平成23年度8月6日（土）

北海道算数数学教育会「第７８回数学教育実践研究会」

兼　第１７回数学教育実践研究会「夏季セミナー」

研究発表論文

北海道滝川高等学校
工　藤　寛　之

実践論文

第１部　「比較」を意識的・戦略的に取り入れた学習指導についての提案
第２部　新学習指導要領と課題学習における指導法の提案
第３部　「比較」を取り入れた学習指導

第１部　実践論文

「比較」を意識的・戦略的に取り入れた学習指導についての提案

北海道滝川高等学校　工藤　寛之

要　約

新学習指導要領は、一層主体的な学習の充実を求めている。そのためにも、授業に数学的活動を取り入れることを重視している。筆者は意識的・戦略的に「比較」を取り入れた問題解決的な授業が、学習における数学的活動を一層充実させることができると考えている。「比較」を取り入れた学習指導は、新学習指導要領の課題である「体系的理解」「表現能力」「数学のよさの認識」「数学的論拠に基づいて判断する態度」「創造性」を培う上でも有効である。**第１部**では、授業事例を提示して「比較」の有効性について提案していく。**第２部**と**第３部**では、新学習指導要領と「比較」を取り入れた学習指導について実践事例や文献などから理論的に深めていく。ここで得られた知見を実践で生かせる方策についても具体的に提案していく。これらの提案は主体的な学習や学力向上にもつながる。また、受験学力の一層の向上と躍進や数学を生活に役立て生涯学び続けていく楽しさも感得できる。

キーワード：新学習指導要領　数学的活動　比較　問題解決　学力向上　受験学力　数学の楽しさ

１．学習指導の事例

（１）説明中心的な学習指導の事例１

ここでは、説明中心の授業例を提示する。単元は「数学Ⅲ微分法の活用」で、指導目標は「関数の増減を活用する有効性について学ぶ。」である。

問題　関数 $f(x)=\log X/X$ の増減を調べ，e^{π} と π^{e} の大小比較をせよ。

T「関数 f(x)を微分して増減表を作ります。関数 f(x)を微分しなさい。」

S1「$f'(X)=X^{-2}(1-\log X)$」となります。

T「次に増減表やグラフの概形を書きなさい。」

X	0	……	e	……
$f'(X)$	／	＋	0	－
f(x)	／	増加	e^{-1}	減少

$x\to 0$ で $\log x/x\to-\infty$，$x\to\infty$ で $\log x/x\to 0$

T「関数 f(X)は $X>e$ で単調減少であるから f(e)と f(π)の大小関係はどうなるか。」

S2「単調減少より $e<\pi$ のとき $f(e)>f(\pi)$」

T「$\log e/e>\log\pi/\pi$，$\pi\log e>e\log\pi$，$\log e^{\pi}>\log\pi^{e}$　$\therefore e^{\pi}>\pi^{e}$ である。」

（２）比較を取り入れた学習指導の事例２

ここでは、「比較」を意図的に取り入れた授業例を提示する。単元は「数学Ⅲ微分法の活用」で、指導目標は「関数の増減を活用する有効性について、数学的活動を通して学級全体で学ぶ。」

問題　π^{e}，e^{π}，3^{e}，どれが１番大きいか。

T「どれが一番大きそうだろうか。」**(問題提示)**

S1「$e\fallingdotseq 2.71$，$\pi\fallingdotseq 3.14$ より $e<3<\pi$ だから、π^{e} が１番大きいようです。」

S2「$3<\pi$ より $3^{e}<\pi^{e}$ です。$4^{3}=64$，$3^{4}=81$，$4^{3}<3^{4}$ よりおそらく $\pi^{e}<e^{\pi}$ となり e^{π} が一番大きそうです。」

S3「$2^{3}=8$，$3^{2}=9$，$2^{3}<3^{2}$ よりおそらく $e^{\pi}<\pi^{e}$ なり π^{e} が一番大きいようです。」

(異なる予想の比較)

S4「π^{e} と e^{π} のどちらが大きいだろうか。」

(生徒自身が課題をつかむ。)

T「π^{e} と e^{π} の大小をどのように調べるか。」

S5「対数とって調べたら分かりそうです。」

S6「差をとって考えると、$\log e^{\pi}-\log\pi^{e}=\pi\cdot\log e-e\cdot\log\pi=e\pi(\log e/e-\log\pi/\pi)$

次に $\log e/e$ と $\log\pi/\pi$ の大小関係が分かれば解決できそうです。」

S7「関数 $f(x)=\log x/x$ の増減を調べる。」

T「$f(x)=\log x/x$ の増減表を作りなさい。」

S8「微分すると $f'(x)=x^{-2}(1-\log x)$ だから増減表は次のようになります。」

x	0	……	e	……
$f'(x)$	／	＋	0	－
$f(x)$	／	増加	e^{-1}	減少

$x\to 0$ で $\log x/x\to-\infty$, $x\to\infty$ で $\log x/x\to 0$

T「関数 $f(x)$ は $x>e$ で単調減少であるから $f(e)$ と $f(\pi)$ の大小関係はどうなるか。」

S9「単調減少より $e<\pi$ で $f(e)>f(\pi)$ です。」

S10「$\log e/e>\log\pi/\pi$, $\pi\log e>e\log\pi$, $\log e^{\pi}>\log\pi^{e}$ $\therefore e^{\pi}>\pi^{e}$ となります。」

（課題が解決した。）

S11「e^{π} が一番大きいことが分かりました。」

（問題が解決した。）

T「π^{e} と e^{π} の大小を別法で解決できるか。」

S12「$f(x)=x^{1/x}$ が利用できそうです。」

S13「$f(x)=x^{1/x}$ を対数微分法で微分すると $f'(x)=x^{1/x-2}(1-\log x)$ となります。」

S14「増減表は次のようになります。」

x	0	……	e	……
$f'(x)$	／	＋	0	－
$f(x)$	／	増加	$e^{1/e}$	減少

$x\to\infty$ で $x^{1/x}\to 1$, $y=1$ が漸近線

S15「$x>e$ で $f(x)$ は単調減少より $e<\pi$ のとき $\pi^{1/\pi}<e^{1/e}$ $\therefore \pi^{e}<e^{\pi}$ 」

T「平均値の定理も利用できないか。」

S16「関数 $f(x)=\log x$ に利用できそうです。」

S17「$[1, \log\pi]$ で平均値の定理を適用します。$\{f(\log\pi)-f(1)\}/(\log\pi-1)=f'(c)$ $(1<c<\log\pi)$ を満たす実数 c が存在します。$\{\log(\log\pi)-\log 1\}/(\log\pi-1)=1/c$ と $1>1/c$ より $1>\{\log(\log\pi)-\log 1\}/(\log\pi-1)$, $\log\pi-1>\log(\log\pi)$, $\log\pi/e>\log(\log\pi)$, $\pi/e>\log\pi$, $\pi>\log\pi^{e}$ $\therefore \pi^{e}<e^{\pi}$」

T「解決方法を振り返って比較してみよう。」

S18「関数 $f(x)=\log x/x$ の増減を利用する方が調べやすいです。」

S19「関数 $f(x)=\log x/x$ や $f(x)=x^{1/x}$ の増減を利用すると調べられることが分かりますが、この関数を思い浮かべられません。」

S20「関数 $f(x)=\log x/x$ は思いつきますが、平均値の定理の利用は思いつきません。」

S21「平均値の定理は大小関係で利用した経験があるので、関数 $f(x)=\log x$ に適用することは難しくありません。」

S22「指数が関係した大小関係の問題に対数を利用することは自然な考えだと思います。関数の増減を利用する有効性も分かりました。」

S23「不等式の証明で平均値の定理を利用した問題を以前解きましたので、今後大小関係の問題に利用できないか考えるようにしたいです。」

（3）説明中心的な学習指導の事例３

ここでは、(1) と同様に説明中心の授業例を提示する。単元は「数学Ⅰ　２次関数の最大最小の問題」で、指導目標は「定義域が拡大する場合の２次関数の最大最小の問題を学ぶ。」である。

問題　関数 $f(x)=x^{2}-2x+3$ $(0\leqq x\leqq a)$ において、最大値および最小値を求めよ。

T「$f(x)=(x-1)^{2}+2$ と基本形にする。a の値が大きくなるにつれて定義域が拡大していく。a について場合分けをするが、最大値最小値に変化がある値で場合分けを考える。グラフを書いて考えるとよい。そのとき最大最小は軸の位置とグラフの対称性に注目するとよい。まず、$0<a<1$ のときのグラフを書いて考える。」

S1「$x=0$ のとき最大値 $f(0)=3$、$x=a$ のとき最小値 $f(a)=a^{2}-2a+3$ です。」

T「$1\leqq a<2$ の時もグラフを書いて考える。」

S2「$x=0$ のとき最大値 $f(0)=3$、$x=1$ のとき最小値 $f(1)=2$ です。」

T「次は、どのように考えるか。」

S3「$2\leqq a$ のときもグラフを書いて考えます。」

T「$a=2$ のとき最大値となる x の値が２つあるので、$a=2$ と $a>2$ で分けて考える。」

S4「$a=2$ の時グラフより $X=0,2$ のとき最大値 $f(0)=f(2)=3$、$x=1$ のとき最小値 $f(1)=2$ です。」

T「$a>2$ のときはどうなるか。」

S5「グラフより $X=a$ で最大値 $f(a)=a^{2}-2a+3$、$X=1$ のとき最小値 $f(1)=2$ です。」

（4）比較を取り入れた学習指導の事例4

ここでは、(2)と同様に「比較」を意図的に取り入れた授業例を提示する。単元は「数学Ⅰ　2次関数の最大最小の問題」で、指導目標は「定義域が動く場合の2次関数の最大最小について数学的活動を通して学級全体で学ぶ。」である。

問題　関数 $f(x)=x^2-2x+3$　$(0 \leqq x \leqq a)$ における最大値は3，最小値は2である。正しいか。

（問題を提示する。）

S1「正しいと思います。」

T「本当に正しいか。」

S2「最小値2は正しいが、最大値は変化するようです。」

S3「最小値も変化するようです。」

（異なる予想の比較）

S4「X=0 のとき $f(0)=3$ より最大値3，$f(x)=(x-1)^2+2$ より最小値2だと思う。」

T「最大値3は本当に正しいか。」

S5「aの値によって定義域が変化するので最大値も変化するようです。」（課題1をつかむ）

T「最大値はどのように変化するのですか。」

S6「$0<a<2$ のときと $a>2$ のときで変化するようです。」

T「なぜだろうか。」

S7「グラフより $0<a<2$ のとき最大値は $f(0)=3$ だが、$a>2$ のとき $f(0)<f(a)$ だからです。このとき最大値は $f(a)=a^2-2a+3$ です。」

T「a=2のときはどうなるか。」

S8「グラフより最大値は2箇所あり、$x=0,\ 2$ のときです。最大値は $f(0)=f(2)=3$ です。」

（課題1を解決）

T「最小値2は本当に正しいか。」

S9「最小値もaの値で変化するようです。」

（課題2をつかむ）

T「どのように場合分けするのか。」

S10「$0<a<1$ と $1 \leqq a$ で場合分けします。」

T「なぜですか。」

S11「グラフより $0<a<1$ のとき頂点のx座標が定義域の右外側にあるからです。このとき $x=a$ のとき最小値 $f(a)=a^2-2a+3$ です。$1 \leqq a$ のとき最小値は $x=1$ で $f(1)=2$ です。」（課題2を解決）

T「場合分けする時の大事なことは何か。」

S12「最大最小を与えるxの値が、定義域の左端と右端、頂点のx座標で判断します。また、頂点のx座標が定義域の中央にある場合も要注意です。」（aの値で最大最小が変化することが分かり、問題が解決した。）

2．事例による考察

事例(1)と(2)を比べると、事例(2)の方が生徒の主体的な学習が一層強く生じていて、数学的活動も活発であった。事例(3)と(4)を比べても事例(4)の方が、新学習指導要領の課題である「体系的理解」「表現能力」「数学のよさの認識」「数学的論拠に基づいて判断する態度」「創造性」などが培われる学習活動が生じていた。

授業に「予想の比較」や「課題解決の比較」などが生ずるように授業構成を意図的に仕組むことによって、一層活発な数学的活動を生じさせることができる。学級全体で多様な考えを比較検討することによって受験学力等の向上にもつながる。「比較」が生じやすいように、提示する問題自体も工夫していく実践的な研究を積み重ねていくことも重要であると考えている。

謝辞

本稿が完成するまでに、安田富久一校長先生からメールやお電話等でご指導やご助言をいただきました。本研究論文がこれからの高等学校の数学教育のますますの進化発展に貢献できることを祈っています。また、安田校長先生からのご助言等のご支援に厚くお礼申し上げます。

参考文献

文部省(2009)，高等学校学習指導要領解説数学編

吉田明史(2009)，「高等学校の数学教育に求められるもの」，『日本数学教育学会誌』91(7), 12−20.

日本数学教育学会編(2010)，数学教育学研究ハンドブック，東洋館出版社.

第２部　実践論文

新学習指導要領と課題学習における指導法の提案

北海道滝川高等学校　工藤　寛之

要　約

新学習指導要領は、一層主体的な学習の充実を求めている。そのためにも、授業に数学的活動を取り入れることを重視している。ところが、従来の説明中心の授業では生徒の主体的な学習を生み出すことは難しい。新設された課題学習は数学的活動を充実させるための起爆剤の一つであると考えられる。筆者の目指している授業は「自ら学び考え、確かな理解と納得が得られる授業」である。問題解決的な授業を実践していくことによって、教科書の内容も理解し、入試にも対応できる学力を身に付けさせることができる。そして、意識的・戦略的に「比較」を取り入れた問題解決的な授業が、上記の事柄に有効であることに着目してきた。「比較」は数学的活動の一種であると捉えることができる。「比較」を取り入れた学習指導は、主体的な学習意欲と、確かな理解や納得を得る上で有効であり、また、新学習指導要領の課題である「体系的理解」「表現能力」「数学のよさの認識」「数学的論拠に基づいて判断する態度」「創造性」を培う上でも有効である。「比較」の有効性を生徒から引き出す問題づくりの工夫や、「比較」を取り入れた課題学習の指導について提案していく。

キーワード：数学的活動　課題学習　比較　問題解決　表現力　創造性　知的好奇心　知的葛藤

１．はじめに

（１）新学習指導要領と課題学習の指導

新学習指導要領に基づく高等学校の教育課程は、平成 24 年度の第 1 学年から数学理科が先行実施されていく。新学習指導要領における高等学校数学科の目標は以下の通りである。(文部省,2009)

「数学的活動を通して、数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め、事象を数学的に考察し表現する能力を高め、創造性の基礎を培うとともに、数学のよさを認識し、それらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる。」（下線が変更部分）

「体系的な理解」は、改めて体系的に組み立てていく数学の考え方を強調している。「考察し表現する能力」は、今回の改訂ですべての教科等を通して、思考力・判断力・表現力等を育てることが重視されたからである。ここで言う「数学のよさ」とは、数学的な見方や考え方のよさに加え、数学の概念や原理・法則や表現・処理とその用い方のよさである。さらに実用性などの数学の特徴及び数学的活動や思索することの楽しさなどである。「数学的論拠に基づいて判断する態度」の部分は新たに付け加えられた。これは、ある事象の数学的側面に着目し、考察・処理した結果から自分で合理的な判断を下す態度である。（長尾・塚原,2009）

「創造性の基礎」は、現行の目標から付け加えられたものである。創造性の基礎とは、知的好奇心や粘り強く考える力以外に、多面的な見方、直感力、洞察力、思考力、想像力、豊かな感性や自信なども含まれる。このような力を育てるためには、生徒に相応しい課題の設定や意見を生かすこと、特に生徒の誤りを集団全体のよりよい理解へと導くことが大切だと考えられる。(吉田,2009)そのためにも一斉授業に「数学的活動」を取り入れることによって生徒同士が学び合い、深い理解と考えることの楽しさを味わうことができると思う。

「数学的活動」については、観察,操作,実験などの外的活動と、直観,類推,帰納,演繹などの内的活動が考えられる。このような活動を通して論理的思考力、想像力及び直観力などの創造性の基礎を培うものと考えられる。(横弥,2009) 更に学習活動に「課題学習」を取り入れることによっても「創造性の基礎を培う」ことが実現できると思う。

ところで、目標の冒頭に「数学的活動を通して…」を位置づけ、その充実が一層強調されている。この要因を、吉田(2009)は次のように述べている。

「主体的に問題を解決することは重要である。必要な「数学的活動」は指導者が仕組む必要がある。さらに、生徒自身の内なる思考活動も大切ではあるが、その思考活動が他者や教室でどのように共有されているかが重要で、そのことにより生徒の思考活動が一層深まることにも留意したい。具体的な単元において他者との交流を通して学び合えるような「数学的活動」を展開するにはどのような「しかけ」が必要かを考えることが大切である。」(下線は筆者)

一斉授業で多様な考えを尊重し合いながら「課題学習」をすることによっても、お互いの思考活動が一層深まると思われる。この「課題学習」は、新学習指導要領に新しく位置づけられたものである。高等学校では必修科目や多くの生徒の選択が見込まれる科目である「数学Ⅰ」「数学A」に新設された。「学習指導要領解説数学編第1部第4節3(4)課題学習」には次のように記述されている。

「(1), (2)及び(3)の内容又はそれらを相互に関連付けた内容を生活と関連付けたり発展させたりするなどして、生徒の関心や意欲を高める課題を設け、生徒の主体的な学習を促し、数学のよさを認識できるようにする。」((1)は場合の数と確率、(2)は整数の性質、(3)は図形の性質を指す。下線は筆者。) 内容の取り扱いは、「課題学習については、それぞれの内容との関連を踏まえ、学習効果を高めるよう適切な時期や場面に実施するとともに、実施にあたっては数学的活動を一層重視するものとする。」である。実施に当たっては更に次のように解説されている。

「課題を理解する、結果を予想する、解決の方向を構想する、解決する、解決の過程を振り返ってよりよい解決を考えたり、更に課題を発展させたりする、という一連の過程に沿って、必要な場面で適切な指導を工夫するとともに、適宜自分の考えを発表したり議論したりするなどの活動を取り入れるよう配慮する。」(下線は筆者)

今回の改訂では各教科において言語に関する能力の育成を重視している。数学科の目標でも言語活動の充実が求められている。言語活動も含め一層主体的な学習を促すために、数学的活動を取り入れた学習指導を実践していくことが新学習指導要領の課題でもある。筆者は数学的活動を取り入れた学習指導を具現化するために、「課題学習」にも問題解決的な学習が必要であると思う。問題解決の授業の基本的な授業構成は、次の通りである。

「Ⅰ 問題を理解する。 Ⅱ 予想する。 Ⅲ 課題をつかむ。 Ⅳ 課題を解決する。 Ⅴ 問題を解決する。」相馬(1997) ポリア(1954)

数学的活動を具体的に実現していくために、高校数学の「課題学習」においても問題解決の授業は有効であるように思われる。筆者は、問題解決の授業を実践しながら、「比較」を取り入れた学習指導の有効性に着目してきた。「比較」は数学的活動の一種であると捉えることができる。「比較」を取り入れた学習指導は、「自ら学び考え、確かな理解と納得が得られる授業」などを達成することができる。また、新学習指導要領の一般方針でもある「自ら学び自ら考える力」などの「生きる力」の育成にも有効ではないだろうか。(相馬・熊倉・山口, 2008)

(2) 研究の目的と方法

新学習指導要領の課題を解決するために、高校数学の授業改善の必要性がある。その実現のためにも、本研究の目的を次の2点とする。

① 数学教育での「比較」の意味と、「比較」を取り入れた課題学習の指導の在り方を提案する。

② 「比較」を取り入れた課題学習の指導の有効性と、そのための問題作成について提案する。

筆者は、教育現場において日々授業実践をしており、質的な資料(自由な観察・面接・会話、生徒のノートや授業記録ノートの記述など)を収集しやすい立場にいる。これらの資料を基にして、

質的な分析と考察(大谷,1997)を加えることにより、文献研究(日野,1997)や授業実践(中西,1999)などから「比較」を取り入れた課題学習の指導について提案していきたい。また、「比較」を取り入れることの有効性や、生徒から「比較」の有効性を引き出すための問題づくりの工夫についても、文献研究や授業実践などから明らかにしていく。

2.「比較」を取り入れた課題学習の指導

(1) 数学教育における「比較」の意味

「比較」の意味について、先ず始めに、国語辞典や和英辞典から調べていくことにする。『角川必携国語辞典』によると、「比較」は、次のように説明されている。

「「**比較**」は、比べあわせること。広く使う。「**対比**」は、二つのものを比べてそのちがいを見ること。「色彩の対比を見る」。「**対照**」は、二つのものを比べて、ひと目で共通点と相違点が見えることにすること。「対照表」。「**照合**」は、原文や現物などと一字一字いちいち比べて、同じかどうか、間違いがないかどうか確かめること。」

以上より、「対比・対照・照合」は、「比較」の狭義として使われている。次に、『研究社和英大辞典』には以下のような記述がある。

「比較……(a) comparison ; a parallel
比較する……compare (the two , A with B) draw[make] a parallel[comparison] (between)」

「parallel」の para の語源は beside であり、allel の語源は one another である。「draw a parallel」には「平行線を描く」つまり「おたがいの側にあるようにする」あるいは、「並列に配置する」というような意味が込められている。

数学教育において、「並列に配置する」にはどのような意味があるのだろうか。板書などで異なる予想や解法などを並列に配置することが考えられる。あるいは、「比較」する上で有益な小問を2題以上並列に配置することも考えられる。つまり、「並列に配置する」とは、「比較」する上で有益な生徒の考えなどを二つ以上みつけ、生徒の眼前に板書などで提示する活動である。

次に、授業例から課題学習の教材としての適性や、「比較」を取り入れた学習指導について考察していく。授業構成は問題解決的な授業を基盤にした。指導単元は数学Aの確率で、多人数の時のじゃんけんの確率について指導実践した。

問題1　大勢でじゃんけんをする時、勝敗は簡単に決まるか。

(教師Tが、<u>問題1を提示</u>した。)

S1「勝負がなかなか決まらず時間がもったいないようです。」(生徒の<u>予想</u>1)

(n人でじゃんけんをする時、勝敗が決まる確率を求めることが<u>生徒の課題</u>になった。)(課題1)

S2「n人が3通りの手を出せるので全事象は3^n通り。2種類の手を出せば勝敗が決まるので、${}_3C_2=3$通り、n人が2つの手を出すのは2^n通り、全員が同じ手を除くと2^n-2通りです。よって、勝敗が決まる場合の数は$3(2^n-2)$で、n人で勝敗が決まる確率は、$3(2^n-2)/3^n=(2^n-2)/3^{n-1}$です。」(**課題1が解決**)

S3「n人だと、分かりません。」(生徒の課題2)

T「n=10のとき、調べてみよう。」

S4「$(2^{10}-2)/3^9 \fallingdotseq 0.052$です。」(課題2解決)

S5「勝敗まで時間がかかります。」(**問題1解決**)

T「多人数でじゃんけんするとき、効率的な方法はないだろうか。」(問題2提示)

S6「ルールを工夫する必要があります。」(課題3)

S7「グ、チ、パから2つ選ぶ。例えば、グとチのどちらかしか出せないとする。多い手を出した人たちを勝ち組とする。」

T「このルールでn人のときの確率はどうなる。」

S8「まず、アイコの場合を考える。全員が同じ手の確率は$1/2^n$である。nが偶数のときは、グとチが半々でアイコになるので$({}_nC_{n/2}\cdot{}_{n/2}C_{n/2})/2^n={}_nC_{n/2}/2^n$である。次に余事象の確率を考えて、nが奇数のときは$1-2/2^n=1-1/2^{n-1}$である。nが偶数のときは$1-(1/2^{n-1}+{}_nC_{n/2}/2^n)$である。」(課題3が解決)

S9「n人だと、分かりません。」(課題4)

T「n=10のとき、調べてみよう。」

S10「$n=10,\ 1-(1/2^9+{}_{10}C_5/2^{10})=1-(1/512+63/256)\fallingdotseq 1-0.2655=0.7345$」

（課題４解決）

S11「勝負が早く決まります。」（問題２解決）

T「他に早く決まる方法はあるか。」（問題３提示）

S12「３種類の手がそろっても、最も少ない手を出した人たちを勝ちとする。」

S13「ｎ人のときの確率は？」（課題５）

S14「ｎ人が３の倍数でない時は、同じ手を出した時のみアイコだから $1-3/3^{n}=1-1/3^{n-1}$ です。ｎ=10 の時の確率は $1-1/3^{9}=1-1/19683 \fallingdotseq 1-0.00005=0.99995$」

S15「ｎ人が３の倍数の時は、ｎ＝3mとしてアイコの場合を考えるとグ・チ・パが各m人で同数の時か、全員同じ手を出す時だからアイコの確率は、${}_{3m}C_{m}\cdot{}_{2m}C_{m}\cdot{}_{m}C_{m}/3^{3m}+3/3^{3m}=(3m)!/3^{3m}(m!)^{3}+3/3^{3m}$ ，$3/3^{3m}$ は減少関数 $[\{3(m+1)\}!/3^{3(m+1)}\{(m+1)!\}^{3}]\div\{(3m)!/3^{3m}(m!)^{3}\}=\{(3m+2)(3m+1)\}\div\{(3m+3)(3m+3)\}<1$ より $(3m)!/3^{3m}(m!)^{3}$ も減少関数　m=3つまりｎ＝9のとき勝敗がつく確率は $1-9!/3^{9}(3!)^{3}-3/3^{9}=1-561/6561 \fallingdotseq 1-0.0855=0.9145$ なり、ｎ≧9 のときの確率は 0.9145 以上となる。」（課題５解決）

S16「勝負がすぐ決まります。」（問題３解決）

T「他に早く決まる方法はあるか。」（問題４提示）

S17「勝負に不参加の一人とじゃんけんをする。」

S18「ｎ人のときの確率はどうなる。」（課題６）

S19「アイコの場合を考えると、例えば勝負に不参加の一人がグのとき勝負に参加している人がグかチを出す時である。よって $1-{}_{3}C_{1}\cdot 2^{n}/3^{n+1}=1-2^{n}/3^{n}$ となる。」（課題６解決）

S20「ｎ人だと、分かりません。」（課題７）

T「ｎ＝10 のとき、調べてみよう。」

S21「$1-2^{10}/3^{10}=1-1024/59049 \fallingdotseq 1-0.01734=0.98266$」（課題７解決）

S22「これも早く勝負つきます。」（問題４解決）

授業例より、S1 たちの予想は他の生徒たちの主体的な学習意欲も引き出した。そして、ｎ人でじゃんけんをする時、勝負が決まる確率を求めることが生徒自信の課題となった。また、課題解決に向け生徒自信の考えを発表したり議論したりするなどの活動が展開されていった。このように結果を予想し、生徒自信が課題をつかみ課題を解決していく主体的な学習を促すことができた。このことは新学習指導要領解説に記述されている学習指導方針とも合致する。更に生徒自信が課題を発展させ、解決の過程を振り返ってよりよい解決方法を比較検討する活動も行われた。新学習指導要領解説によると、課題学習については数学的活動を一層重視するものとしている。この点でも適切な教材であったと考えている。また、生徒たちは課題１から７までの解決の過程で、他の生徒の考え方との相違点や既習事項との共通点などを「比較」しながら、確かな理解と納得を獲得していった。

ところで、数学教育において「比較」の意味をどのように捉えていくことが、学習指導上意義があるのだろうか。「対比・対照・照合」は、「比較」とは違う微妙な独自性も持ち合わせながら、「比較」の部分集合として捉えることができる。この意味で「対比・対照・照合」は、「比較」の狭義として捉えることができる。しかし、大切なことは比べるという活動を通して、生徒の主体的な学習意欲や確かな理解を生み出すことである。そのために、必ずしも「比較」の意味自体を、厳密に分類することが重要でない場合もある。教師の側で学習指導上、分析や考察などで必要な場合のみ、「比較」の意味を「対比・対照・照合」のように分類して使用していく。そうでない場合は、「比較」を広い意味で使っていくことにする。そこで筆者は、数学教育における「比較」の意味を、次のように定義していく。

比較とは、２つ以上の考え方などの共通点や相違点を比べることである。そこには、比較の狭義としての対比・対照・照合なども含まれる。

（２）「比較」を取り入れた学習指導の在り方

筆者は、「説明中心の授業」を長らく続けてきた経緯がある。一見効率のよい授業構成のようであり、教師主導で授業を進めることができ、教科書の進度を早めることができる。しかし、「説明中心の授業」には、生徒の主体的な学習意欲を喚起し、確かな理解と納得を生み出すうえで困難性をはらんでいる。(ジェームズ,2002)(ブルーアー,1997)

「問題解決」の授業では、いろいろな場面で「比較」を設定することができる。教師が「比較」を

「問題解決」の授業に意図的に取り入れていくことは、授業に活気と躍動感をもたらすためにも重要である。そのような授業を構成する上で、「説明中心の授業」では無理な面がある。なぜならば、「説明中心の授業」に、生徒の主体的な「比較」という活動をもたらすことが難しいからである。

「問題解決の授業」とは問題を提示することから授業を始め、その問題の解決過程で新たな知識や技能、数学的な見方や考え方などを身に付けさせていく学習指導である。(相馬,1997)「比較」を取り入れた学習指導の在り方を明らかにするために、筆者の「問題解決」の授業例を以下に提示する。

単元名は、「数学Ａ　３章　論理と集合　章末整数問題」である。指導目標は、「数学的活動を通して証明の必要感と背理法の活用方法を学ぶ。」である。この教材は、新学習指導要領における課題学習の教材としても活用できると考えている。

＃01　Ｔ「問題を書きます。」(**問題提示の場**)

問題　自然数a,b,cが$a^2+b^2=c^2$を満たすとき Ａは「a,bのうち少なくとも一方は２の倍数」 Ｂは「a,bのうち少なくとも一方は３の倍数」 Ｃは「a,b,cのうち少なくとも一つは５の倍数」 と言った。この中にうそつきはいるか。

(a=3, b=4, c=5やa=6, b=8, c=10などを代入して比べている生徒もいた。)

＃02　Ｔ「うそつきはいますか。」

＃03　S1「Ａ、Ｂは正しいようです。」(**予想の場**)

＃04　S2「Ｃはうそつきのようです。」(**予想の場**)

(成立しない例もあるだろうと予想した生徒は、２～３例の数値を代入して正しいと予想した生徒に疑念を抱いていた。正しいという予想と比べて、正しくないようだと予想を立てていた。)

＃05　S3「a=5,b=12,c=13も満たすので正しい。」

＃06　Ｔ「本当にうそつきはいませんか。」

＃07　S4「A,Bは証明の必要があります」(**課題１**)

＃08　S5「Ｃも証明の必要があります。」(**課題２**)

＃09　Ｔ「どのように証明しますか。」

＃10　S5「a, b共に偶数、aが偶数, bが奇数、aが奇数, bが偶数の場合に分けて証明します。」

＃11　S6「背理法で証明する方がよさそうです。」

(両者の証明方法を比べると、背理法の方が優れているので、Ａ，Ｂ，Ｃについて背理法で調べた。)

＃12　S7「ａとｂがともに奇数と仮定すると、ｃは偶数である。したがって、ｋ，ｍ，ｎを自然数として$a=2k-1$, $b=2m-1$, $c=2n$とおけて、$a^2+b^2=c^2$は$(2k-1)^2+(2m-1)^2=(2n)^2$より$2(k^2+m^2-k-2)^2+1=2n^2$となり、左辺は奇数、右辺は偶数だから、これは不合理。よってa,bのうち少なくとも一方は２の倍数である。しがって、Ａは正しい。」

＃13　S8「ａ，ｂのどれも３の倍数でないと仮定する。ｍを自然数として、$a=3m-1$のとき$a^2=(3m-1)^2=3(3m^2-2m)+1$、$a=3m-2$のとき$a^2=(3m-2)^2=3(3m^2-4m+1)+1$、ｂも同様であり、$a^2$, b^2を３で割った余りは必ず１となる。したがって$a^2+b^2=\{(3の倍数)+1\}+\{(3の倍数)+1\}=(3の倍数)+2$より$a^2+b^2$を３で割った余りは２となる。ところが$c=3n$のとき$c^2=3(3n^2)$、$c=3n-1$のとき$c^2=(3n-1)^2=3(3n^2-2n)+1$、$c=3n-2$のとき$c^2=(3n-2)^2=3(3n^2-4n+1)+1$となり$c^2$を３で割った余りは０または１となる。これは$a^2+b^2=c^2$であることに矛盾するのでａ，ｂのうち少なくとも一方は３の倍数である。したがって、Ｂは正しい。」(**課題１が解決**)

＃14　S9「a,b,cのどれも５の倍数でないと仮定する。$a=5m-1$のとき$a^2=(5m-1)^2=5(5m^2-2m)+1$、$a=5m-2$のとき$a^2=(5m-2)^2=5(5m^2-4m)+4$、$a=5m-3$のとき$a^2=(5m-3)^2=5(5m^2-6m+1)+4$、$a=5m-4$のとき$a^2=(5m-4)^2=5(5m^2-8m+3)+1$、ｂもｃも同様であり、$a^2$も$b^2$も$c^2$も５で割った余りは１または４となる。したがって、$a^2+b^2=\{(5の倍数)+1\}+\{(5の倍数)+4\}=(5の倍数)$、または$a^2+b^2=\{(5の倍数)+1\}+\{(5の倍数)+1\}=(5の倍数)+2$、または$a^2+b^2=\{(5の倍数)+4\}+\{(5の倍数)+4\}=(5の倍数)+8=(5の倍数)+3$より、$a^2+b^2$を５で割った余りは０または２または３となる。ところが、これは$a^2+b^2=c^2$であることに矛盾である。以上よりａ，ｂ，ｃのうち少なくとも一つは５の倍数である。したがってＣは正しい。」(**課題２が解決**)

＃15　S10「Ａ，Ｂ，Ｃは正しく、うそつきがいないことが分かりました。」(**問題が解決**)

以上の授業記録から、「問題解決」の授業のどの場面で「比較」が生じ、学習指導にどのように

「比較」を取り入れるとよいのか考察していく。

#01は、問題提示の場である。以前の問題と本時の問題を比べながら、共通点や相違点などを考えている生徒もいた。もし、問題どうしの「比較」が生じていない場合、教師が「この問題と前時の問題で似ているところはないだろうか。」と発問すると、学習指導上有効な場合がある。

#03,#04,#05は、予想する場である。異なる予想の「比較」は、学習への動機づけを高める。どれが正しいのか知りたいという知的好奇心を刺激する。これが、主体的な学習意欲となり、考え方の追求が始まる。予想できず分からない生徒にとっても他の生徒の予想などを聞いて、どれが正しいかという学習意欲が芽生えてくる。「予想」について相馬(1995)は次のように述べている。

「自分で予想することによって，その予想が正しいかどうかを明らかにしたいという気持ちになる．それが学習意欲につながるのである．また，異なる予想が出た場合は，学習意欲が一層高まる．」

異なる予想が出てこない場合でも、教師が「本当に、これが正しいのだろうか。」などと発問する。そのような発問で、生徒が自己の予想と他の可能な予想を「比較」するように促すことができる。

#07と#08は、課題をつかむ場である。予想から、その理由を追求することによって、生徒の中から課題が浮かび上がってきた。異なる課題を「比較」することによって、共通点や相違点が明確になってきた。課題が異なっているように見えても、両者の「比較」によって、二者を関連付けながら解決方法を導くことができた。また、異なる課題の「比較」によって、考え方の追求を一層促すこともできた。なお、課題が一つだけの場合でも、そこから多様な解決方法を考えるように指導する。そして、多様な考えを「比較」していくことが重要である。そのためにも、机間指導などで、つまずきも含めて多様な生徒の考えを把握することが大事である。

#10、#11から#14は、課題の解決とそれを受けて問題が解決される場である。課題1と課題2の解決方法の「比較」によって、両者を関連付けることができた。課題1と課題2の解決方法などを「比較」しながら考え方の道筋を振り返ってみた。このような「比較」により、確かな理解と納得を生み出した。

課題解決において、合同式を活用する方法がある。新学習指導要領の教科書には、発展事項として合同式が記載されている。以下のように合同式を活用すると証明が簡便に記述できるので、生徒の実態に応じて両者の課題解決を「比較」すると、確かな理解と納得が得られることができる。

#16　S11「a,bは共に2の倍数でないとする。合同式は、すべてmod 4であるとする。$a\equiv1, b\equiv1$のとき$a^2+b^2\equiv1^2+1^2=2$、$c\equiv0$のとき$c^2\equiv0^2=0$、$c\equiv1$のとき$c^2\equiv1^2=1$であるからa,bは共に2の倍数でないと$a^2+b^2=c^2$は成立しない。よって$a^2+b^2=c^2$ならば少なくとも一方は2の倍数である」

#17　S12「a，bは共に3の倍数でないとする。合同式は、すべてmod 3であるとする。$a\equiv1$のとき$a^2\equiv1^2=1$、$a\equiv2$のとき$a^2\equiv2^2\equiv1$また$b\equiv1$のとき$b^2\equiv1^2=1$、$b\equiv2$のとき$b^2\equiv2^2\equiv1$だから$a^2+b^2\equiv1^2+1^2=2$である。$c\equiv0$のとき$c^2\equiv0^2=0$、$c\equiv1$のとき$c^2\equiv1^2=1$であるからa,bは共に3の倍数でないと$a^2+b^2=c^2$は成立しない。よって$a^2+b^2=c^2$ならば少なくとも一方は3の倍数である」**(課題1が解決)**

#18　S13「a,b,cは共に5の倍数でないとする。合同式は、すべてmod5であるとする。$a\equiv1$のとき$a^2\equiv1^2=1$、$a\equiv2$のとき$a^2\equiv2^2=4$、$a\equiv3$のとき$a^2\equiv3^2\equiv4$、$a\equiv4$のとき$a^2\equiv4^2\equiv1$また$b\equiv1$のとき$b^2\equiv1^2=1$、$b\equiv2$のとき$b^2\equiv2^2=4$、$b\equiv3$のとき$b^2\equiv3^2\equiv4$、$b\equiv4$のとき$b^2\equiv4^2\equiv1$である。以上から$a^2+b^2\equiv1^2+1^2=2$，$a^2+b^2\equiv1^2+4^2\equiv2$，$a^2+b^2\equiv4^2+4^2\equiv2$である。一方、$c^2\equiv1$，$c^2\equiv4$であるから、a,b,cは共に5の倍数でないときは$a^2+b^2=c^2$は成立しない。よって、$a^2+b^2=c^2$ならばa,b,cのうち少なくとも一つは5の倍数である。」**(課題2が解決)**

以上より、「問題解決の授業」の5つの場面(問題提示の場、予想の場、課題をつかむ場、課題を解決する場、問題を解決する場)において、「比較」を取り入れた学習指導を行うことができる。各場面における既知や未知（既習事項や未習事項、自己の考えや他者の考えなど）との「比較」によっ

て、新たな既知（確かな理解）を獲得することができる学習指導であった。(市川,1998)

ここで考察してきたように、「比較」を取り入れた学習指導とは、一斉授業における生徒の多様な考えなどの共通点や相違点を比べながら、考え方の道筋などを全員でしっかりつかませる指導である。そして、2つ以上の考えなどを「比較」することによって、主体的な学習意欲を喚起し、確かな理解と納得をもたらす指導でもある。

最後に、課題学習として更に発展させていくために、$a^2+b^2=c^2$を満たす自然数a,b,cはピタゴラス数として一般的に、$d(m^2-n^2)^2+d(2mn)^2=d(m^2+n^2)^2$，(d,m,nは自然数)が成り立つ。三角関数を使って証明できるので数学Ⅰの三角比の発展学習とも絡めることができそうである。

3．「比較」の有効性と問題

(1)「比較」の有効性

学習指導に「比較」を取り入れると、どのような有効性があるのかを、授業実践と文献などから究明していく。ここでは課題学習に相応しいフェルマーの小定理の導入問題事例を提示していく。

問題　次の数は13で割り切れるか。　①$2^6$，②$2^{12}$，③$2^{12}-1$，④$3^{12}-1$，⑤$7^{12}-1$

次のように、異なる予想を「比較」していった。

S01「①と②は割り切れないようだ。」
S02「③も割り切れないようだ。」
S03「③は割り切れるようだ。」
S04「全部割り切れないのではないか。」
S05「③④⑤が割り切れるかもしれない。」

異なる予想の「比較」は、「どちらが正しいのかを調べたい知りたい」という知的好奇心を刺激した。他者の予想と「比較」して「本当はどれか知りたい」という気持ちが高まった。知的好奇心が刺激されたのである。知的好奇心は内発的動機づけの重要な構成要素の一つである。(稲垣，1980)

そして、次のような考え方の追求が始まった。

S06「①は、$2^6=(2^3)^2=8^2=64=13\times4+12$より、割り切れない。」
S07「②は、$2^{12}=(2^6)^2=(13\times4+12)^2=13^2\times4^2+2\times13\times4\times12+12^2$，$12^2=144=13\times11+1$より、余りが1で、13では割り切れない。」
S08「②の余りが1だから③は13で割り切れる。」
T　「④⑤は13で割り切れるか。」
S09「①②③と同様に考えると分かりそうだ。」
S10「$3^{12}=(3^6)^2=729^2=(13\times59+12)^2=13^2\times59^2+2\times13\times59\times12+12^2$，$12^2=144=13\times11+1$より余りが1だから、$3^{12}-1$は13では割り切れる。」
S11「$7^{12}=(7^6)^2=117649^2=(13\times9049+12)^2=13^2\times9049^2+2\times13\times9049\times12+12^2$，$12^2=144=13\times11+1$より余りが1だから、$7^{12}-1$は13では割り切れる。」

この後、$4^{12}-1$、$5^{12}-1$なども13で割り切れるかが生徒自身の課題となった。以上より、異なる予想の「比較」が生ずると、生徒は自ら学び考えようとする学習意欲を高める。また、どれが正しいのかを裏付けるために考え方の追求も始まる。

次に、場合の数の問題について生徒の多様な考えを「比較」しながら、生徒が確かな理解と納得を獲得した授業例について質的な考察をしていく。

問題　男子4人、女子a，b，cの3人がいる。前列4人、後列3人が並んで写真撮影をする。女子3人が同じ列にいて左からa，b，cの順に並ぶ並び方は全部で何通りあるか。

T　「自分なりの考えを、式で表現してみよう。」
S01「4!×4!×1＝586通り。」
S02「3!×4!+3!×4×4×3!=144+576＝720通り。」
S03「4!×2×4＝192通り。」
S04「3!×4!＋2×3!×3!＝144＋72＝216通り。」
S05「4!×5!＝2880通り。」
S06「4!×1+4×4!＝24＋96＝120通り。」

(S04の支持者は2人、S06の支持者は8人、その他の支持者は各1人。その他は分からない。S06の考えを聞いてみたいという雰囲気になった。)

T　「S06に説明してもらいましょう。」
S07「まず、女子3人が後列に並ぶ場合を考えるとa，b，cの1通りで、前列は男子4人の順列を考えて4!通りとなるので、1×4!通りです。次に女子3人が前列に並ぶ場合を考えます。女子が左a，b，c順に並ぶ位置を4箇所から3箇所選ぶ場合を考えて${}_4C_3$＝4通りです。この各々に対して前列1箇所と後列3箇所に

男子 4 人を並べる順列を考えて4!通りなるので、4×4!通りです。以上から、4!×1+4×4!=24+96=120 通りと考えました。」

T 「S07に反論や質問などありますか。」

(全員が納得して、問題が解決した。)

以上のように、多様な考えは生徒間に知的な葛藤を生み出す。葛藤は心理的に不安定な面をもつので理解と納得を渇望する心的動向を生み出す。つまり、どれが正しい考えなのかを知りたいという意欲を生み出す。これが確かな理解と納得を生み出す原動力でもある。また、他者の考えと自己の考えを「比較」し、数学的に考察して自己の考えを表現することは新学習指導要領の目標でもある。次の授業例についても質的な考察を進めていく。

問題　立方体の６つの面を６色で塗る方法は何通りあるか。ただし、隣り合う面は異なり、回転させると同じになる塗り方は同じとする。

T 「自分なりの考えを式で表現してみよう。」

S01「(６－１)！／２＝６０通り。」

S02「(６－１)！＝１２０通り。」

S03「(６－１)！／６＝２０通り。」

S04「(４－１)！×５＝３０通り」

S05「５は何を意味するのだろうか。」

T 「S04に説明してもらいましょう。」

S04「回転しないように固定します。上面と下面を除いた側面は、４色の円順列の考えを使って(4−1)！通りです。上面の１色に対して下面は 5 通りの色が考えられます。よって(4−1)！×5=30 通りと考えることができます。」

T 「S04に反論や質問などありますか。」

(全員が納得して、問題が解決した。)

以上のように、多様な考えは生徒間に知的な葛藤を生み出す。葛藤は心理的に不快な面をもつ。これを解消するために、どれが正しい考えなのかを知りたいという意欲を生み出す。このような「比較」を含む知的活動が、確かな理解と納得を生み出していく数学的活動でもある。一斉授業で多様な考えを「比較」し、まとめる指導は重要である。

古藤(1995)は、多様な考えの生かし方まとめ方の指導を重視していて、理解の様相について次のように述べている。(下線と太字は筆者)

「大脳生理学の知見によれば，人間の大脳の左半球は主として論理を、右半球は直感を司っているそうである。(中略)問題解決における左右の方向に関する理解を，次の二つに分けて考察することにする。

左：別の考え，または他のアイデアとの<u>比較を通して獲得する理解</u>」

「比較」と理解に関って、相馬(1999)は、確かな理解を定着させるために指導内容以外に、それを「どのように指導するのか」ということの重要性を指摘し「比較」の重要性を次のように述べている。

「文字や式を用いることのよさや意義を含めた<u>確かな理解のためには、「比較」する場面を意図的に指導に取り入れることが有効</u>であろう．(中略) これらの考え方も取り上げて<u>比較することを通して，それぞれの考え方のよさや問題点が確認され，教科書に示されている証明の意味や必要性を実感させることができる</u>であろう.」(下線と太字は筆者)

以上から、「比較」を取り入れることの有効性をまとめると、次の３点を特に強調できる。

①　自ら学ぼうとする学習意欲を引き出す。 ②　考え方の追求を促す。 ③　確かな理解や納得を獲得させる。

(2)「比較」の有効性を引き出す問題

「問題解決」の授業で「比較」の有効性を引き出すためには、提示する問題の質が重要である。問題をどのように工夫すれば有効なのかを、筆者の実践例から紹介していく。

単元名は、「数学Ａ　３章　論理と集合　章末整数問題」である。指導目標は、「数学的活動を通して証明の必要性と証明の考え方のよさを学ぶ。」である。この教材は、新学習指導要領における課題学習の教材としても活用できると考えている。

T 「問題を書きます。」**(問題提示の場)**

問題　Aは「m^3-mは３の倍数である。」 Bは「m^4-mは４の倍数である。」 Cは「m^5-mは５の倍数である。」と言った。 mは整数である。この中にうそつきはいるか。

T 「この中にうそつきはいるか。」**(予想の場)**

S01「m=2 の時 $2^3-2=6$ よりＡは正しそうだ。」

S02「m=4 の時 $4^4-4=252$ より４の倍数だ。」

S03「m=5の時$5^4-5=640$よりBは正しそうだ。」
S04「m=2の時$2^5-2=30$よりCは正しそうだ。」
(予想の比較により興味と関心が一層高まった。)
T 「3人の中に本当にうそつきはいないのか。」
S05「証明する必要があります。」(課題をつかむ)
(証明することが生徒自信の課題となった。以下は生徒と対話しながら課題を解決していった。)
S06「kを整数とする。$m=3k-1$のとき$m^3-m=(3k-1)^3-(3k-1)=3k(3k-1)(3k-2)$より$m^3-m$は3の倍数である。$m=3k$のとき、$m^3-m=(3k)^3-3k=3k(3k+1)(3k-1)$より$m^3-m$は3の倍数である。$m=3k+1$のとき$m^3+m=(3k+1)^3-(3k+1)=3k(3k+1)(3k+2)$より$m^3-m$は3の倍数である。」($m^3-m$は3の倍数である証明)
S07「$m^3-m=(m-1)m(m+1)$となり連続する3整数のいずれかは3の倍数だからm^3-mは3の倍数である。」(m^3-mは3の倍数である証明)
S08「$m=4k$のとき$m^4-m=(4k)^4-4k=4(64k^3-k)$より$m^4-m$は4の倍数である。$m=4k+1$のとき$m^4-m=(4k+1)^4-(4k+1)=(4k+1)\{(4k+1)^3-1\}=(4k+1)(64k^3+48k^2+12k)=4(4k+1)(16k^3+12k^2+3k)$より$m^4-m$は4の倍数である。$m=4k+2$のとき$m^4-m=(4k+2)^4-(4k+2)=16(2k+1)^4-(4k+2)=16(2k+1)^4-(4k+4-2)=4\{4(2k+1)^4-(k+1)\}+2$より$m^4-m$は4の倍数でない。$m=4k-1$のとき$m^4-m=(4k-1)^4-(4k-1)=(4k-1)\{(4k-1)^3-1\}=(4k-1)\{4(16k^3-12k^2+3k)-2\}=4\{(4k-1)(16k^3-12k^2+3k)-2k\}+2$より$m^4-m$は4の倍数でない。」($m^4-m$は4の倍数とは限らない。)
S09「$m^5-m=m(m+1)(m-1)(m^2+1)$, kは整数とする。$m=5k-2$のとき、$m^2+1=(5k-2)^5+1=5(5k^2-4k+1)$より$m^2+1$は5の倍数。$m=5k-1$のとき$m+1=5k$だから$m+1$は5の倍数。$m=5k$のときmは5の倍数。$m=5k+1$のとき$m-1=5k$より$m-1$は5の倍数。$m=5k+2$のとき$m^2+1=5(k^2+4k+1)$より$m^2+1$は5の倍数。以上よりmがどんな整数をとっても、m, $m+1$, $m-1$, m^2+1のいずれかが5の倍数となるのでm^5-mは5の倍数である。」(5の倍数である証明)
S10「$m^5-m=m(m+1)(m-1)(m^2-4+5)=m(m+1)(m-1)(m^2-4)+m(m+1)(m-1)5=(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2)+5m(m+1)(m-1)$となり、連続する5つの整数の積は5の倍数だから$m^5-m$は5の倍数である」(5の倍数である証明)
(課題解決の比較により確かな理解と納得を獲得)
S11「Bがうそつきだ。」(問題が解決した。)

課題解決において、合同式を活用する方法がある。新学習指導要領の教科書には、発展事項として合同式が記載されている。以下のように合同式を活用すると証明が簡便に記述できるので、生徒の実態に応じて両者の課題解決を「比較」すると、確かな理解と納得が得られることができる。
S12「合同式は、すべてmod3であるとする。$m\equiv0$のとき$m^3-m\equiv0^3-0=0$、$m\equiv1$のとき$m^3-m\equiv1^3-1=0$、$m\equiv2$のとき$m^3-m\equiv2^3-2=6\equiv0$、以上よりすべての整数mについて$m^3-m$は3の倍数である」($m^3-m$は3の倍数である証明)
S13「合同式は、すべてmod4であるとする。$m\equiv0$のとき$m^4-m\equiv0^4-0=0$、$m\equiv1$のとき$m^4-m\equiv1^4-1=0$、$m\equiv2$のとき$m^4-m\equiv2^4-2=14\equiv2$、$m\equiv3$のとき$m^4-m\equiv3^4-3=78\equiv2$、以上より全ての整数mについて$m^4-m$は4の倍数でない。」($m^4-m$は4の倍数とは限らない)
S14「合同式は、すべてmod5であるとする。$m\equiv0$のとき$m^5-m\equiv0^5-0=0$、$m\equiv1$のとき$m^5-m\equiv1^5-1=0$、$m\equiv2$のとき$m^5-m\equiv2^5-2=30\equiv0$、$m\equiv3$のとき$m^5-m\equiv3^5-3=240\equiv0$、$m\equiv4$のとき$m^5-m\equiv4^5-4=1020\equiv0$、以上より、すべての整数mについて$m^5-m$は5の倍数である。」($m^5-m$は5の倍数である証明)

この授業例で提示した問題は、一見正誤を問うだけの単純な形の問題であり、簡単に作成できそうである。しかし、この問題作成に関して「比較」の有効性を引き出すための意図が織り交ぜられている。そのための問題づくりの工夫に関しては、次の5つの視点が参考になる。(相馬, 1997)

ア	教科書を逆から教える発想での問題
イ	すべての生徒が何らかの解決ができる問題
ウ	理由より答えを先に問う問題
エ	異なる予想が生じるような問題
オ	いろいろな考え方ができるような問題

相馬(1997)は、視点アについて教科書の練習問題を始めに与えることによって、生徒に目標と課

題意識を持たせることができると述べている。筆者もこの視点で、入試問題集にある次の問題を、多少変えて授業の始めに問題として提示した。

mを整数とする。 m^5-mは5の倍数であることを示せ。

問題づくりの視点アで、この問題や「m^4-1は5の倍数であることを示せ。」や「pは素数，mは整数，このときm^p-mはpの倍数であることを示せ。(フェルマーの小定理第2形式)」を提示したらどうであろうか。生徒集団の実態にもよるだろうが、問題づくりの視点イということが生かされないであろう。それでは、教科書や問題集のような問題提示が最良であろうか。「m^3-mはm=3, m=4, m=5のとき3の倍数であることを確認し、mが全ての整数ときも成立することを示せ。」と提示したら良いのだろか。これも証明させるために強制的に段階を追って思考実験を行わせている。これでは、生徒自身に証明の必要性や学習決定感などを感じさせられない。それでは、どのように問題を作り直せば、生徒の関心と意欲を高める問題となるであろうか。そのためには、生徒の知的好奇心（スケンプ, 1973)を喚起する方法を考えることが大事である。その方法としては身近で意外性を与える題材を選び、2から4つのもっともらしい選択肢を配置することが考えられる。つまり、その選択肢の中に誤概念を含ませて知的な葛藤(伏見,1993)を引き出すように配置するのである。

そこでこの授業例では、「うそつきはいるか、いないか」の2つの選択肢を与えるために、「小問のようなA，B，Cを複数配置し、うそつきはいるか。」と、問題を作り直したのである。このことは、問題づくりの視点イとも合致する。しかも、理由より「正しいか、間違いか」のどちらかを答えることが先である。このことも、問題づくりの視点ウとも合致する。

この問題では、異なる予想が出やすく、異なる予想の「比較」を通して問題解決への学習意欲が喚起されていき、考え方の追求が始まった。そして、理解と納得へと結びついていったのである。また、生徒の実態にもよるが合同式を活用した別解との「比較」も生徒から涌き出ることを期待したい。別解との「比較」も理解の深化のために重要である。いろいろな別解が生み出され易い問題づくりを心がけることも大切である。

最後に、生徒から「比較」の有効性を引き出すことのできる問題づくりの留意点をまとめる。なお、筆者の授業実践から効果的であった問題例も1つずつ付加する。(①～⑤の視点は重複もする。)

①正誤を問う形にする。

例　平面上の5個の格子点を全て結ぶ。これらの線分の中点の少なくとも1つは格子点である。(格子点の座標は全て整数)正しいか。

②並列に配列する。

例　$2^{99}-1$，$2^{100}-1$，$2^{101}-1$がある。この中に、7の倍数はあるか。

③二者択一型の単純な形にする。

例　x，yは任意の実数のとき
$[x+y]\leqq[x]+[y]$，$[x]+[y]\leqq[x+y]$
どちらが正しいか。

④条件不足の形にする。

例　2^n-1がmの倍数になる。これを満たす自然数nと素数mがあるか。

⑤式,数値,順番などの表現を工夫する。

例　a,b,c,d,e,fは整数である。$5a+7b=1$，$26c+7d=1$，$26e+111f=1$を満たす1組の(a，b)，(c，d)，(e，f)を求めよ。

4．おわりに

「比較」を取り入れた学習指導は、新学習指導要領の一般方針でもある自ら学び自ら考える「生きる力」の育成にも有効である。また、高校数学の新学習指導要領の課題は「数学的活動を通して、体系的な理解を深め、数学的に考察し表現する能力を高め、数学のよさを認識し、数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる.」であった。このことや「創造性の基礎を培う」ことも、「比較」を「課題学習」や日常的な授業などの学習指導に取り入れることにより可能となることが授業実践や文献研究などから明らかになってきた。

数学的活動の楽しさに関って、手島(1987)は、「数理的事象の問題解決において問い続ける楽しさであり、納得する楽しさである。」と述べている。筆者は、授業で数学を学ぶ意義を、「多様な考えを

比較検討しながら、皆で納得していくこと」と捉えたい。知的な揺らぎ、つまり、多様な考えの「比較」によって生ずる知的な葛藤(手島,1994,1995)を通して集団で納得していくことが、生きる楽しさや学ぶ喜びとなり学力向上につながると考える。

「比較」は、「課題学習」や「問題解決」の授業に取り入れ易い学習指導でもある。「課題学習」や「問題解決」の授業では、提示する問題の質が重要である。生徒から「比較」の有効性を引き出す問題の作成については、動機づけ(デシ,1980)や知的な葛藤(藤井,2000)も考慮すべきである。新学習指導要領における課題学習も数学的活動を一層活性化させる教材の一つとなりうる。今後、「比較」を取り入れた学習指導の実践を積み重ね、日常的な実践に役立つ研究を継続していきたい。

引用・参考文献

文部省(2009), 高等学校学習指導要領解説数学編, 1-17.

長尾栄光(2009),「高等学校数学科新学習指導要領で目指すもの」,『日本数学教育学会誌』,91(3),10－17.

塚原久美子(2009),「高等学校数学科の学習指導における課題と展望」,『日本数学教育学会誌』,91(7),21－29.

吉田明史(2009), 「高等学校の数学教育に求められるもの」,『日本数学教育学会誌』91(7), 12－20.

横弥直浩(2009),「高等学校における数学的活動を重視した授業の提案」,『日本数学教育学会誌』,91(3),18－23.

ポリア(1954), いかにして問題をとくか, 丸善株式会社.

相馬一彦(1997), 問題解決の授業, 明治図書.

相馬一彦(2008),「考える力と知識・技能を「バランスよく,同時に」－「活用させながら習得させる授業を」－」,『日本数学教育学会誌』, 90(5), 23－28.

熊倉啓之(2008),「新学習指導要領の特徴とそれを生かす指導」,『日本数学教育学会誌』,90(7),18－26.

山口武志(2008),「知識基盤社会において求められる学力と新教育課程」,『日本数学教育学会誌』,90(5),29-36.

大谷実(1997), 「第３編４章授業における数学的実践の社会的構成－算数・数学科の授業を事例に－」,『質的研究法による授業研究』, 北大路書房.

日野圭子(1997), 「一人の児童を通してみた数学的表記の内化の過程の分析－比例的推論との関わりにおいて－」,『日本数学教育学会誌』, 79(2), 2－10

中西知眞紀(1999),「よい授業」の創造と展開,明治図書.

ジェームズ(2002),日本の算数数学教育に学べ,教育出版.

ブルーアー(1997), 授業が変わる, 北大路書房.

相馬一彦(1995), 「予想」を取り入れた数学授業の改善, 明治図書, 30.

市川伸一(1998),心理学から学習をみなおす,岩波書店.

稲垣佳世子(1980), 「第Ⅱ部　自己学習における動機づけ　知的好奇心の役割」,『波多野誼余夫編. 自己学習能力を育てる』, 東京大学出版会, 34－95.

稲垣佳世子(1973), 知的好奇心, 中央公論社.

古藤怜(1995),「問題解決における多様な考えとその指導」,『日本の算数・数学教育 1995 数学学習の理論化へむけて』,日本数学教育学会,産業図書,110-117.

相馬一彦(1999),「第Ⅱ章代数」,『数学科教育』,学文社,98-99.

スケンプ(1973), 数学学習の心理学, 新曜社.

伏見陽児・麻柄啓一(1993), 授業づくりの心理学, 国土社.

手島勝朗(1987), 楽しい授業の提案, 明治図書.

手島勝朗(1994), 「認知的葛藤の生成と解消―対角線の存在をめぐって―」,『第 27 回数学教育論文発表会論文集』

手島勝朗(1995), オープンアプローチの新しい展開, 明治図書.

E・L・デシ(1980), 内発的動機づけ, 誠信書房.

藤井斉亮(2000), 「理解と認知的コンフリクトについての一考察」,『日数教学会誌』, 第 45 巻, 24－25.

長崎栄三(2004), 高校新数学科の在り方, 明治図書.

日本数学教育学会編(2000), 和英/英和算数数学活用辞典, 東洋館出版社.

日本数学教育学会編(2010), 数学教育学研究ハンドブック, 東洋館出版社.

第3部　実践論文

「比較」を取り入れた学習指導

北海道滝川高等学校　工藤　寛之

要　約

筆者は、授業観に「教師の説明→問題演習」という固定観念をもっていて、「教師主導、説明中心の授業」から脱皮できないでいた。説明中心の授業では、生徒の主体的な学習を生み出すことは難しい。筆者の目指している授業とは、「自ら学び考え、確かな理解と納得が得られる授業」である。そのためにも「問題解決」の授業を実践していくことによって、教科書の内容も理解し入試にも対応できる学力を身に付けさせることができる。そして、「問題解決」の授業を実践しながら、「比較」を取り入れた学習指導の有効性に着目してきた。「比較」は数学的活動の一種であると捉えることができる。意識的・戦略的に「比較」を取り入れた学習指導は、主体的な学習意欲と確かな理解や納得を得る上で有効である。また、新学習指導要領の課題である「体系的理解」「表現能力」「数学のよさの認識」「数学的論拠に基づいて判断する態度」「創造性」を培う上でも有効である。「比較」の有効性を生徒から引き出す問題づくりの工夫についても、授業実践などより明らかになってきた。

キーワード：比較　数学的活動　表現力　創造性　問題解決　知的好奇心　動機づけ　知的葛藤

1．はじめに

（1）新学習指導要領と「比較」

新学習指導要領に基づく高等学校の教育課程は、平成24年度の第1学年から数学理科が先行実施されていく。新学習指導要領における高等学校数学科の目標は以下の通りである。(文部省,2009)

「数学的活動を通して、数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め、事象を数学的に考察し表現する能力を高め、創造性の基礎を培うとともに、数学のよさを認識し、それらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる。」（下線が変更部分）

「体系的な理解」は、改めて体系的に組み立てていく数学の考え方を強調している。「考察し表現する能力」は、今回の改訂ですべての教科等を通して、思考力・判断力・表現力等を育てることが重視されたからである。ここで言う「数学のよさ」とは、数学的な見方や考え方のよさに加え、数学の概念や原理・法則や表現・処理とその用い方のよさである。さらに実用性などの数学の特徴及び数学的活動や思索することの楽しさなどである。「数学的論拠に基づいて判断する態度」の部分は新たに付け加えられた。これは、ある事象の数学的側面に着目し、考察・処理した結果から自分で合理的な判断を下す態度である。(長尾・塚原,2009)

「創造性の基礎」は、現行の目標から付け加えられたものである。創造性の基礎とは、知的好奇心や粘り強く考える力以外に、多面的な見方、直感力、洞察力、思考力、想像力、豊かな感性や自信なども含まれる。このような力を育てるためには、生徒に相応しい課題の設定や意見を生かすこと、特に生徒の誤りを集団全体のよりよい理解へと導くことが大切だと考えられる。(吉田,2009)そのためにも一斉授業に「比較」を取り入れることによって生徒同士が学び合い、深い理解と考えることの楽しさを味わうことができるように思われる。

「数学的活動」については、観察,操作,実験などの外的活動と、直観,類推,帰納,演繹などの内的

活動が考えられる。このような活動を通して論理的思考力、想像力及び直観力などの創造性の基礎を培うものと考えられる。(横弥,2009) 更に学習活動に「比較」を取り入れることによっても「創造性の基礎を培う」ことが実現できるように思われる。

ところで、目標の冒頭に「数学的活動を通して…」を位置づけ、その充実が一層強調されている。この要因を、吉田(2009)は次のように述べている。

「主体的に問題を解決することは重要である。必要な「数学的活動」は指導者が仕組む必要がある。さらに、生徒自身の内なる思考活動も大切ではあるが、その思考活動が他者や教室でどのように共有されているかが重要で、そのことにより生徒の思考活動が一層深まることにも留意したい。具体的な単元において他者との交流を通して学び合えるような「数学的活動」を展開するにはどのような「しかけ」が必要かを考えることが大切である。」(下線は筆者)

一斉授業で多様な考えを尊重し合いながら「比較」検討することも、お互いの思考活動が一層深まると思われる。このような共同的な学習形態について、永野(2000)は次のように述べている。

「現在，企業におけるコンピュータの利用は，会社の中で情報交換を行いながら共同的な作業や学習を支援するグループウェアの使用が盛んであるという。(中略) 他人に説明してみる，考えたことを略図に表現してみる，複数の人間のアイディアと並べて，比較，評価するなどの活動を通して，グループの生産性も向上していくということが注目されるようになったのである。(中略) 将来創造的な活動をするためだったら，共同的な学習機会を多くすることが必要だろう。」(下線と太字は筆者)

一斉授業と数学的活動に関ることで、中野(2000)は授業の様相を大きく「理解」と「演習」の 2 つに分けている。後者はドリル学習などで指導もしやすく、テストによって数量的に評価しやすい。前者の指導は理解という深遠な問題をはらみ、質的なものを含み評価も難しい。そこで、数学的活動を取り入れるなどの教師の創意と工夫が必要となる。中野(2000)は公立高校の研究授業を参観して、次のように述べている。

「「理解」の授業場面であっても，「数学的活動」を取り入れて生徒に主体的に考えさせるようなことはされず，数学的概念や問題解法を丁寧に一方的に説明したあと演習問題を解かせるという，「説明－問題演習」の指導がほとんどであった。これは，小・中学校の公開授業の多くとは対照的である．小・中学校の先生は，普段の授業はともかく研究授業にあたっては，生徒のいろいろな数学的活動を取り入れた指導を工夫されていることが多い．(中略) 高校の先生には，小・中学校の研究授業をもっと観て，生徒主体の指導方法を学んでいただきたいと思う．」

一層主体的な学習を促すために、数学的活動を取り入れた学習指導を実践していくことが新学習指導要領の課題でもある。筆者は、数学的活動を取り入れた学習指導を具現化するために、問題解決的な学習も必要であると考えている。問題解決的な学習を実践していくためには、相馬(1997)が提唱している「問題解決の授業」がある。「問題解決の授業」の基本的な授業構成は次の通りである。

「Ⅰ問題を理解する　Ⅱ予想する　Ⅲ課題をつかむ　Ⅳ課題を解決する　Ⅴ問題を解決する」

数学的活動を日々の授業で具体的に実現していくために、高校数学においても「問題解決の授業」は有効であるように思われる。筆者は、「問題解決の授業」を実践しながら、「比較」を取り入れた学習指導の有効性に着目してきた。「比較」は数学的活動の一種であると捉えることができる。「比較」を取り入れた学習指導は、「自ら学び考え、確かな理解と納得が得られる授業」などを達成することができる。また、新学習指導要領の一般方針でもある「自ら学び自ら考える力」などの「生きる力」の育成にも有効ではないだろうか。(相馬・熊倉・山口，2008)

(2) 研究の目的と方法

新学習指導要領の課題を解決するために、高校数学の授業改善の必要性がある。その実現のためにも、本研究の目的を次の２点とする。

① 数学教育での「比較」の意味と、「比較」を取り入れた学習指導の在り方を明らかにする。

② 「比較」を取り入れた学習指導の有効性と、そ

のための問題作成について明らかにする。

筆者は、教育現場において日々授業実践をしており、質的な資料（自由な観察・面接・会話、生徒のノートや授業記録ノートの記述など）を収集しやすい立場にいる。これらの資料を基にして、質的な分析と考察(大谷,1997)を加えることにより、文献研究(日野,1997)や授業実践(中西,1999)などから「比較」を取り入れた学習指導について提案していきたい。また、「比較」を取り入れることの有効性や、生徒から「比較」の有効性を引き出すための問題づくりの工夫についても、授業実践などから明らかにしていく。

2．「比較」を取り入れた学習指導

（1）数学教育における「比較」の意味

「比較」の意味について、先ず始めに、国語辞典や和英辞典から調べていくことにする。『角川必携国語辞典』によると、「比較」は、次のように説明されている。

「「比較」は、比べあわせること。広く使う。「対比」は、二つのものを比べてそのちがいを見ること。「色彩の対比を見る」。「対照」は、二つのものを比べて、ひと目で共通点と相違点が見えることにすること。「対照表」。「照合」は、原文や現物などと一字一字いちいち比べて、同じかどうか、間違いがないかどうか確かめること。」

以上より、「対比・対照・照合」は、「比較」の狭義として使われている。次に、『研究社和英大辞典』には以下のような記述がある。

「比較……(a) comparison ; a parallel
比較する……compare (the two , A with B) draw[make] a parallel[comparison] (between)」

「parallel」の para の語源は beside であり、allel の語源は one another である。「draw a parallel」には「平行線を描く」つまり「おたがいの側にあるようにする」あるいは、「並列に配置する」というような意味が込められている。

数学教育において、「並列に配置する」にはどのような意味があるのだろうか。板書などで異なる予想や解法などを並列に配置することが考えられる。あるいは、「比較」する上で有益な小問を２題以上並列に配置することも考えられる。つまり、「並列に配置する」とは、「比較」する上で有益な生徒の考えなどを二つ以上みつけ、生徒の眼前に板書などで提示する活動である。

次に、授業例から「比較」の意味を究明していく。単元名は、「数学C　第１章　行列　第２節　行列の計算」である。指導目標は、「ハミルトン・ケーリーの定理を学ぶ。」である。

問題　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2-5A+6E=O$ を満たすとき、$a+d=5$, $ad-bc=6$ である。正しいか。

（予想は２つに別れた。$a+d=2+2=4$ は正しい。$ad-bc=2\cdot2-0\cdot0=4$ などもあり正しくない。先になぜ正しいのかを質問した。）

S1「ハミルトン・ケーリーの定理より $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$ と $A^2-5A+6E=O$ の係数比較をして求めた。」

（次に、正しくない考え方についても質問した。）

S2「$a=d=1$、$b=d=0$ の次に $a=d=2$、$b=d=0$ で確かめたら $A^2-5A+6E=O$ が成り立った。」

（係数比較は早合点のようで正しい答えを求めることが課題になった。）

S3「ハミルトン・ケーリーの定理で、次数を下げることができる。」

（さらに課題をどう解決していけばよいか対話を続けたら、以下のように課題解決ができた。）

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$……①

$A^2-5A+6E=O$……②　①−②で

$(a+d-5)A+(ad-bc-6)E=O$……③

[1] $a+d-5=0$ のとき③から $ad-bc=6$

[2] $a+d-5\neq0$ のとき、

③から $A=kE$ とおき②に代入して $(k^2-5k+6)E=0$ よって $k^2-5k+6=0$ より $k=2,\ 3$　したがって $A=2E,\ 3E$

このとき、$(a+d,\ ad-bc)=(4,4),(6,9)$

[1][2]から $(a+d,\ ad-bc)=(5,6),(4,4),(6,9)$

（課題が解決して問題が正しくないと解決した。）

授業例より、S1たちの予想は、「ハミルトン・ケーリーの定理の等式と係数比較したら正しい。」

である。一方S2たちの予想は、「ａ＋ｄ＝５、ａｄ－ｂｃ＝６以外にも条件を満たす可能性があるから正しくない。」であり、「係数比較は早合点であり間違いのようだ。他にも条件を満たすものがありそうだ。ハミルトン・ケーリーの定理の式は次数下げに利用することが重要だ。この考えで条件を満たす他のものがあるのではないか。」である。この二者の考え方の違いが、主体的な学習意欲を引き出した。そして、S1たちは、S2たちの考え方との相違点や既習事項との共通点などを比較しながら、確かな理解と納得を獲得していった。

数学教育において、「比較」の意味をどのように捉えていくことが、学習指導上意義があるのだろうか。「対比・対照・照合」は、「比較」とは違う微妙な独自性も持ち合わせながら、「比較」の部分集合として捉えることができる。この意味で「対比・対照・照合」は、「比較」の狭義として捉えることができる。しかし、大切なことは比べるという活動を通して、生徒の主体的な学習意欲や確かな理解を生み出すことである。そのために必ずしも「比較」の意味自体を、厳密に分類することが重要でない場合もある。教師の側で学習指導上、分析や考察などで必要な場合のみ、「比較」の意味を「対比・対照・照合」のように分類して使用していく。そうでない場合は、「比較」を広い意味で使っていくことにする。そこで筆者は、数学教育における「比較」の意味を次のように定義していく。

比較とは、２つ以上の考え方などの共通点や相違点を比べることである。そこには、比較の狭義としての対比・対照・照合なども含まれる。

（２）「比較」を取り入れた学習指導の在り方

筆者は、「説明中心の授業」を長らく続けてきた経緯がある。一見効率のよい授業構成のようであり、教師主導で授業を進めることができ、教科書の進度を早めることができる。しかし、「説明中心の授業」には、生徒の主体的な学習意欲を喚起し、確かな理解と納得を生み出すうえで困難性をはらんでいる。(ジェームズ,2002)(ブルーアー,1997)

「問題解決」の授業では、いろいろな場面で「比較」を設定することができる。教師が「比較」を「問題解決」の授業に意図的に取り入れていくことは、授業に活気と躍動感をもたらすためにも重要である。そのような授業を構成する上で、「説明中心の授業」では無理な面がある。なぜならば、「説明中心の授業」に、生徒の主体的な「比較」という活動をもたらすことが難しいからである。

「問題解決の授業」とは問題を提示することから授業を始め、その問題の解決過程で新たな知識や技能、数学的な見方や考え方などを身に付けさせていく学習指導である。(相馬,1997)「比較」を取り入れた学習指導の在り方を明らかにするために、筆者の「問題解決」の授業例を以下に提示する。

単元名は、「数学Ⅲ　４章　微分法の応用　４節　関数の最大最小」である。指導目標は、「増減表・グラフ・平均値の定理を活用する。」である。

#01　T「問題を書きます。」**(問題提示の場)**

問題１　ｆ(ｘ)＝log ｘ／ｘは、ｘ＝２のとき最大値をとる。正しいか。

（ｘ＝２、３、ｅを代入して比べている生徒や、増減表などで考えようとする生徒もいた。）

#02　T「正しいですか。」
（正しいが少数。）**(予想の場)**

#03　T「正しい理由を答えてください。」

#04　S1「正しい感じがする。勘です。」
（数値を代入して予想した生徒などは、正しいと予想した生徒に疑念を抱いていた。正しいという予想と比べて、正しくないようだと予想を立てていた。）

#05　T「正しくない理由を答えてください。」

#06　S2「ｆ(２)＝log2/2＜1/2, ｆ(３)＝log3/3＞1/3となり、正しくないようです。」
（増減表で最大となる時を調べることになった。）**(課題１をつかむ場)**

x	0	…	e	…
f'(x)	／	＋	0	－
f(x)	／	増加	最大	減少

（ｘ＝ｅのとき最大となることが分かった。）**(課題１の解決)**
（正しくないことが分かり**問題２解決**）

問題２　2005^{2006}と2006^{2005}どちらが大きいか。

#07　S3「2005^{2006}より底2006が大きいから2006^{2005}が大きい。」**(予想の場)**

#08　S4「2006^{2005}より指数2006が大きいから2005^{2006}が大きい。」（予想の場）

#09　S5「$3^4=81$と$4^3=64$よりおそらく2005^{2006}が大きい。」（予想の場）

#10　S6「2005^{2006}が大きそうだ。問題1の関数が使えそうだ。」（課題2をつかむ場）

（さらに課題を解決するために、生徒と対話を続けながら以下のように課題解決ができた。）

#11　$f(x)=\log x/x$は$x>e$で、単調減少するので$f(2006)<f(2005)$

$\log 2006/2006<\log 2005/2005$

$\log 2006^{2005}<\log 2005^{2006}$

よって、$2006^{2005}<2005^{2006}$

（課題2が解決して、2006^{2005}より2005^{2006}の方が大きいことが分かり、問題2が解決した。）

（S7が、平均値の定理で調べられそうであると提案してきて、次のように問題を解決していた。）

#12　S7「$(x)=\log_{2005}X$は、$X>0$で微分可能で$f'(x)=1/x\log 2005$　$[1,\ \log_{2005}2006]$において平均値の定理により

$\{\log_{2005}(\log_{2005}2006)-\log 1\}/(\log_{2005}2006-1)=1/c\log 2005$,

$1<c<\log_{2005}2006$を満たすcが存在する

$1>1/C$,　$1/\log 2005>1/c\log 2005$

$\log_{2005}(\log_{2005}2006)/(\log_{2005}2006-1)>1/\log 2005$

$\log_{2005}2006-1>\log 2005\log_{2005}\times(\log_{2005}2006)$

$2006/2005>\log_{2005}2006^{\log 2005}$

$2006>2005\log_{2005}2006^{\log 2005}$

$2006>\log_{2005}2006^{2005\log 2005}$

$2005^{2006}>2006^{2005\log 2005}$

$>2006^{2005}$より$2005^{2006}>2006^{2005}$」

（2つの課題解決方法を比較検討した。）

以上の授業記録から、「問題解決」の授業のどの場面で「比較」が生じ、学習指導にどのように「比較」を取り入れるとよいのか考察していく。

#01は、問題提示の場である。以前の問題と本時の問題を比べながら、共通点や相違点などを考えている生徒もいた。もし、問題どうしの「比較」が生じていない場合、教師が「この問題と前時の問題で似ているところはないだろうか。」と発問すると、学習指導上有効な場合がある。

#02,#07,#08,#09は、予想する場である。異なる予想の「比較」は、学習への動機づけを高める。どれが正しいのか知りたいという知的好奇心を刺激する。これが、主体的な学習意欲となり、考え方の追求が始まる。予想できず分からない生徒にとっても他の生徒の予想などを聞いて、どれが正しいかという学習意欲が芽生えてくる。「予想」について相馬(1995)は次のように述べている。

「自分で予想することによって，その予想が正しいかどうかを明らかにしたいという気持ちになる．それが学習意欲につながるのである．また，異なる予想が出た場合は，学習意欲が一層高まる．」

異なる予想が出てこない場合でも、教師が「本当に、これが正しいのだろうか。」などと発問する。そのような発問で、生徒が自己の予想と他の可能な予想を「比較」するように促すことができる。

#06と#10は、課題をつかむ場である。予想から、その理由を追求することによって、生徒の中から課題が浮かび上がってきた。異なる課題を「比較」することによって、共通点や相違点が明確になってきた。課題が異なっているように見えても、両者の「比較」によって、二者を関連付けながら解決方法を導くことができた。また、異なる課題の「比較」によって、考え方の追求を一層促すこともできた。なお、課題が一つだけの場合でも、そこから多様な解決方法を考えるように指導する。そして、多様な考えを「比較」していくことが重要である。そのためにも、机間指導などで、つまずきも含めて多様な生徒の考えを把握することが大事である。

#06、#11、#12は、課題の解決とそれを受けて問題が解決される場である。課題1と課題2の解決方法の「比較」によって、両者を関連付けることができた。課題1と課題2の解決方法の「比較」によって、課題解決に対する確かな理解と納得を生み出した。課題2に対して、#12のように高校2年の既習事項である対数関数や数学Ⅲの微分法の知識を使って解決した生徒もいた。そして、課題2を#12のように解いた生徒は、板書上の課題2の解決と「比較」して、#11の方が優れてい

ることを感得した。また、関数 $f(x)=X^{1/x}$ で課題２を解決できるか質問したら次のように解いた。

＃13　対数微分法より　$\log f(x)=\log X^{1/x}$

$f'(x)=e^{1/x-2}(1-\log x)$

x	0	…	e	…
f'(x)	／	＋	0	－
f(x)	／	増加	$e^{1/e}$	減少

$x=e$ で極大、$x>e$ で $f(x)$ は単調減少

$2005<2006$ より $2005^{1/2005}>2006^{1/2006}$

ゆえに、$2005^{2006}>2006^{2005}$

このように解いた生徒は、＃11 の板書上の課題２の解決と「比較」して、この考えも優れていることを感得した。(田島,1981)

最後に、＃11、＃12、＃13 の３つの課題解決の方法を「比較」しながら考え方の道筋を振り返ってみた。このような「比較」により、確かな理解を獲得したように思われる。(志賀,1996)

以上より、「問題解決の授業」の５つの各場面（問題提示の場、予想の場、課題をつかむ場、課題を解決する場、問題を解決する場）において、「比較」を取り入れた学習指導を行うことができた。各場面における既知や未知（既習事項や未習事項、自己の考えや他者の考えなど）との「比較」によって、新たな既知（確かな理解）を獲得することができる学習指導であった。(市川,1998)

ここで考察してきたように、「比較」を取り入れた学習指導とは、一斉授業における生徒の多様な考えなどの共通点や相違点を比べながら、考え方の道筋などを全員でしっかりつかませる指導である。そして、２つ以上の考えなどを「比較」することによって、主体的な学習意欲を喚起し、確かな理解と納得をもたらす指導でもある。

３．「比較」の有効性と問題

（１）「比較」の有効性

学習指導に「比較」を取り入れると、どのような有効性があるのかを、授業実践と文献などから究明していく。最初に、数学Ⅱの三角関数における筆者の実践例を提示する。

問題　$0<\theta<2\pi$ のとき $(1+\sin\theta)(1+\cos\theta)$ の最小値は０、最大値は２である。正しいか。

次のように、異なる予想を「比較」していった。

S1「$\theta=\pi$ のとき $(1+0)(1-1)=0$ となり最小値は正しいようだ。」

S2「$\theta=\pi/2$ のとき $(1+0)(1+1)=2$ となり最大値も正しいようだ。」

S3「$\sin\theta=\cos\theta=1/\sqrt{2}=\sqrt{2}/2$ のとき最大になり最大値は２ではないようだ。」

異なる予想の「比較」は、「どちらが正しいのかを調べたい知りたい」という知的好奇心を刺激した。他者の予想と「比較」して「本当はどれか知りたい」という気持ちが高まった。知的好奇心が刺激されたのである。知的好奇心は内発的動機づけの重要な構成要素の一つである。(稲垣, 1980)

この後、最小値と最大値を求めることが生徒自身の課題となった。以上より、異なる予想の「比較」が生ずると、生徒は自ら学び考えようとする学習意欲を高める。また、どれが正しいのかを裏付けるために考え方の追求も始まる。

S4「１種類の式で表すと２次関数の最大最小の問題になるようだ。$y=(1+\sin\theta)(1+\cos\theta)=1+(\sin\theta+\cos\theta)+\sin\theta\cos\theta$　$\sin\theta+\cos\theta=x$ とおく。$y=1+x+\sin\theta\cos\theta$　ここで $\sin\theta\cos\theta=\{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1\}/2=(x^2-1)/2$ であるから、$y=1+x+(x^2-1)/2=(x+1)^2/2$」

T「x の範囲はどうなるのか。」

S6「$x=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+\pi/4)$ で、$\pi/4<\theta+\pi/4<9\pi/4$ だから $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$　よって $x=-1$ のとき最小値０だ。」

T「最大値の値はどうなる。」

S７「$x=\sqrt{2}$ のときで最大値 $(\sqrt{2}+1)^2/2=(3+2\sqrt{2})/2$ が正しい。」

古藤(1998,1995)は、多様な考えの生かし方まとめ方の指導を重視していて、理解の様相について次のように述べている。（下線と太字は筆者）

「大脳生理学の知見によれば，人間の大脳の左半球は主として論理を、右半球は直感を司っているそうである。（中略）問題解決における左右の方向に関する理解を，次の二つに分けて考察することにする。

左：別の考え，または他のアイデアとの<u>比較を通して獲得する理解</u>」

「比較」と理解に関って、相馬(1999)は、確かな理解を定着させるために指導内容以外に、それを「どのように指導するのか」ということの重要性を指摘し「比較」の重要性を次のように述べている。

「文字や式を用いることのよさや意義を含めた確かな理解のためには、「比較」する場面を意図的に指導に取り入れることが有効であろう.

(中略) これらの考え方も取り上げて比較することを通して，それぞれの考え方のよさや問題点が確認され，教科書に示されている証明の意味や必要性を実感させることができるであろう.」(下線と太字は筆者)

以上から、「比較」を取り入れることの有効性をまとめると、次の３点を特に強調できる。

① 自ら学ぼうとする学習意欲を引き出す。
② 考え方の追求を促す。
③ 確かな理解や納得を獲得させる。

(2)「比較」の有効性を引き出す問題

「問題解決」の授業で「比較」の有効性を引き出すためには、提示する問題の質が重要である。問題をどのように工夫すれば有効なのかを、筆者の実践例から紹介していく。単元名は、「数学B 第２章 数列 第５節 漸化式」である。指導目標は、「一般項を予想し、証明することを学ぶ。」である。以下は、授業で提示した正誤を問う問題である。

問題 $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n/(2a_n+1)$ のとき $a_n=1/(2n+1)$ は正しいか。

この問題をめぐって授業は次のように展開された。

S1「1/3, 1/5, 1/7…より、分母3, 5, 7…は2n+1となり正しい。」

S2「$a_1=1=1/1$, 1/3, 1/5…より $a_n=1/(2n-1)$ が正しい。」

(異なる予想を比較することによって興味と関心が一層高まった。)

T「$a_n=1/(2n-1)$ が本当に正しいのか。」

S3「証明の必要があるようです。」

($a_n=1/(2n-1)$ が正しいことを証明することが課題となってきた。そして、課題の解決に向けて目標と必要感を抱き、主体的な学習意欲も高まってきた。)

S4「$a_n=1/(2n-1)$…①を証明したい。

$a_{n+1}-a_n/(2a_n+1)=1/\{2(n+1)-1\}-\{1/(2n-1)\}/[2\{1/(2n-1)\}+1]=1/(2n+1)-1/\{2+(2n-1)\}=0$ より与えた条件を満たすから、①は一般項です。

S5「①を数学的帰納法でも証明できそうです。

[1] $n=1$ のとき $a_1=1/(2\cdot1-1)=1$

[2] $n=k$ のとき、 $a_k=1/(2k-1)$ と仮定すると、$a_{k+1}=a_k/(2a_k+1)=\{1/(2k-1)\}/[2\{1/(2k-1)\}+1]=1/(2k+1)=1/\{2(k+1)-1\}$ となり、①は $n=k+1$ のときも成り立つ。

[1][2]より①は、すべての自然数について成り立つ。

(課題が解決して、$a_n=1/(2n+1)$ は間違いであることが分かり、問題が解決した。)

この授業例で提示した問題は、一見正誤を問うだけの単純な形の問題であり、簡単に作成できそうである。しかし、この問題作成に関して「比較」の有効性を引き出すための意図が織り交ぜられている。そのための問題づくりの工夫に関しては、次の５つの視点が参考になる。(相馬，1997)

ア	教科書を逆から教える発想での問題
イ	すべての生徒が何らかの解決ができる問題
ウ	理由より答えを先に問う問題
エ	異なる予想が生じるような問題
オ	いろいろな考え方ができるような問題

相馬(1997)は、視点アについて教科書の練習問題を始めに与えることによって、生徒に目標と課題意識を持たせることができると述べている。筆者もこの視点で、教科書に載っている次の練習問題を多少変えて授業の始めに問題として提示した。

$a_1=1$, $a_{n+1}=a_n/(2a_n+1)$ のとき一般項を推測して数学的帰納法で証明せよ。

問題づくりの視点アで、いきなり問題を「$2a_1+1=1$、$a_{n+1}=a_n/(2a_n+1)$ のとき一般項は $a_n=1/(2n-1)$ であることを数学的帰納法で証明せよ。」と提示したらどうであろうか。生徒集団の実態にもよるだろうが、問題づくりの視点イということが生かされないであろう。それでは、教科書のような出題方法がベストであろうか。教科書は $a_1=1$, $a_2=1/3$, …… を求めてから一般項を推測させ、それを証明させようとして

いる。つまり、強制的に段階を追って問題を解くように配置されている。証明させるために無理やり推測させているとも捉えることもできる。しかし、推測して一般項が求められた段階で証明の必要性があまり感じられない。(室田, 1994)

それでは、どのように問題を作り直せば、生徒の関心と意欲を高める問題となるであろうか。そのためには、生徒の知的好奇心（スケンプ, 1973）を喚起する方法を考えることが大事である。その方法としては、身近で意外性を与える題材を選び、2から4つのもっともらしい選択肢を配置することが考えられる。つまり、その選択肢の中に誤概念を含ませて、知的な葛藤（伏見,1993）を引き出すように配置するのである。

そこでこの授業例では、「正しいか、間違いか」の2つの選択肢を与えるために、『$a_n=1/(2n+1)$は正しいか。』と、問題を作り直したのである。このことは、問題づくりの視点イとも合致する。しかも、理由より「正しいか、間違いか」のどちらかを答えることが先である。このことも、問題づくりの視点ウとも合致する。

この問題では、異なる予想が出やすく、異なる予想の「比較」を通して問題解決への学習意欲が喚起されていき、考え方の追求が始まった。そして、理解と納得へと結びついていったのである。また、次のような別解も生徒から涌き出た。別解との「比較」も理解の深化のために重要である。いろいろな別解が生み出され易い問題づくりを心がけることも大切である。

S6「分母が等差数列だから、逆数をとって漸化式を変形すれば一般項が求められそうだ。

$1/a_{n+1}=2+1/a_n$　$1/a_{n+1}-1/a_n=2$　$1/a_n=1/a_1+2(n-1)=1/1+2(n-1)=2n-1$　よって$a_n=1/(2n-1)$」

最後に、生徒から「比較」の有効性を引き出すことのできる問題づくりの留意点をまとめる。なお、筆者の授業実践から効果的であった問題例も1つずつ付加する。(①～⑤の視点は重複もする。)

①正誤を問う形にする。

例　$2-3/2+3/2-\cdots+(n+1)/n-(n+2)/(n+1)\cdots\cdots$ は収束し和が2である。正しいか。

②並列に配列する。

例　$y=2\sin(\theta/2-\pi/2)+1$ と $y=1/2\sin(2\theta+\pi/2)-1$ のグラフ上の違いは何か。

③二者択一型の単純な形にする。

例　$(1/2)^{30}$と$(1/3)^{21}$は、どちらが小さいか。

④条件不足の形にする。

例　12冊の異なる本を(　)冊, (　)冊, (　)冊の3組に分ける方法は何通りあるか。

⑤式,数値,順番などの表現を工夫する(芳沢,2008)

例　$\sqrt{3}<a_n(n=0)$, $a_n=1/2(a_{n-1}+3/a_{n-1})$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ のとき次は正しいか。

$n\to\infty$のとき　$a_n\to\sqrt{3}$，$a_n-\sqrt{3}<1/2(a_{n-1}-\sqrt{3})$，$a_n<a_{n-1}$，$\sqrt{3}<a_n$

4．おわりに

「比較」を取り入れた学習指導は、新学習指導要領の一般方針でもある自ら学び自ら考える「生きる力」の育成にも有効である。また、高校数学の新学習指導要領の課題は「数学的活動を通して、体系的な理解を深め、数学的に考察し表現する能力を高め、数学のよさを認識し、数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる.」であった。このことや「創造性の基礎を培う」ことも、「比較」を学習指導に取り入れることにより可能となることが授業実践や文献研究などから明らかになってきた。

数学的活動の楽しさに関って、手島(1987)は、「数理的事象の問題解決において問い続ける楽しさであり、納得する楽しさである。」と述べている。筆者は、授業で数学を学ぶ意義を、「多様な考えを比較検討しながら、皆で納得していくこと」と捉えたい。知的な揺らぎ、つまり、多様な考えの「比較」によって生ずる知的な葛藤(手島,1994,1995)を通して集団で納得していくことが、生きる楽しさや学ぶ喜びとなり学力向上につながると考える。

「比較」は、「問題解決」の授業に取り入れ易い学習指導でもある。「問題解決」の授業では、提示する問題の質が重要である。生徒から「比較」の有効性を引き出す問題の作成については、動機づけ(デシ,1980)(田代,1999)や知的な葛藤(藤井,2000)も考慮すべきである。今後、「比較」を取り入れた学習指導の実践を積み重ね、日常的な実践に役立つ研究を継続していきたい。

引用・参考文献

文部省(2009)，高等学校学習指導要領解説　数学編，1－17.

長尾栄光(2009)，「高等学校数学科　新学習指導要領で目指すもの」，『日本数学教育学会誌』，91(3)，10－17.

塚原久美子(2009)，「高等学校数学科の学習指導における課題と展望」，『日本数学教育学会誌』，91(7)，21－29.

吉田明史(2009)，「高等学校の数学教育に求められるもの」，『日本数学教育学会誌』91(7)，12－20.

横弥直浩(2009)，「高等学校における数学的活動を重視した授業の提案」，『日本数学教育学会誌』，91(3)，18－23.

永野重史(2000)，国立教育研究所紀要第129集.

中野俊幸(2000)，「高校数学は,変えられるか・どう変えるべきか」，『日本数学教育学会誌』，82(1)，46.

ポリア(1954)，いかにして問題をとくか，丸善株式会社.

相馬一彦(1997)，問題解決の授業，明治図書.

相馬一彦(2008)，「考える力と知識・技能を「バランスよく，同時に」－「活用させながら習得させる授業を」－」，『日本数学教育学会誌』，90(5)，23－28.

熊倉啓之(2008)，「新学習指導要領の特徴とそれを生かす指導」，『日本数学教育学会誌』，90(7)，18－26.

山口武志(2008)，「知識基盤社会において求められる学力と新教育課程」，『日本数学教育学会誌』，90(5)，29－36.

大谷実(1997)，「第３編４章授業における数学的実践の社会的構成－算数・数学科の授業を事例に－」，『質的研究法による授業研究』，北大路書房.

日野圭子(1997)，「一人の児童を通してみた数学的表記の内化の過程の分析－比例的推論との関わりにおいて－」，『日本数学教育学会誌』，79(2)，2－10

中西知眞紀(1999)，「よい授業」の創造と展開，明治図書.

ジェームズ(2002)，日本の算数数学教育に学べ，教育出版.

Ｊ・Ｔ・ブルーアー(1997)，授業が変わる，北大路書房.

相馬一彦(1995)，「予想」を取り入れた数学授業の改善，明治図書，30.

田島一郎(1981)，解析入門，岩波書店，2－17

志賀浩二(1990)，ルベーグ積分３０講，朝倉書店，20－21.

市川伸一(1998)，心理学から学習をみなおす，岩波書店.

市川伸一(1995)，心理学者　教科教育を語る，北大路書房，82－93

稲垣佳世子(1980)，「第Ⅱ部　自己学習における動機づけ　知的好奇心の役割」，『波多野誼余夫編.自己学習能力を育てる』，東京大学出版会，34－95.

稲垣佳世子(1973)，知的好奇心，中央公論社.

古藤怜(1998)，コミュニケーションで創る新しい算数学習，明治図書，20.

古藤怜(1995)，「問題解決における多様な考えとその指導」，『日本の算数・数学教育 1995　数学学習の理論化へむけて』，日本数学教育学会，産業図書，110－117.

相馬一彦(1999)，「第Ⅱ部 2 章代数」，『数学科教育』，学文社，98－99.

室田敏夫(1994)，「類推により学ぶ意欲を高める指数関数の指導」，『クレセール　第 15 巻　数学教育と評価』，ニチブン，42－49，90－98.

スケンプ(1973)，数学学習の心理学，新曜社.

伏見陽児・麻柄啓一(1993)，授業づくりの心理学，国土社.

芳沢光雄(2008)，出題者心理から見た入試数学，講談社.

手島勝朗(1987)，楽しい授業の提案，明治図書.

手島勝朗(1994)，「認知的葛藤の生成と解消―対角線の存在をめぐって―」，『第 27 回数学教育論文発表会論文集』

手島勝朗(1995)，オープンアプローチの新しい展開，明治図書.

手島勝朗(1992)，「問題設定の方略」，『上越教育大学数学教育研究第７号』，1－14.

Ｅ・Ｌ・デシ(1980)，内発的動機づけ，誠信書房.

田代高章(1999)，「動機づけ」，『授業研究重要用語 300 の基礎知識』，明治図書，247.

藤井斉亮(2000)，「理解と認知的コンフリクトについての一考察」，『日数教学会誌』，第 45 巻，24－25.

吉田明史(1997)，CreateMath 4　高校数学指導資料　数学Ｂ，うずうみ書房，16.

相馬一彦(2000)，「問題解決の授業」に生きる「問題」集，明治図書，13－30.

古藤怜(1995)，学校数学の改善　DoMath の指導と学習，東洋館出版社，35－40.

佐竹武文(2010)，生活に役立つ高校数学，日本文芸社.

長崎栄三(2004)，高校新数学科の在り方，明治図書.

日本数学教育学会編(2000)，和英/英和算数数学活用辞典，東洋館出版社.

日本数学教育学会編(2010)，数学教育学研究ハンドブック，東洋館出版社.