\therefore\ x=0,2-\frac{m}{2} \end{aligned}$$



よって, 求める面積 S は,

$$S=\int_0^{2+\frac{m}{2}}\{mx-2x(x-2)\}dx-\left\{-\int_0^2 2x(x-2)dx\right\}\times 2+\left\{\int_0^{2-\frac{m}{2}}\{-2x(x-2)-mx\}dx\right\}\times 2$$

$$=\int_0^{2+\frac{m}{2}}-2x\left\{x-\left(2+\frac{m}{2}\right)\right\}dx-\left\{-\int_0^2 2x(x-2)dx\right\}\times 2+\left\{\int_0^{2-\frac{m}{2}}-2x\left\{x-\left(2-\frac{m}{2}\right)\right\}dx\right\}\times 2$$

$$=2\times\frac{1}{6}\left(2+\frac{m}{2}\right)^3-\left(2\times\frac{1}{6}\times 2^3\right)\times 2+\left\{2\times\frac{1}{6}\left(2-\frac{m}{2}\right)^3\right\}\times 2$$

$$=\frac{1}{3}\left(2+\frac{m}{2}\right)^3-\frac{16}{3}+\frac{2}{3}\left(2-\frac{m}{2}\right)^3$$

$$=-\frac{1}{24}m^3+\frac{3}{2}m^2-2m+\frac{8}{3}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot(答)$$

(3)　(2) の結果より, $f(m)=-\frac{1}{24}m^3+\frac{3}{2}m^2-2m+\frac{8}{3}$ とおく。

$f'(m)=-\frac{1}{8}m^2+3m-2$

$f'(m)=0$ より, $m^2-24m+16=0 \quad \Leftrightarrow \quad m=12\pm 8\sqrt{2}$

$0<m<4$ より, $m=12-8\sqrt{2}$ となるので, $f(m)$ の増減表は以下のとおり。

m	0	$\cdots$	$12-8\sqrt{2}$	$\cdots$	4
$f'(m)$		$-$	0	$+$	
$f(m)$		↘	極小	↗	

以上より, S の最小となる m の値は, $m=12-8\sqrt{2}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$(答)

【6】(1)　次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(2)　放物線 $y=x^2+px+q$ を C_1 とし, 放物線 $y=-x^2$ を C_2 とする。C_1 は直線 $y=2x$ 上に頂点をもち,C_2 と相異なる 2 点で交わるとする。C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積が最大となる実数 p, q の値と, そのときの面積を求めよ。

(2011. 琉球大)

方　針

①　$\frac{1}{6}$ 公式の証明は, 確実に押さえましょう。毎年, どこかの大学で出題されています。

②　(2) の方程式②を解きたいと思った人・・・・・時間がいくらあっても足りません。
だから「解と係数の関係」を使うんです。

解　答

(1)

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx &= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)\{(x-\alpha)+(\alpha-\beta)\}dx \\ &= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2dx + \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(\alpha-\beta)dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^\beta + (\alpha-\beta)\left[\frac{1}{2}(x-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta \\ &= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 - (\beta-\alpha)\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^2 \\ &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

(2)　$y=x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q$ より, 軸の方程式は $x=-\frac{p}{2}$ となる。
ここで,C_1 の頂点は直線 $y=2x$ 上にあるので, 頂点は $\left(-\frac{p}{2}, -p\right)$ となり, 曲線 C_2 上にあるので,

$$-p=\left(-\frac{p}{2}\right)^2+p\left(-\frac{p}{2}\right)+q \quad \Leftrightarrow \quad q=\frac{p^2}{4}-p \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot ①$$

放物線 $y=x^2+px+q$ と $y=-x^2$ を連立すると,

$$\begin{aligned}& x^2+px+q=-x^2 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2+px+q=0 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2+px+\frac{p^2}{4}-p=0\ (\because ①) \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot ②\end{aligned}$$

②の判別式を D とおくと,$D=p^2-4\cdot2\cdot\left(\frac{p^2}{4}-p\right)>0 \quad \Leftrightarrow \quad p^2-8p<0$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \quad p(p-8)<0 \\ &\therefore \quad 0<p<8\end{aligned}$$

C_1 と C_2 の交点の x 座標を $\alpha, \beta(\alpha<\beta)$ とおくと,②の 2 解に等しいので, 解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{p}{2}, \alpha\beta=\frac{1}{8}p^2-\frac{1}{2}p$$

となるから,2 曲線 C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積を S とおくと,

$$\begin{aligned}S &= \int_\alpha^\beta \left\{-x^2-\left(x^2+px+\frac{p^2}{4}-p\right)\right\}dx \\ &= \int_\alpha^\beta \left(2x^2+px+\frac{p^2}{4}-p\right)dx \\ &= -2\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3$$

となる。次に,$\beta-\alpha=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\left(-\frac{p}{2}\right)^2-4\cdot\left(\frac{1}{8}p^2-\frac{1}{2}p\right)$

$$=-\frac{p^2}{4}+2p \text{ より,}$$

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{3}\left(-\frac{p^2}{4}+2p\right)^{\frac{3}{2}}\\&=\frac{1}{3}\left\{-\frac{1}{4}(p^2-8p)\right\}^{\frac{3}{2}}\\&=\frac{1}{3}\left\{-\frac{1}{4}(p-4)^2+4\right\}^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

$p=4$ を①に代入すると $q=0$ なので,S の最大値は,$\frac{1}{3}\cdot 4^2=\frac{8}{3}$　$(p=4, q=0$ のとき$)$・・・・・(答)

【7】座標平面上において, 点 A(0,1) を中心とし原点 O を通る円 C_1 について, 点 B$(0,-1)$ から引いた 2 本の接線の接点を P,Q とする。ただし, 点 P の x 座標は正とする。さらに,y 軸に関して対称な放物線 C_2 が直線 BP と直線 BQ にそれぞれ点 P と点 Q で接するものとする。

(1)　2 点 P,Q の座標を求めよ。

(2)　放物線 C_2 を表す方程式を求めよ。

(3)　点 A から放物線 C_2 上の各点までの距離は 1 以上であることを示せ。

(4)　円 C_1 の原点 O を含む弧 PQ と放物線 C_2 で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

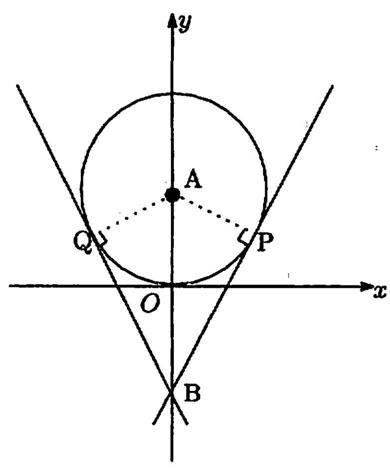
(2011. 宮崎大)

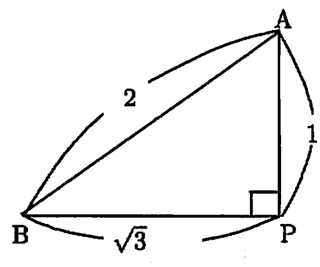
方 針

点 P,Q は y 軸に関して対称な点の関係であることに気づきましょう。(1) の座標の求める際は, 直角三角形の比とベクトルを利用して求めます。

解 答

(1)





AP=1,AQ=1,AB=2 より, 三角形 ABP は直角三角形なので, 三平方の定理より BP=$\sqrt{3}$ となる。

よって, ∠ ABP=$\frac{\pi}{6}$ であるから,$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} \\ -\sin\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$ よって, 点 P の座標は $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ・・・・・(答)

点 Q は, 点 P に関して y 軸に関して対称な点なので, 点 Q の座標は $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ・・・・・(答)

(2) 求める放物線は $y = ax^2 + b$($a \neq 0, a, b$ は定数) ・・・・・①とおく。求める放物線は, 点 P,Q を通る。したがって,

点 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ を①に代入すると,$3a + 4b = 2$ ・・・・・②

直線 BP の傾きは,$\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$ となる。次に,①を x で微分すると,$y' = 2ax$ となるから,

$$2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad a = 1$$

②より,$3 + 4b = 2 \quad \Leftrightarrow \quad b = -\frac{1}{4}$ となる。

以上より, 求める放物線の式は,$y = x^2 - \frac{1}{4}$ ・・・・・(答)

(3) C_2 上の任意の点を S $\left(t, t^2 - \frac{1}{4}\right)$ とおくと,

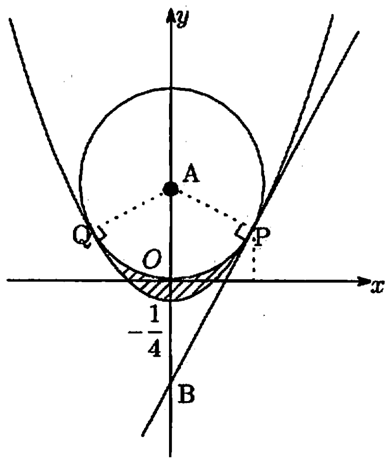
$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 - \frac{1}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 - \frac{5}{4} \end{pmatrix}$ より,$|\overrightarrow{AS}|^2 = t^2 + \left(t^2 - \frac{5}{4}\right)^2$

$$= t^4 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{25}{16}$$

$$= \left(t^2 - \frac{3}{4}\right)^2 + 1 \geqq 1$$ より,

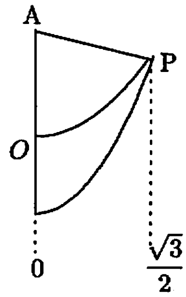
等号成立は,$t = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき,A から C_2 での距離は 1 以上であることが示せた。

(4)

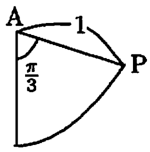


直線 AP の傾きは, 直線 BP と垂直なので,(直線 AP の傾き) × (直線 BP の傾き)=−1 より,
(直線 AP の傾き)=$-\frac{1}{\sqrt{3}}$ なので, 直線 AP の式は,$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 1$ となる。
よって, 求める面積 S は,

$\frac{S}{2} =$



$-$



$$\frac{S}{2} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x + 1 \right) - \left(x^2 - \frac{1}{4} \right) \right\} dx - 1^2\pi \cdot \frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi}$$
$$= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(-x^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{5}{4} \right) dx - \frac{\pi}{6}$$
$$= \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6}$$ より,

$$\therefore \quad S = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$ (答)

【8】 c を定数とし, 関数 $f(x), g(x)$ を

$$f(x) = -x + c, \quad g(x) = -x^2 + 2x + 3$$

と定める。また, 直線 $y = f(x)$ は放物線 $y = g(x)$ の接線であるとする。

(1) c の値を求めよ。

(2) 直線 $y = f(x)$, 放物線 $y = g(x)$, および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

(2010. 室蘭工業大)

解 答

(1) 接点の x 座標を t とおくと, 接線の傾きは $g'(t) = -2t + 2$ となる。これが接線 $y = -x + c$ の傾きと等しいので

$$-2t + 2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad -2t = -3$$

$$\therefore \quad t = \frac{3}{2}$$

また, $f(t) = g(t)$ なので, $f\left(\frac{3}{2}\right) = g\left(\frac{3}{2}\right)$ となるから

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{2} + c = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} + 3$$

$$\therefore \quad c = \frac{21}{4} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (\text{答})$$

(2) 直線 $y = f(x)$, 放物線 $y = g(x)$, および y 軸で囲まれた図形を S とおくと,

$$S = \int_0^{\frac{3}{2}} \left\{ \left(-x + \frac{21}{4}\right) - (-x^2 + 2x + 3) \right\} dx$$

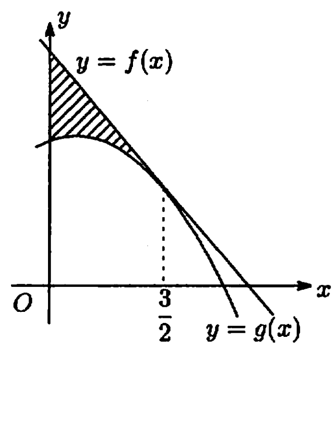
$$\Leftrightarrow \quad S = \int_0^{\frac{3}{2}} \left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) dx$$

$$\Leftrightarrow \quad S = \int_0^{\frac{3}{2}} \left(x - \frac{3}{2}\right) dx$$

$$\Leftrightarrow \quad S = \left[\frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^3\right]_0^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \quad S = \frac{9}{8} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (\text{答})$$

(注) $\boxed{\text{面積公式①}}$ を用いて (2) を解くと, $S = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2} - 0\right)^3 = \frac{1}{3} \times \frac{27}{8} = \frac{9}{8}$ となります。直線 $y = f(x)$, 放物線 $y = g(x)$, および y 軸で囲まれた図形を図で示すと, 以下の通りになります。公式が使える形になっていますよね。



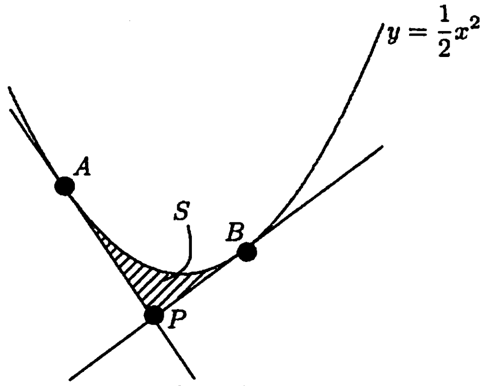
【9】点 P から放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ へ 2 本の接線が引けるとき,2 本の接点 A, B とし, 線分 PA, PB および この放物線で囲まれた図形の面積を S とする。PA, PB が直交するときの S の最小値を求めよ。

(2009. 東京工業大)

方 針

受験数学で押さえるべき重要事項 2 の考え方を用いた解法です。

解 答



点 $P(a,b)$ とする。放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上の点 $\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$ とおくと, 接線の方程式は,$y'=x$ より

$$y-\frac{1}{2}t^2=t(x-t) \quad \Leftrightarrow \quad y=tx-\frac{1}{2}t^2 \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot ①\text{となる。}$$

①は, 点 P を通るので,$b=at-\frac{1}{2}t^2 \quad \Leftrightarrow \quad t^2-2at+2b=0 \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot ②$

ここで,②の 2 つの解を $\alpha, \beta(\alpha<\beta)$ とおくと, 解と係数の関係より,

$$\alpha+\beta=2a \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot ③, \quad \alpha\beta=2b \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot ④$$

となり,②の 2 つの解と点 A, B の x 座標は $\alpha, \beta(\alpha<\beta)$ と一致するので,

(接線 PA の傾き)$=\alpha$,(接線 PB の傾き)$=\beta$ より,

2 つの接線は直交することから,(接線 PA の傾き) × (接線 PB の傾き)$=-1$ より,$\alpha\beta=-1 \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot ⑤$

となる。よって,④より,$2b=-1 \quad \Leftrightarrow \quad b=-\frac{1}{2} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot ⑥$

2 つの接線 PA, PB の方程式は,①より,$y=\alpha x-\frac{1}{2}\alpha^2, y=\beta x-\frac{1}{2}\beta^2$

2 式を連立すると, 点 P の x 座標は,$(\alpha-\beta)x=\frac{\alpha^2-\beta^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha-\beta)x=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{\alpha+\beta}{2} \quad (\because \alpha\neq\beta) \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot ⑦$$

よって, 面積 S は,

$$S=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\left\{\frac{1}{2}x^2-\left(\alpha x-\frac{1}{2}\alpha^2\right)\right\}dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}\left\{\frac{1}{2}x^2-\left(\beta x-\frac{1}{2}\beta^2\right)\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}(x^2-2\alpha x+\alpha^2)\,dx+\frac{1}{2}\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}(x^2-2\beta x+\beta^2)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}(x-\alpha)^2\,dx+\frac{1}{2}\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}(x-\beta)^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}$$
$$= \frac{1}{24}(\beta-\alpha)^3$$
$$= \frac{1}{24}\left\{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta\right\}^{\frac{3}{2}}$$

③,⑤より,$S = \frac{1}{24}(4a^2+4)$ なので,$Y = 4a^2+4$ とおくと,Y の最小値は,4($a=0$ のとき) である。

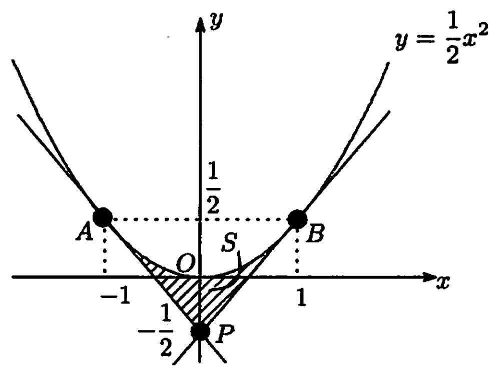
②より,$t^2-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad (t+1)(t-1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad t=-1,1$

よって,$\alpha<\beta$ より,$\alpha=-1, \beta=1$ であるから,(点 P の x 座標) =0　(∵ ⑦)

以上より, 求める面積 S の最小値は,

$$S = \frac{1}{24}\cdot 4^{\frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{4}}{24} = \frac{1}{3}$$　(点 P の座標 $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ のとき) · · · · · (答)

(注)　本問の結果を図で示すと, 以下のようになります。 $\boxed{\text{面積公式②}}$ の公式が使える形になっていますね。



【10】 a を正の実数,b と c を実数とし,2 点 P$(-1,\ 3)$,Q$(1,4)$ を通る放物線 $y=ax^2+bx+c$ を C とおく。C 上の 2 点 P,Q における C の接線をそれぞれ l_1, l_2 とする。

(1) b の値を求め,c を a で表せ。

(2) l_1 と l_2 の交点の座標を a で表せ。

(3) 放物線 C と接線 l_1, l_2 で囲まれる図形の面積が 1 に等しくなるような a の値を求めよ。

(2011. 北海道大)

解　答

(1) 放物線 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ は, 点 P,Q を通るので,

$$\begin{cases} a-b+c &= 3\cdots\cdots① \\ a+b+c &= 4\cdots\cdots② \end{cases}$$

①+②より,$2a+2x=7 \Leftrightarrow \quad c=\dfrac{7}{2}-a\cdots\cdots$(答)

①−②より,$b=\dfrac{1}{2}\cdots\cdots$(答)

(2) (1) の結果より,$y=ax^2+\dfrac{1}{2}x-a+\dfrac{7}{2}$

$y'=2ax+\dfrac{1}{2}$ より,

放物線 C 上の点 P における接線の方程式は,$y-3=\left(-2a+\dfrac{1}{2}\right)(x+1)$

$$\Leftrightarrow \quad y=\left(-2a+\frac{1}{2}\right)x-2a+\frac{7}{2}\cdots\cdots③$$

放物線 C 上の点 Q における接線の方程式は,$y-4=\left(2a+\dfrac{1}{2}\right)(x-1)$

$$\Leftrightarrow \quad y=\left(2a+\frac{1}{2}\right)x-2a+\frac{7}{2}\cdots\cdots④$$

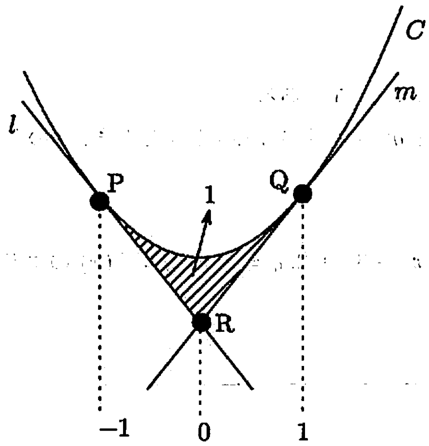
③,④より,$\left(-2a+\dfrac{1}{2}\right)x-2a+\dfrac{7}{2}=\left(2a+\dfrac{1}{2}\right)x-2a+\dfrac{7}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -4ax=0$

$$\therefore\ x=0 \quad (\because\ a\neq 0)$$

$x=0$ を③に代入すると,$y=-2a+\dfrac{7}{2}$

以上より, 求める l_1, l_2 の交点の座標は $\left(0, -2a+\dfrac{7}{2}\right)\cdots\cdots$(答)

(3)



放物線 C と接線 l_1, l_2 で囲まれる図形の面積が 1 なので,

$$\int_{-1}^{0}\left[\left(ax^2+\frac{1}{2}x-a+\frac{7}{2}\right)-\left\{\left(-2a+\frac{1}{2}\right)x-2a+\frac{7}{2}\right\}\right]dx$$

$$+\int_{0}^{1}\left[\left(ax^2+\frac{1}{2}x-a+\frac{7}{2}\right)-\left\{\left(2a+\frac{1}{2}\right)x-2a+\frac{7}{2}\right\}\right]dx=1$$

$$\Leftrightarrow \quad a\int_{-1}^{0}(x^2+2x+1)dx+a\int_{0}^{1}(x^2-2x+1)dx=1$$

$$\Leftrightarrow \quad a\int_{-1}^{0}(x+1)^2dx+a\int_{0}^{1}(x-1)^2dx=1$$

$$\Leftrightarrow \quad a\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{0}+a\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_{0}^{1}=1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}a+\frac{1}{3}a=1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{3}a=1$$

$\therefore \quad a=\dfrac{3}{2}$ 　(これは,$a>0$ を満たす。)・・・・(答)

【11】x についての 4 次の整式 $f(x)$ は, 次の条件 i), ii) ,iii) を満たしている。

i) $f(x)$ の 4 次の係数は 1 である。

ii) $f(1)=0, f(2)=-1$ である。

iii) $f(x)$ を x^2-3x で割った余りは $7x+5$ である。

$f(x)$ を x^2-3x+2 で割ったときの商を $g(x)$, 余りを $k(x)$ とするとき, 次の各問に答えよ。

(1) $k(x)$ を求めよ。

(2) $g(x)$ を求めよ。

(3) 座標平面上において,3 つの関数 $y=x^2-3x+2, y=g(x), y=k(x)$ のグラフで囲まれた部分の面積を求めよ。

(2008. 宮崎大)

解 答

(1) $f(x)$ を x^2-3x+2 で割ったときの商を $g(x)$, 余りを $k(x)$ より,

$$f(x)=(x^2-3x+2)g(x)+k(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x)=(x-2)(x-1)g(x)+k(x)$$

となる。ここで,$k(x)$ は 1 次以下の整式,$g(x)$ は条件 i) より 2 次の係数は 1 であることがわかる。

そこで,$k(x)=ax+b(a \neq 0, a, b$ は実数$)$ とおく。

条件 ii) より, $f(1)=0$ より,$a+b=0$ ・・・・・①

$f(2)=-1$ より,$2a+b=-1$ ・・・・・②

①,②より,$a=-1, b=1$

以上より, 求める整式 $k(x)$ は,$k(x)=-x+1$ ・・・・・(答)

(2) 条件 i) より,$g(x)$ は 2 次式であり,x^2 の係数は 1 であることがわかる。

よって,$g(x)=x^2+px+q(p \neq 0, p, q$ は実数$)$ とおける。

$$f(x)=(x^2-3x+2)(x^2+px+q)+k(x)$$

$$f(x)=(x-2)(x-1)(x^2+px+q)-x+1 \quad (\because k(x)=-x+1) \cdots\cdots ③$$

条件 iii) より,$f(x)=(x^2-3x)q(x)+7x+5=x(x-3)q(x)+7x+5$ とおけるので,

剰余の定理より $f(0)=5 \quad \Leftrightarrow \quad 2q+1=5$ ・・・・・④

$f(3)=26 \quad \Leftrightarrow \quad 6p+2q+16=26$ ・・・・・⑤

④,⑤より,$p=1, q=2$ となる。

以上より, 求める整式 $g(x)$ は,$g(x)=x^2+x+2$ ・・・・・(答)

※ **別 解** (1),(2) において, 以下の通りに解答もできます。

$f(x)$ を x^2-3x で割ったときの商を $x^2+px+q(p \neq 0, p, q$ は実数$)$ とおくと,

条件 i),iii) より,$f(x)=(x^2-3x)(x^2+px+q)+7x+5$ と表すことができる。

条件 ii) より, $f(1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad -2p-2q+10=0$ ・・・・・⑥

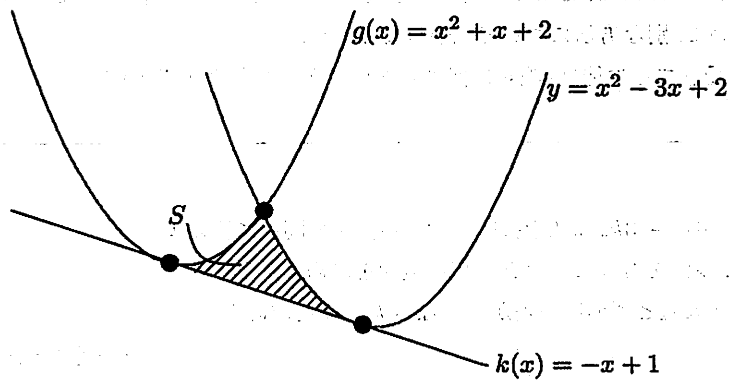
$f(2)=-1 \quad \Leftrightarrow \quad -4p-2q+11=-1$ ・・・・・⑦

⑥,⑦より,$p=1, q=4$

したがって,
$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3x)(x^2+x+4)+7x+5 \\ &= (x^2-3x+2)(x^2+x+4)-2(x^2+x+4)+7x+5 \\ &= (x^2-3x+2)(x^2+x+2)-x+1 \end{aligned}$$

となるので, 求める整式 $k(x), g(x)$ は,$k(x)=-x+1, g(x)=x^2+x+2$ ・・・・・(答)

(3)



曲線 $y=x^2-3x+2$ と直線 $y=-x+1$ を連立すると,

$$\begin{aligned} & x^2-3x+2=-x+1 \\ \Leftrightarrow\quad & x^2-2x+1=0 \\ \Leftrightarrow\quad & (x-1)^2=0 \\ \therefore\quad & x=1 \end{aligned}$$

曲線 $y=x^2+x+2$ と直線 $y=-x+1$ を連立すると,

$$\begin{aligned} & x^2+x+2=-x+1 \\ \Leftrightarrow\quad & x^2+2x+1=0 \\ \Leftrightarrow\quad & (x+1)^2=0 \\ \therefore\quad & x=-1 \end{aligned}$$

2 曲線 $y=x^2-3x+2, y=x^2+x+2$ を連立すると,

$$\begin{aligned} & x^2-3x+2=x^2+x+2 \\ \Leftrightarrow\quad & 4x=0 \\ \therefore\quad & x=0 \end{aligned}$$

以上より, 求める面積を S とおくと,

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{0}\{(x^2+x+2)-(-x+1)\}dx+\int_{0}^{1}\{(x^2-3x+2)-(-x+1)\}dx \\ &= \int_{-1}^{0}(x^2+2x+1)dx+\int_{0}^{1}(x^2-2x+1)dx \\ &= \int_{-1}^{0}(x+1)^2dx+\int_{0}^{1}(x-1)^2dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_{0}^{1} \\ &= \frac{2}{3}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot(答) \end{aligned}$$

より高いレベルを目指すために, 必要な重要事項を整理していきましょう。ここでは, 面積公式として使っている $\dfrac{1}{6}$ 公式について, 別な方法について説明しましょう。
これは, 難関大学を受験する生徒は, 絶対に押さえましょう。まずは, 例題から

例　題

関数 $f(x)=x^3-6x^2+3kx$(k は定数) を考える。次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)$ が, 極値をもつような k の値の範囲を求めよ。

(2)　関数 $f(x)$ の極大値と極小値の差が 4 となる k の値を求めよ。

(長崎大ー設問文章を一部改)

方　針

与えられた関数には文字を含まれています。これを微分して極大値, 極小値を求めることを考えるとかなり計算が多くなります。「あっ・・・これは大変だ！」と気が付いたことで, 他の考えがないかと考えます。

解　答

(1)　$f(x)=x^3-6x^2+3kx$(k は定数) より, $f'(x)=3x^2-12x+3k$

$$=3(x^2-4x+k)$$

$f(x)$ が極値をもつための条件は, 2 次方程式 $3(x^2-4x+k)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつので,

$3(x^2-4x+k)=0$ の判別式を D とおくと,　$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-k>0$　⇔　$k<4$・・・・・(答)

(2)　$x^2-4x+k=0$ の 2 つの解を $\alpha, \beta(\alpha<\beta)$ とおくと, 解と係数の関係より

$\alpha+\beta=4, \alpha\beta=k$・・・・・①となる。

ここで, $\beta-\alpha=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$$=4^2-4k$$

$$=4(4-k)\text{ である。}$$

ここがポイント!!　ここで $\dfrac{1}{6}$ 公式を用いています。

$$\begin{aligned}
f(\alpha)-f(\beta) &= -[f(x)]_\alpha^\beta \\
&= -\int_\alpha^\beta f'(x)dx \\
&= -\int_\alpha^\beta 3(x-\alpha)(x-\beta)dx \\
&= -3\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\{4(4-k)\}^{\frac{3}{2}}(\because\ ①)$$

$$=4(4-k)^{\frac{3}{2}}$$

以上より, 極大値と極小値の差が 4 なので, $4(4-k)^{\frac{3}{2}}=4$　⇔　$(4-k)^{\frac{3}{2}}=1$

$\therefore$　$k=3$・・・・・(答)

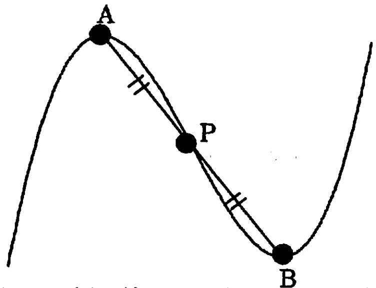
(これは, $k<4$ をみたす)

例　題で考えた知識をまとめていきましょう。例　題では極値の差をテーマにしていますが, 極値の和についての考え方もまとめておきます。

難関大学に必要な知識

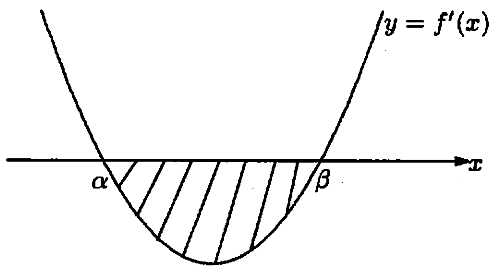
● **極値の和　⇒　3 次関数のグラフの性質に着目**

極大・極小をもつ 3 次関数のグラフは以下の通りです。



点 A を極大値をとる点, 点 B を極小値をとる点とする。3 次関数のグラフは,2 点 A,B を結ぶ線分の中点 P を必ず通り, 点 P について点対称であることがわかります。この点 P を変曲点といいます。

● **極値の差　⇒　導関数のグラフと x 軸とで囲まれた面積に着目**



上図より,

$$f'(x) = (x-\alpha)(x-\beta) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot ①$$

であることがわかります。また, 極値の差は

$$f(\alpha) - f(\beta) = [f(x)]_\beta^\alpha = \int_\beta^\alpha f'(x)dx \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot ②$$

のように表すことができます。

①,②より,　$f(\alpha) - f(\beta) = \int_\beta^\alpha (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\alpha-\beta)^3$ となります。

例　題は, 極値の差をテーマにした問題です。このテーマにおいてもう 1 題チャレンジしてみましょう。

Hi Jump 問題

【12】a は 0 でない実数とする。関数

$$f(x) = (3x^2-4)\left(x-a+\frac{1}{a}\right)$$

の極大値と極小値の差が最小となる a の値を求めよ。

(1998. 東京大ー文科)

【12】 a は 0 でない実数とする。関数

$$f(x) = (3x^2-4)\left(x-a+\frac{1}{a}\right)$$

の極大値と極小値の差が最小となる a の値を求めよ。

(1998. 東京大－文科)

解 答

$$f(x) = (3x^2-4)\left(x-a+\frac{1}{a}\right) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 3x^2\left(x-a+\frac{1}{a}\right) - 4\left(x-a+\frac{1}{a}\right)$$
$$= 3x^3 + 3\left(-a+\frac{1}{a}\right)x^2 - 4x + 4a - \frac{4}{a} \text{ より,}$$

$$f'(x) = 9x^2 + 6\left(-a+\frac{1}{a}\right)x - 4$$

次に, $f'(x)=0$ として考える。$f'(x)=0$ の判別式を D とすると,

$$\frac{D}{4} = \left\{3\left(-a+\frac{1}{a}\right)\right\}^2 + 36$$
$$= 9\left\{\left(-a+\frac{1}{a}\right)^2 + 4\right\}$$
$$= 9\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 > 0 \quad (\because\ a \neq 0)$$

となり, $f'(x)=0$ は, 異なる 2 つの実数解をもつことがわかる。

ここで, $f'(x)=0$ の 2 つの解を $\alpha, \beta (\alpha<\beta)$ とおくと,

$$f'(x) = 9x^2 + 6\left(-a+\frac{1}{a}\right)x - 4 = 9(x-\alpha)(x-\beta) \cdots\cdots (*)$$

と表せることができる。

また, 極大値は $f(\alpha)$, 極小値は $f(\beta)$ となるので, 極大値と極小値の差は,

$$f(\alpha) - f(\beta) = [f(x)]_\beta^\alpha$$
$$= \int_\beta^\alpha f'(x)dx$$
$$= 9\int_\beta^\alpha (x-\alpha)(x-\beta)dx \quad (\because\ (*))$$
$$= 9\left\{-\frac{1}{6}(\alpha-\beta)^3\right\}$$
$$= -\frac{2}{3}(\alpha-\beta)^3$$
$$= \frac{2}{3}(\beta-\alpha)^3$$

解と係数の関係より

$$\alpha+\beta = -\frac{2}{3}\left(-a+\frac{1}{a}\right), \alpha\beta = -\frac{4}{9}$$

なので, $\beta - \alpha = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = \left\{-\frac{2}{3}\left(-a+\frac{1}{a}\right)\right\}^2 - 4\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)$

$$= \frac{4}{9}\left\{\left(-a+\frac{1}{a}\right)^2 + 4\right\}$$

よって, 極大値と極小値の差が最小となるのは,

$$-a+\frac{1}{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{a} \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm 1 \cdots\cdots \text{(答)}$$