平成２３年１１月２６日（土）

北海道算数数学教育研究会
第７９回数学教育実践研究会
研究発表論文

北海道滝川高等学校
工　藤　寛　之

実践論文

第1部　実践論文

「比較」を取り入れた問題と学習指導の提案

北海道滝川高等学校　工藤　寛之

要　約

新学習指導要領は、一層主体的な学習の充実を求めている。そのためにも、授業に数学的活動を取り入れることを重視している。筆者は意識的・戦略的に「比較」を取り入れた問題解決的な授業が、学習における数学的活動を一層充実させることができると考えている。「比較」を取り入れた学習指導は、新学習指導要領の課題である「体系的理解」「表現能力」「数学のよさの認識」「数学的論拠に基づいて判断する態度」「創造性」を培う上でも有効である。**第1部**では、授業事例を提示して「比較」の有効性が示された問題と学習指導について提案していく。**第2部以降**では主に新学習指導要領と「比較」を取り入れた学習指導が有効に機能する問題作成の在り方について、実践事例や文献などから提案していく。ここで得られた知見や提案は、主体的な学習と受験学力の一層の向上と躍進にもつながる。また、数学を生活に役立て生涯学び続けていく楽しさも感得できると考えている。

キーワード：新学習指導要領　数学的活動　比較　問題解決　学力向上　受験学力　数学の楽しさ

1．はじめに

（1）新学習指導要領と「比較」

新学習指導要領に基づく高等学校の教育課程は、平成24年度の第1学年から数学理科が先行実施されていく。新学習指導要領における高等学校数学科の目標は以下の通りである。(文科省,2009)

「数学的活動を通して、数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め、事象を数学的に考察し表現する能力を高め、創造性の基礎を培うとともに、数学のよさを認識し、それらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる。」（下線が変更部分）

「体系的な理解」は、改めて体系的に組み立てていく数学の考え方を強調している。「考察し表現する能力」は、今回の改訂ですべての教科等を通して、思考力・判断力・表現力等を育てることが重視されたからである。ここで言う「数学のよさ」とは、数学的な見方や考え方のよさに加え、数学の概念や原理・法則や表現・処理とその用い方のよさである。さらに実用性などの数学の特徴及び数学的活動や思索することの楽しさなどである。「数学的論拠に基づいて判断する態度」の部分は新たに付け加えられた。これは、ある事象の数学的側面に着目し、考察・処理した結果から自分で合理的な判断を下す態度である。(長尾・塚原,2009)

「創造性の基礎」は、現行の目標から付け加えられたものである。創造性の基礎とは、知的好奇心や粘り強く考える力以外に、多面的な見方、直感力、洞察力、思考力、想像力、豊かな感性や自信なども含まれる。このような力を育てるためには、生徒に相応しい課題の設定や意見を生かすこと、特に生徒の誤りを集団全体のよりよい理解へと導くことが大切だと考えられる。(吉田,2009)そのためにも一斉授業に「比較」を取り入れることによって生徒同士が学び合い、深い理解と考えることの楽しさを味わうことができるように思われる。

「数学的活動」については、観察,操作,実験などの外的活動と、直観,類推,帰納,演繹などの内的活動が考えられる。このような活動を通して論理的思考力、想像力及び直観力などの創造性の基礎

を培うものと考えられる。(横弥,2009) 更に学習活動に「比較」を取り入れることによっても「創造性の基礎を培う」ことが実現できるように思われる。

ところで、目標の冒頭に「数学的活動を通して…」を位置づけ、その充実が一層強調されている。この要因を、吉田(2009)は次のように述べている。

「主体的に問題を解決することは重要である。必要な「数学的活動」は指導者が仕組む必要がある。さらに、生徒自身の内なる思考活動も大切ではあるが、その思考活動が他者や教室でどのように共有されているかが重要で、そのことにより生徒の思考活動が一層深まることにも留意したい。具体的な単元において他者との交流を通して学び合えるような「数学的活動」を展開するにはどのような「しかけ」が必要かを考えることが大切である。」(下線は筆者)

一斉授業で多様な考えを尊重し合いながら「比較」検討することも、お互いの思考活動が一層深まると思われる。このような共同的な学習形態について、永野(2000)は次のように述べている。

「現在, 企業におけるコンピュータの利用は, 会社の中で情報交換を行いながら共同的な作業や学習を支援するグループウェアの使用が盛んであるという。(中略) 他人に説明してみる, 考えたことを略図に表現してみる, 複数の人間のアイディアと並べて, **比較**, 評価するなどの活動を通して, グループの生産性も向上していくということが注目されるようになったのである。(中略) 将来創造的な活動をするためだったら, 共同的な学習機会を多くすることが必要だろう。」(下線と太字は筆者)

一層主体的な学習を促すために、数学的活動を取り入れた学習指導を実践していくことが新学習指導要領の課題でもある。筆者は、数学的活動を取り入れた学習指導を具現化するために、問題解決的な学習も必要であると考えている。問題解決的な学習を実践していくためには、相馬(1997)が提唱している「問題解決の授業」がある。「問題解決の授業」の基本的な授業構成は次の通りである。

『Ⅰ問題を理解する Ⅱ予想する Ⅲ課題をつかむ Ⅳ課題を解決する Ⅴ問題を解決する』

数学的活動を日々の授業で具体的に実現していくために、高校数学においても「問題解決の授業」は有効であるように思われる。筆者は、「問題解決の授業」を実践しながら、「比較」を取り入れた学習指導の有効性に着目してきた。「比較」は数学的活動の一種であると捉えることができる。数学教育において、「比較」の意味をどのように捉えていくことが、学習指導上意義があるのだろうか。大切なことは比べるという活動を通して、生徒の主体的な学習意欲や確かな理解を生み出すことである。そのために必ずしも「比較」の意味自体を、厳密に分類することが重要でない場合もある。そこで筆者は、数学教育における「比較」の意味を次のように定義していく。**『比較とは、2つ以上の考え方などの共通点や相違点を比べることである。』**このような「比較」を取り入れた学習指導は、「自ら学び考え、確かな理解と納得が得られる授業」などを達成することができる。また、新学習指導要領の一般方針でもある「自ら学び自ら考える力」などの「生きる力」の育成にも有効ではないだろうか。(相馬・熊倉・山口, 2008)

(2) 研究の目的と方法

新学習指導要領の課題を解決するために、高校数学の授業改善の必要性がある。その実現のためにも、本研究の目的を次の2点とする。

① 数学教育での「比較」を取り入れた問題と学習指導の在り方を明らかにする。

② 「比較」を取り入れた学習指導の有効性を引き出すための問題作成について明らかにする。

筆者は、教育現場において日々授業実践をしており、質的な資料（自由な観察・面接・会話、生徒のノートや授業記録ノートの記述など）を収集しやすい立場にいる。これらの資料を基にして、質的な分析と考察(大谷,1997)を加えることにより、文献研究や授業実践などから「比較」を取り入れた学習指導とそのための問題作成について提案していきたい。また、「比較」を取り入れることの有効性や生徒から「比較」の有効性を引き出すための問題作成の工夫についても、授業実践などから明らかにしていく。また、次で2つの事例について比較検討していく。

2．「比較」を取り入れた問題と学習指導

（1）説明中心的な学習指導事例

ここでは、説明中心的な事例について質的な考察をしていく。単元名は「数学Ⅲ微分法の応用」である。指導目標は「微分法の活用を学ぶ」である。

問題　$-10^{-4} \leqq X < 0$ のとき各式を証明せよ。
（1）$(1+X)^{101} < 1+100X < (1+X)^{100}$
（2）$0.9999^{101} < 0.99 < 0.9999^{100}$

T「$(1+X)^{101} < 1+100X < (1+X)^{100}$……①が成り立つことを証明したい。どうするか。」

S1「この区間で、$1+X>0$，$1+100X>0$ である。①の log をとってから証明を考える。」

S2「$\log(1+X)^{101} < \log(1+100X) < \log(1+X)^{100}$

$101 \cdot \log(1+X) < \log(1+100X) < 100 \cdot \log(1+X)$ ……②　を証明する。」

T「$f(X)=100 \cdot \log(1+X)-\log(1+100X)$

$g(X)=\log(1+100X)-101 \cdot \log(1+X)$ として

$f(X)>0$，$g(X)>0$ を示す。」

S3「$f'(X)=100/(1+X)-100/(1+100X)$

$=100 \cdot 99X/(1+X)(1+100X)<0$」

T「$f(X)$ は減少関数で $f(0)=0$ だから

$-10^{-4} \leqq X < 0$ で $f(X)>0$ である。」

X	-10^{-4}	……	0
$f'(X)$		－	
$f(X)$		減少	0

S4「$g'(X)=100/(1+100X)-101/(1+X)$

$=(-1-10000X)/(1+X)(1+100X)$」

T「$-10^{-4} \leqq X < 0$ では、$-1-10000X<0$ だから、$g'(X)<0$ となる。」

S5「$-10^{-4} \leqq X < 0$ で $g(X)$ は減少関数であり、$g(0)=0$ だから $g(X)>0$ である。」

X	-10^{-4}	……	0
$g'(X)$		－	
$g(X)$		減少	0

T「以上より②が成り立つので①も成り立つ。」

T「次に（2）を証明する。」

S6「（1）の不等式を活用できそうだ。」

T「Xに何を代入すると題意の不等式を得るか。」

S7「①の不等式に $X=-10^{-4}$ を代入すればよい。」

S8「$(1-10^{-4})^{101} < 1+100(-10^{-4}) < (1-10^{-4})^{100}$

より $0.9999^{101} < 0.99 < 0.9999^{100}$ を得る。」

（2）「比較」が活きた問題と学習指導事例

単元名は「数学Ⅲ４章微分法の応用」である。指導目標は「比較の有効性を活かした数学的活動を通して微分法の活用を学ぶ。」である。

T「問題を書きます。」（問題提示の場）

問題　$-1<X<1, X \neq 0$ を満たす。
（1）0.99，0.9999^{100}，0.9999^{101}
（2）$(1-X)^{1-1/X}$，$(1+X)^{1/X}$
A君「(1)では 0.9999^{100} が一番大きい。」
Bさん「(1)では 0.99 が一番大きい。」
C君「(1)では 0.99 が一番小さい。」
Dさん「(2)では $(1+X)^{1/X}$ の方が大きい。」
この中で正しい主張はあるのだろうか。

S1「$0.9999^{101} < 0.9999^{100}$ だからA君が正しいようですね。」

S2「0.99 が一番小さいようですね。C君が正しいのかな。」

S3「$0.9999^{101} < 0.99$ のようにも観えます。」

S4「$0.9999^{101} < 0.99 < 0.9999^{100}$ が正解かな。」

S5「$(1-X)^{1-1/X} < (1+X)^{1/X}$ が正解かな。」

（異なる予想の比較）

T「$0.9999^{101} < 0.99 < 0.9999^{100}$ や $(1-X)^{1-1/X} < (1+X)^{1/X}$ が本当に正しいのだろうか。」

S6「$0.9999^{101} < 0.99 < 0.9999^{100}$ が本当に正しいかは難しいですね。」

S7「$(1-X)^{1-1/X} < (1+X)^{1/X}$ が正しいことが分かれば、$0.9999^{101} < 0.99 < 0.9999^{100}$ も正しいことが分かりそうです。」

（課題をつかむ。）

T「先ず(2)について $(1-X)^{1-1/X} < (1+X)^{1/X}$ …①が成り立つかどうかを調べてみよう。」

S8「①の両辺に log をとる。

$(1-1/x)\log(1-x) < 1/x \cdot \log(1+x)$ ……②

とおいて証明を試みてみます。」

S9「②を次の２つの場合に分けて証明を考えます。

$0<X<1$ では、$(X-1)\log(1-X) < \log(1+X)$

$-1<X<0$ では $(X-1)\log(1-X) > \log(1+X)$」

T「$0<X<1$ のとき

$f(X)=\log(1+X)-(X-1)\log(1-X)>0$ …③

とおいて証明を考えてみよう。

$-1<X<0$ のとき

$f(X)=\log(1+X)-(X-1)\log(1-X)<0$ …④

とおいて証明を考えてみよう。」

S10「$f(X)$を微分して調べます。$f^{(1)}(X)=$
$1/(1+X)-\log(1-X)-(X-1)(-1)/(1-X)$
$=1/(1+X)-\log(1-X)-1$」

S11「第2次導関数を求めて増減表を書きます。

$f^{(2)}(X)=-1/(1+X)^2+1/(1-X)=$
$(1+X)^2/(1+X)^2(1-X)-(1-X)/(1+X)^2(1-X)$
$=X(X+3)/(1+X)^2(1-X)$」

S12「$-1<X<1$では、$X+3>0$，$1-X>0$，
$f^{(1)}(0)=0$だから$f^{(1)}(X)$の増減表は次の通りになります。」

X	-1	…	0	…	1
$f^{(1)}(X)$		$-$	0	$+$	
$f^{(2)}(X)$		減少	0	増加	

S13「よって、$-1<X<1$で$f^{(1)}(X)>0$です。
以上より、$f(X)$は増加関数です。」

S14「$f(0)=0$とから$0<X<1$で$f(X)>0$，
$-1<X<0$で$f(X)<0$であるから③④が証明されました。」

S15「③④の証明から①も証明されました。」
（課題①が解決した。）

T 「以上より①が成り立つことが分かった。次に
$0.9999^{101}<0.99<0.9999^{100}$…⑤を調べよう。」

S16「①の式で$X=-10^{-2}$とおくと
$(1.01)^{101}<0.99^{-100}$
両辺に0.99^{101}をかけると
$(1.01)^{101}0.99^{101}<0.99$
$(1.01\times0.99)^{101}<0.99$　$1.01\times0.99=0.9999$
だから$0.9999^{101}<0.99$……⑥」

S17「①の式で$X=10^{-2}$とおくと
$(0.99)^{-99}<1.01^{100}$
両辺に0.99^{100}をかけると
$0.99<(1.01)^{100}0.99^{100}$
$0.99<(1.01\times0.99)^{100}$
$0.99<0.9999^{100}$……⑦」

S18「⑥⑦より$0.9999^{101}<0.99<0.9999^{100}$
……⑤が正しいことが分かりました。」
（課題⑤が解決した。）

T 「以上から分かったことは何か。」

S19「AとDが正しいことが分かりました。」
（問題が解決した。）

T 「振り返ってみて大切なことは何か。」

S20「具体的な数字の大小関係を調べることは困難でした。しかし、関数として一般化したものを微分法の活用によって調べることは具体的な数字の大小関係は調べる上で有効であることが分かりました。今後意図的に微分で関数活用も考えていきます。」

以上の学習指導事例（1）と（2）を比べると、学習指導事例（2）の方が生徒の主体的な学習が一層強く生じていて、数学的活動も活発であった。新学習指導要領の課題である「体系的理解」「表現能力」「数学のよさの認識」「数学的論拠に基づいて判断する態度」「創造性」などが培われる学習活動が生じていた。更に（2）について質的考察する。

異なる予想の「比較」は、学習への動機づけを高める。どれが正しいのか知りたいという知的好奇心を刺激する。これが主体的な学習意欲となり、考え方の追求が始まる。予想できず分からない生徒にとっても他の生徒の予想などを聞いて、どれが正しいかという学習意欲が芽生えてくる。「予想」について相馬(1995)は次のように述べている。

「自分で予想することによって，その予想が正しいかどうかを明らかにしたいという気持ちになる．それが学習意欲につながるのである．また，異なる予想が出た場合は，学習意欲が一層高まる.」

異なる予想が出てこない場合でも、教師が「本当に、これが正しいのだろうか。」などと発問する。そのような発問で、生徒が自己の予想と他の可能な予想を「比較」するように促すことができる。予想から、その理由を追求することによって、生徒の中から課題が浮かび上がってきた。異なる課題を「比較」することによって、共通点や相違点が明確になる。課題が異なっているように見えても、両者の「比較」によって、二者を関連付けながら解決方法を導くことができる。また、異なる課題の「比較」によって、考え方の追求を一層促すこともできる。なお、課題が一つだけの場合でも、そこから多様な解決方法を考えるように指導する。そして、多様な考えを「比較」していくことが重要である。そのためにも、机間指導などで、つまずきも含めて多様な生徒の考えを把握することが大事である。

最後に、2つの課題解決の方法を「比較」しな

がら考え方の道筋を振り返ってみる。このような「比較」により、確かな理解を獲得できる。以上より、「問題解決の授業」の5つの各場面（問題提示の場、予想の場、課題をつかむ場、課題を解決する場、問題を解決する場）において、「比較」を取り入れた学習指導を行うことできる。各場面における既知や未知（既習事項や未習事項、自己の考えや他者の考えなど）との「比較」によって、新たな既知（確かな理解）を獲得することができる学習指導である。(市川,1998)

ここで考察してきたように、「比較」を取り入れた学習指導とは、一斉授業における生徒の多様な考えなどの共通点や相違点を比べながら、考え方の道筋などを全員でしっかりつかませる指導である。そして、2つ以上の考えなどを「比較」することによって、主体的な学習意欲を喚起し、確かな理解と納得をもたらす指導でもある。そのような指導を構築していくためにも提示する問題の質が重要である。**第2部以降では問題作成の在り方や問題事例をついて提案**していく。

3．おわりに

「比較」を取り入れた学習指導は、新学習指導要領の一般方針でもある自ら学び自ら考える「生きる力」の育成にも有効である。また、高校数学の新学習指導要領の課題は「数学的活動を通して、体系的な理解を深め、数学的に考察し表現する能力を高め、数学のよさを認識し、数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる.」であった。このことや「創造性の基礎を培う」ことも、「比較」を学習指導に取り入れることにより可能となることが授業実践や文献研究などから明らかになってきた。

数学的活動の楽しさに関って、手島(1987)は、「数理的事象の問題解決において問い続ける楽しさであり、納得する楽しさである。」と述べている。筆者は、授業で数学を学ぶ意義を、「多様な考えを比較検討しながら、皆で納得していくこと」と捉えたい。知的な揺らぎ、つまり、多様な考えの「比較」によって生ずる知的な葛藤(手島,1994)を通して集団で納得していくことが、生きる楽しさや学ぶ喜びとなり学力向上につながると考える。

「比較」は、「問題解決」の授業に取り入れ易い学習指導でもある。「問題解決」の授業では、提示する問題の質が重要である。生徒から「比較」の有効性を引き出す問題の作成については、動機づけ(デシ,1980)や知的な葛藤(手島,1994)も考慮すべきである。今後、「比較」を取り入れた学習指導の実践を積み重ね、日常的な実践に役立つ研究を継続していきたい。

引用・参考文献

文部科学省(2009)，高等学校学習指導要領解説数学編，1－17.

長尾栄光(2009),「高等学校数学科　新学習指導要領で目指すもの」,『日本数学教育学会誌』,91(3),10－17.

塚原久美子(2009)，「高等学校数学科の学習指導における課題と展望」，『日本数学教育学会誌』，91(7)，21－29.

吉田明史(2009)，「高等学校の数学教育に求められるもの」，『日本数学教育学会誌』91(7)，12－20.

横弥直浩(2009)，「高等学校における数学的活動を重視した授業の提案」，『日本数学教育学会誌』, 91(3), 18－23.

永野重史(2000)，国立教育研究所紀要第129集.

相馬一彦(1997)，問題解決の授業，明治図書.

相馬一彦(2008)，「考える力と知識・技能を「バランスよく，同時に」－「活用させながら習得させる授業を」－」，『日本数学教育学会誌』，90(5)，23－28.

熊倉啓之(2008)，「新学習指導要領の特徴とそれを生かす指導」，『日本数学教育学会誌』，90(7)，18－26.

山口武志(2008)，「知識基盤社会において求められる学力と新教育課程」，『日本数学教育学会誌』, 90(5), 29－36.

大谷(1997),『質的研究法による授業研究』,北大路書房.

相馬一彦(1995)，「予想」を取り入れた数学授業の改善，明治図書，30.

市川伸一(1998)，心理学から学習をみなおす，岩波書店.

手島勝郎（1987)，楽しい授業の提案，明治図書.

手島勝朗(1994)，「認知的葛藤の生成と解消―対角線の存在をめぐって―」，『第27回数学教育論文発表会論文集』

E・L・デシ(1980)，内発的動機づけ，誠信書房.

稲垣佳世子(1973)，知的好奇心，中央公論社.

日本数学教育学会編(2010)，数学教育学研究ハンドブック，東洋館出版社

第2部　実践論文

「比較」の有効性を引き出す問題作成の在り方

北海道滝川高等学校　工藤　寛之

要　約

意識的・戦略的に「比較」を取り入れた学習指導は、主体的な学習意欲と確かな理解や納得を得る上で有効である。「比較」も「数学的活動」の一種であると考えている。新学習指導要領では数学的活動を通して一層主体的な学習活動を求めている。また、「比較」は、新学習指導要領の課題である「体系的理解」「表現能力」「数学のよさの認識」「数学的論拠に基づいて判断する態度」「創造性」を培う上でも有効である。このような「比較」の有効性を生徒から引き出す問題づくりの工夫についても、授業実践や文献研究などより明らかになってきた。本稿では、「比較」の有効性が授業で引き出され、上記の新学習指導要領の課題を達成できる問題作成について具体的に提案していく。また、実践事例から「比較」の有効性が引き出された問題について質的な考察も加えていく。そして、「比較」を取り入れた学習指導に生きる問題も提案していく。このような問題を使用した学習指導が主体的な学習や学力向上につながる。さらに、受験学力の向上躍進にも生きると考えている。

キーワード：比較　問題作成　課題　指導目標　数学的活動　表現能力　学力向上　受験学力

1．「比較」を引き出す問題作成方法

（1）問題作成の手順

「比較」の有効性が引き出されて数学的活動が活性化されていく問題解決的な授業を構築していくためには、提示する問題の質が重要である。問題の質によって授業展開が変化する。そのために「比較」が有効に引き出されていく問題を作成する方法について提案していく。授業を構築していく重要な要の一つに指導目標がある。この指導目標達成につながる課題を引き出すために「課題」を問題として設定し直すことが大切である。つまり、授業そのものは「問題から課題へ」という流れであるが、問題作成では逆に「課題から問題へ」という手順をふむのである。

「問題作成」の一つの手順として次の流れで作成していく方法が考えられる。（相馬，2000）

指導目標を決める　→　「課題」を決める　→　「問題」をつくる

問題作成の前には、指導目標と課題を検討しなければならない。先ず初めに授業の指導目標の確認検討である。そして、その指導目標を達成するためにはどのような課題が解決されなければならないかを問わなければならない。さらに、その課題が引き出されるような問題であるかどうかも検討していかなければならない。

（2）具体的な手順

ここでは問題作成について具体的に考えていく。順列の学習を一応終えて次に組合せを学ぶ頃に、順列と組合せの区別がつかない生徒をしばしば見受けることがある。また、問題文の意味を捉えきれずに誤解して場合の数を求めてしまう生徒がいる。ここでの指導目標を「比較を通して順列と組合せの考えを適切に使えるように学級全体の数学的活動を活性化させる。」と設定して、授業で使用する問題を作成していく。そのためにも、比較することによって問題文の意味を正確に理解する活動が必要である。また、お互いの考えを比べながら順列と組合せの相違

点を明確に意識することによって場合の数を求めていく数学的活動が必要である。この活動が「課題」になるように検討する。

次にこの「課題」が引き出されていくように問題を作成していく必要がある。例えば問題が「1から9までの数字から異なる5個を取って1列に並べる。この時、奇数は必ず奇数番目にある場合の数を求めよ。」のときはどうであろうか。これだとあまり問題文の意味を誤解せずに、順列と組合せの考えを使って解いていくであろう。もう少し問題文の意味を誤解しやすく、順列と組み合わせの考えが混同するような問題の方がよい。つまずきが起きやすい問題の方が理解を深めるうえでも大切である。つまり、「比較」という数学的活動を通して、つもずきも生かし深い理解と納得をもたらす授業展開になる問題を提示した方がよいと考えている。問題が難解すぎると生徒の学習意欲をそぐことにもなるので配慮が必要である。そのためにも対比できやすいように問題を次のように作り直した。「1から9までの数字から異なる5個をとって作った順列のうちで、つぎの条件をみたすものの個数について考える。(1)奇数番目に必ず奇数がある。(2) 奇数は必ず奇数番目にある。(1)と(2)は同じ答えになるか。」この問題の実践事例については、2.の(1)で考察していく。

(3)「比較」の有効性が引き出された問題

比べることの有効性とは何か。その有効性の一つに多様な考えの比較がある。他者と自己の考え方の相違点を比べることによって数学的な納得と理解を生み出す。このような活動が新学習指導要領で強調している数学的活動の一つであると捉えている。2．以降で「比較」の有効性が引き出された問題の具体例について触れていく。このような問題事例を次の①から⑤の5つに分けた。①予想における「比較」の有効性の問題　②「比較」による課題をつかむ問題　③課題解決における「比較」の有効性の問題　④「比較」による誤概念を生かした問題　⑤並列配置における「比較」を生かした問題　これらの問題事例を具体的に考察しながら、「比較」の有効性が引き出されていく問題作成について、有益な知見を導き出していく。

2．予想における「比較」の有効性の問題

(1) 問題事例1

ここでは、予想における「比較」の有効性に着目した問題事例について考察していく。単元は「数学A場合の数」で、指導目標は「対比を通して順列と組合せの考えを学ぶ。」である。

問題　1から9までの数字から異なる5個をとって作った順列のうちで、つぎの条件をみたすものの個数について考える。 (1) 奇数番目に必ず奇数がある。 (2) 奇数は必ず奇数番目にある。 (1) と (2) は同じ答えになるか。

(問題を提示する。)
S1「問題文が似ているので同じ答えのようです。」
S2「同じ答えにならないようです。」
(異なる予想を比較する。)
T 「表現が似ているようだが、答えは同じか。」
S3「まず (1) の場合の数を求めていきます。」
(課題1をつかむ。)
T 「どのように考えて数えるとよいのか。」
S4「先ず奇数は1, 3, 5, 7, 9の5つあり、奇数番目は3箇所あるので$_5P_4$=60通り考えられます。次に残りの偶数2, 4, 6, 8から残りの2箇所に並べることを考えると$_4P_2$=12通りあります。以上より60×20=720個。」
T 「この考えに疑問をもっている人はいるか。」
S5「偶数番目は必ずしも偶数でなくてもよいので$_4P_2$=12通りは間違いだと思います。」
T 「どのように考えていけばよいのか。」
S6「まず、奇数番目 (1, 3, 5番目) にどの奇数 (1, 3, 5, 7, 9) を並べるかについては、5×4×3=60通りです。そのそれぞれについて、偶数番目の並べ方は、奇数番目に並べた3個以外のどれを並べようと自由であるから6×5=30通りです。したがって、答えは60×30=1800個です。」(課題1が解決した。)
T 「別の考え方をした人はいるか。」
S7「奇数番目は3箇所あるので、1から9までの奇数を3個以上選べばよいと思います。まず奇数3個を選ぶときを考えます。$_5C_3$×$_4C_2$×3!×2!=720個です。次に奇数4個を選ぶときを

考えます。${}_5C_4 \times {}_4C_1 \times {}_4P_3 \times 2! = 960$個です。最後に奇数5個を選ぶときを考えます。${}_5C_5 \times 5! = 120$個です。以上より$720 + 960 + 120 = 1800$個」（課題1が解決した。）

T 「（1）の答えが求められた。次はどうする。」

S8「（1）と比べながら考えていくと、（2）の場合の数が求められると思います。」

（課題2をつかむ。）

S9「奇数は5個あるので奇数番目に並べる方法は${}_5P_4$通り。そのおのおの対して、偶数は偶数番目に並べるので${}_4P_2$通り。よって、${}_5P_4 \times {}_4P_2 = 60 \times 12 = 720$個です。」

T 「この考えに疑問をもっている人はいるか。」

S10「（1）と比べながら考えると、奇数番目は3箇所あるので奇数を3個以下選んで並べればよいと思います。奇数を3個、2個、1個選ぶときの3つの場合に分けて考えたらよいと思います。」

T 「同じような考えの人はいるのか。」

S11「偶数は4個であるから、奇数は少なくとも1個は使うことになります。また、奇数は多くても3個しか使えません。奇数を1，2，3個使う場合について、条件をみたす順列を考えます。」

S12「奇数を 1 個使う場合は、${}_5C_1 \cdot 3 \times 4! = 15 \times 4! = 360$通り。 奇数を2個使う場合は、${}_5C_2 \cdot {}_3P_2 \times {}_4P_3 = 10 \times 6 \times 24 = 1440$通り。奇数を3個使う場合は${}_5C_3 \cdot {}_3P_3 \times {}_4P_2 = 10 \times 6 \times 12 = 720$通り。 よって、答えは$360 + 1440 + 720 = 2520$個。」

（課題2が解決した。）

T 「別の考え方はないだろうか。」

S13「「奇数は必ず奇数番目にある。」は「Xが奇数ならばXは奇数番目にある。」と言い換えることができます。この対偶を考えると「Xが偶数番目にあるならばXは偶数である。」となり、言い換えると「偶数番目には必ず偶数がある」となります。」

S14「（1）と同様に考えられます。偶数番目の2つについては$4 \times 3 = 12$ 通りです。残り 3 つについては $7 \times 6 \times 5 = 210$ 通りですから、答えは $12 \times 210 = 2520$ 通りです。」（課題2が解決）

T 「考え方を振り返って分かったことは何か。」

S15「対偶を取ると（1）と同じ考えで解けることが分かりました。また、（1）と（2）を比較することによって問題の意味の違いも分かりました。」

S16「比較することによって問題文の意味や答えの違いが分かりました。また、考え方の相違点もよく分かりました。」（問題が解決した。）

上記の事例を考察する。問題は(1)と(2)を対比させることによって、問題文の意味を適切に理解できるように配慮して作成した。また、多様な考えの比較におけるつまずきも生かすことによって順列と組合せについての納得と理解を深めさせた。

（2）問題事例2

ここでも、予想における「比較」の有効性に着目した問題事例について考察していく。単元は「数学A命題と証明」で、指導目標は「対比よる数学的活動を通して、論証力を学級全体で高める。」

問題 x，yについての条件Pを次のように定める。P：$y > -x^2 + (a-2)x + a - 4$ かつ$y < x^2 - (a-4)x + 3$ Aの質問「任意の実数xに対しても、それぞれ適当な実数yをとればPが成り立つための実数aの範囲を求めよ。」 Bの質問「適当な実数yをとれば、任意の実数xに対してもPが成り立つための実数aの範囲を求めよ。」 AとBの質問の答えは同じか。

（問題を提示する。）

S1「問題文が似ているので同じ答えのようです。」

S2「同じ答えにならないと思います。」

（異なる予想を比較する。）

T 「本当に質問の意味は同じだろうか。」

S3「まずAとBの質問の相違点を考えます。」

（課題1をつかむ。）

S4「$f(x) = -x^2 + (a-2)x + a - 4$，$g(x) = x^2 - (a-4)x + 3$ とおくと、(1)も(2)も「任意の実数xについても、$f(x) < y < g(x)$を満たすyが存在する。」と表現できます。しかし、（1）と（2）ではyの性格が違っているようです。（1）では、xに応じてyを変化させてよいです。つまり、適当は変化させてよいということだと思います。」

T 「言い換えるとどういう意味になるのか。」

S5「(1)ではxの値を任意に定めると、そのxの値に対してyの値をうまく捜し出せば、Pが成り立つようにできるということです。」

T 「(2)の質問はどのような意味だろうか。」

S6「(2)ではxによらないでyは一定値です。つまり、適当は固定的なものを表します。(1)は常に$f(x)<g(x)$です。(2)は常に「$f(x)<y_1$かつ$y_1<g(x)$」を満たすy_1が存在します。」

T 「言い換えるとどういう意味になるのか。」

S7「言い換えると(2)は「常に$f(x)<y_1$」かつ「常に$y_1<g(x)$」を満たすy_1が存在します。あるいは、うまくyの値を捜し出してくると、そのyの値に対してはいかなるxの値に対してもPが成り立つようにできるということです。」

(課題1が解決した。)

T 「AとBの質問の意味の違いが分かったようだ。次にどう考えればよいのだろうか。」

S8「AとBの質問の答えをそれぞれ求めます。」

(課題2をつかむ。)

T 「先ずAの質問の答えはどうなるだろうか。」

S9「$f(x)<g(x)$と、$2x^2-2(a-3)x+7-a>0$は同値です。これが常に成り立つことが条件で、それは$D/4=(a-3)^2-2(7-a)=a^2-4a-5=(a+1)(a-5)<0$です。 よって、答えは$-1<a<5$です。」

T 「次にBの質問の答えはどうなるだろうか。」

S10「($f(x)$の最大値) < ($g(x)$の最小値) が成り立つことが必要十分です。$f(x)=-(x-a/2+1)^2+a^2/4-3$, $g(x)=(x-a/2+2)^2-a^2/4+2a-1$ですから $a^2/4-3<-a^2/4+2a-1$これを解いて$2-2\sqrt{2}<a<2+2\sqrt{2}$ です。」(課題2が解決した。)

T 「比較しながら分かったことは何か。」

S11「比較することによって、AとBの質問の意味の違いが分かりました。また、答えも違うことが分かりました。」(問題が解決した。)

上記の事例を考察する。この問題も質問AとBを対比させることによって、問題文の意味を適切に理解できるように配慮して作成した。また、多様な考えの比較におけるつまずきも生かすことによって数学用語についての納得と理解を深めさせた。問題文の中に2つの相反する小問を並列に配置することは、有効な「比較」を生み出す。また、数学的活動を活性化させる有効な手段ともなる。並列配置は2者の相違点を明確に浮き上がらせる。

3.「比較」による課題をつかむ問題

(1) 問題事例1

ここでは「比較」よって課題が把握させていく問題事例について考察していく。単元は「数学Ⅲ 微分法の活用」で、指導目標は「比較による数学的活動を通して微分法の有効性について学ぶ。」

問題 $(1.01)^{-101}$, $(0.99)^{99}$, $(1.01)^{-110}$ どれが一番大きいか。

(問題を提示する。)

S1「$(1.01)^{-101}$ が一番大きい。」

S2「$(0.99)^{99}$ が一番大きい。」

S3「$(1.01)^{-110}$ が一番大きい。」

(予想する。)

T 「本当に一番大きいのはどれだろうか。」

S4「$(1.01)^{-101}=(100/101)^{101}$と$(1.01)^{-110}=(100/101)^{110}$より$(1.01)^{-110}<(1.01)^{-101}$です。よって$(1.01)^{-101}$と$(0.99)^{99}$の大小関係を調べれば分かりそうです。」(課題をつかむ。)

T 「どのように調べていけばよいのか。」

S5「$(0.99)^{99}\times(1.01)^{-101}=(0.99)^{99}/(1.01)^{101}$より$(0.99)^{99}\times(1.01)^{101}$が1より大きいか小さいかを調べれば、$(0.99)^{99}$と$(1.01)^{-101}$の大小関係が分かりそうです。」

T 「次にどのように調べるのか。」

S6「関数を考えます。$(0.99)^{99}\times(1.01)^{101}=(1-0.01)^{99}\times(1+0.01)^{101}$より関数$f(X)=(1-X)^{99}(1+X)^{101}$の増減を調べてみます。、$f'(X)=-99(1-X)^{98}(1+X)^{101}+101(1-X)^{99}(1+X)^{100}=(1-X)^{98}(1+X)^{100}\{-99(1+X)+101(1-X)\}=(1-X)^{98}(1+X)^{100}\cdot 200(0.01-X)$ よって、$0<X<0.01$のときは、$f'(X)>0$であるから関数$f(X)$は単調増加関数です。$f(0.01)>f(0)=1$ したがって、$(0.99)^{99}\times(1.01)^{101}>1$より$(0.99)^{99}>(1.01)^{-101}$です。」(課題が解決した。)

S7「$(0.99)^{99}$ が一番大きいことが分かりました。」(問題が解決した。)

T 「考え方を振り返ってみよう。」

S8「$f(X)=(1-X)^{99}(1+X)^{101}$の増減を調べると$(0.99)^{99}$と$(1.01)^{-101}$の大小関係が分かることは理解しました。しかし、$f(X)=(1-X)^{99}(1$

$+X)^{101}$を思いつくことは難しいです。」

S9「$(0.99)^{99}\times(1.01)^{101}=(1-0.01)^{99}\times(1+0.01)^{101}$と変形することは気づきそうです。このことに気づけば関数$f(X)=(1-X)^{99}(1+X)^{101}$を思いつくことができそうです。」

S10「不等式に微分法を活用する有効性が分かりました。今後意識して有効に使いたいです。」

ここでの問題を「$(1.01)^{-101}$と$(0.99)^{99}$のどちらが大きいか。」と提示したらどうなるであろうか。この問題だと$(1.01)^{-101}$と$(0.99)^{99}$の大小比較を生徒自信の課題としてつかむことがなく他者から与えられた課題となる。ここでは生徒自信が「知りたい。学びたい。」という学習決定感を重視したい。自らつかみ取った課題は自ら学び取りたいという学習意欲を生み出す。この真の学習意欲が深い理解と納得を生み出し、学力向上へと結びついていく。そのためにも$(1.01)^{-110}$を添えることによって問題の中から生徒自信が課題をつかむように問題を作成した。課題から問題を作成する手順を重視していきたい。

（2）問題事例2

ここでも「比較」によって課題が把握させていく問題事例について考察していく。単元は「数学Ⅲ積分の活用」で指導目標は「比較による数学的活動を通して積分法の有効性について学ぶ。」である。

問題　n個の袋があり、第k番目の袋には赤球k個と白球n－k個が入っている。袋の1つを無作為に選び、その袋から球を無作為に1つ取り出してもどすことをその選ばれた袋で6回繰り返すとき、赤球を2回取り出す確率をP_n、赤球を5回取り出す確率をQ_nとする。$n\to\infty$のとき$P_n=Q_n$となる。本当だろうか。

（問題を提示する。）

S1「確率P_nとQ_nが異なるだろうから「$n\to\infty$のときP_n」と「$n\to\infty$のときQ_n」の極限値も異なると思う。」

S2「「$n\to\infty$のときP_n」と「$n\to\infty$のときQ_n」の極限値は一致するかもしれない。」

（予想する。）

T「予想は異なるようだが、どう調べるか。」

S3「「$n\to\infty$のときP_n」と「$n\to\infty$のときQ_n」の極限値をそれぞれ調べてみる。」（課題をつかむ。）

S4「まず、確率P_nとQ_nを求め、次に区分求積法で「$n\to\infty$のときP_n」と「$n\to\infty$のときQ_n」の極限値を求める。」

Σはk＝1からnまでの和を表すとする
$P_n=\Sigma 1/n\,{}_6C_2(k/n)^2(1-k/n)^4$
$=\Sigma 15/n(k/n)^2(1-k/n)^4$
$n\to\infty$のとき$P_n\to 15\int_0^1 x^2(1-x)^4dx$
$=15[x^7/7-2x^6/3+6x^5/5-x^4+x^3/3]_0^1=1/7$
$Q_n=\Sigma 1/n\,{}_6C_5(k/n)^5(1-k/n)^1$
$=\Sigma 6/n(k/n)^5(1-k/n)$
$n\to\infty$のとき$P_n\to 6\int_0^1 x^5(1-x)dx$
$=6[x^6/6-x^7/7]_0^1=1/7$

（課題が解決した。）

S5「以上より、$n\to\infty$のとき$P_n=Q_n$であることが分かりました。」（問題が解決した。）

T「以上を振り返って他に考えたことはあるか。」

S6「ところで、赤球を0回取り出す確率をA_n、赤球を1回取り出す確率をB_n、赤球を3回取り出す確率をC_n、赤球を4回取り出す確率をD_n、赤球を6回取り出す確率をE_nとしたとき、$n\to\infty$のとき$A_n=B_n=C_n=D_n=E_n=P_n=Q_n=1/7$となるのでしょうか。」（新たな課題をつかむ。）

ここでの問題の後半を「赤球を2回取り出す確率P_nを求め、$n\to\infty$のときP_nも求めよ。」と設定したらどうなるであろうか。ここでも確率P_nや極限値$n\to\infty$のときP_nを求めることが生徒自身の課題とはならない。生徒自身が確率や極限値を求めたくなるように問題を設定し直す必要がある。生徒自身が自ら学び自ら考えたくなるようにするためにも、確率P_nとQ_nを並列に配置して知的好奇心を刺激した。

事例を考察する。生徒自身がつかみ取った課題が解決された後で、更に生徒自身が新たな課題をつかみ取っていった。それは赤球を2、5回以外も取り出した場合であった。このように問題自体の中に生徒が新たな課題をつかみ出したくなるような要素を含ませておくことも、課題から問題を作るときに配慮したい。それは課題が複数浮かび上がるように数値などを工夫することである。数値の微妙な調整は問題作成のおいても重要である。

4．課題解決における「比較」の有効性の問題

（1）問題事例1

ここでは課題解決におけるに「比較」の有効性についての問題事例を考察していく。単元は「数学Ⅲ積分法の活用」で、指導目標は「比較による数学的活動を通して積分法の有効性を学ぶ。」

問題　$y=x^2-ax$ $(a>0)$ とx軸で囲まれた図形を、x軸の周りに1回転してできた立体の体積をv_1，y軸の周り1回転してできる体積をv_2とする。このとき$v_1=\pi a^4/6$，$v_2=\pi a^5/30$は正しいか。また，$a=5$のとき$v_1=v_2$となる。本当だろうか。

（問題を提示する。）

S1「$v_1=\pi a^4/6$と$v_2=\pi a^5/50$が正しければ、$\pi a^4/6=\pi a^5/30$より$a=5$は正しいことになるが……」

S2「$v_1=\pi a^4/6$と$v_2=\pi a^5/50$が正しいかはまだ分からない。」（予想する。）

T「本当かうそか、どのように調べるのか。」

S3「先ず体積v_1とv_2を求めてみる。」

（課題をつかむ。）

S4は、体積v_1とv_2を次のように解決した。

課題解決1

$V_1=\int_0^a \pi y^2 dx=\pi\int_0^a (x^2-ax)^2dx$

$=\pi\int_0^a (x^4-2ax^3+a^2x^2)dx$

$=\pi[x^5/5-ax^4/2+a^2x^3/3]_0^a=\pi a^5/30$

$x^2-ax-y=0$より$x=1/2(a\pm\sqrt{a^2+4y})$

$V_2=\int_{-a^2/4}^0 \pi\{1/4(a+\sqrt{a^2+4y})^2-1/4(a-\sqrt{a^2+4y})^2\}dy$

$=[\pi a(a^2+4y)^{3/2}\cdot 2/3\cdot 1/4]_{-a^2/4}^0$

$=\pi a^4/6$

T「別の解決方法がないだろうか。」

S5は体積V_2を次のように解決した。

課題解決2

$y=x^2-ax$と置換する。

$V_2=\int_{a/2}^a \pi x^2 dy/dx\cdot dx-\int_{a/2}^0 \pi x^2 dy/dx\cdot dy$

$=\int_0^a \pi x^2 dy/dx\cdot dx=\int_0^a \pi x^2(2x-a)dx$

$=\pi[x^4/2-ax^3/3]_0^a=\pi a^4/6$

T「別の解決方法がないだろうか。」

S6は体積V_2を次のように解決した。

課題解決3

$V_2=\int_0^a 2\pi x\cdot(0-y)\cdot dx$

$=-2\pi\int_0^a x(x^2-ax)dx$

$=-2\pi[x^4/2-ax^3/3]_0^a=\pi a^4/6$

（課題が解決して、問題も解決した。）

T「3つの課題解決を比較してみよう。」

S7「解決1は計算量が多いので、解決2のように置換積分を利用した方が早いようです。」

S8「解決3の方が解決1や2より計算量が少なく早く解決できます。しかし、長方形の面積$2\pi x\cdot(0-y)$をy軸の回りに区間$0\leqq x\leqq a$で巻いていく考えを知らないと、この積分計算はできないと思います。でも、とても便利な考えだと思います。」

ここでは、複数の課題解決が生み出されるように問題を作成した。複数の課題解決の「比較」によって生徒は深い理解と納得を獲得していった。このような問題作成においては、複数の別解から問題を練り上げ、「比較」が生ずるようにする。

（2）問題事例2

ここでも課題解決における「比較」の有効性についての問題事例を考察していく。単元は「数学Ⅲ微分法の活用」で、指導目標は「比較による数学的活動を通して微分法の有効性について学ぶ。」

問題　$0<A<1$，B，Cは正の整数で$B<C$，$(1+A/B^2)^B$，$(1+A/C^2)^C$ どちらが大きいか。

（問題を提示する。）

S1「$(1+A/B^2)^B$ が一番大きい。」

S2「$(1+A/C^2)^C$ が一番大きい。」

S3「$A=1/2$，$B=1$のとき$(1+A/B^2)^B=(1+1/2)^1=3/2=94/64$、$A=1/2$，$C=2$のとき$(1+A/C^2)^C=(1+1/8)^2=(9/8)^2=81/64$より$(1+A/B^2)^B$ が大きそうだ。」

（予想する。）

T「$(1+A/B^2)^B$ が本当に大きいのか。」

S4「対数を取って差を考える。その後に関数を作って増減を調べます。」（課題をつかむ。）

S5「$\log(1+A/B^2)^B-\log(1+A/C^2)^C$をA＝Xとおいて、これをXの関数$f(X)=\log(1+X/B^2)^B-\log(1+X/C^2)^C$として増

減を調べます。」

S6「$0<X<1$, $1 \leqq B<C$のとき, $f'(X)=B(1+X/B^2)^{-1}\cdot 1/B^2-C(1+X/C^2)^{-1}\cdot 1/C^2=B/(X+B^2)-C/(X+C^2)=(B-C)(X-BC)/(X+B^2)(X+C^2)>0$ よって関数$f(X)$は$0<X<1$のとき増加関数です。」

（課題が解決した。）

T 「次に問題をどう解決するのか。」

S7「$f(0)=0$から$0<X<1$のとき$f(X)>0$です。したがって、$X=A$のときは$(1+A/B^2)^B-(1+A/C^2)^C>0$より$(1+A/B^2)^B>(1+A/C^2)^C$が成り立ち、$(1+A/B^2)^B$の方が大きいことが分かりました。」（問題が解決した。）

T 「別の解決方法はあるだろうか。」

S8「$B=X$とおいて関数の変化を調べる。」

S9「$\log(1+A/B^2)^B-\log(1+A/C^2)^C$を$B=X$とおいて、これをXの関数$f(X)=\log(1+A/X^2)^X-\log(1+A/C^2)^C$とおく。$0<A<1$, $1 \leqq X<C$のとき$f'(X)=\log(1+A/X^2)+X\times X^2/(X^2+A)\times(-2A)/X^3=\log(1+A/X^2)-2A/(X^2+A)$ $A/X^2=t$とおいて、これをtの関数$g(t)=\log(1+t)-2t/(1+t)$とおく。$g'(t)=1/(1+t)-2/(1+t)^2 \fallingdotseq (t-1)/(t+1)^2<0$ $(\because t<1)$ $\therefore f'(X)<g(0)=0$より関数$f(X)$は単調減少関数だから、$B<C$のとき$f(B)>f(C)=\log(1+A/C^2)^C-\log(1+A/C^2)^C=0$ したがって、$f(B)>0 \Leftrightarrow (1+A/B^2)^B>(1+A/C^2)^C$である。」（新たな課題解決）

T 「さらに別の解決方法はないのだろうか。」

S10「$C=X$とおいて関数の変化を調べる。」

S11「$\log(1+A/B^2)^B-\log(1+A/C^2)^C$を$C=X$とおいて、これをXの関数$f(X)=\log(1+A/B^2)^B-\log(1+A/X^2)^X$とおく。$0<A<1$, $1 \leqq B<X$のとき$f'(X)=-\log(1+A/X^2)-X\times X^2/(X^2+A)\times(-2A)/X^3=-\log(1+A/X^2)+2A/(X^2+A)$ $A/X^2=t$とおいて、これをtの関数$g(t)=-\log(1+t)+2t/(1+t)$とおく。$g'(t)=-1/(1+t)+2/(1+t)^2=(1-t)/(1+t)^2>0$ $(\because t<1)$ $\therefore f'(X)>g(0)=0$より関数$f(X)$は単調増加関数だから$B<C$のとき、$f(B)<f(C)$ $f(B)=\log(1+A/B^2)^B-\log(1+B^2)^B=0$ したがって$f(C)>0 \Leftrightarrow (1+A/B^2)^B>(1+A/C^2)^C$である。」（新たな課題解決）

T 「3つの課題解決を比較してみよう。」

S10「3つの課題解決を比べてみると、A，B，Cのどれでもよいから一文字の関数と見て、他の文字を定数と見ると、関数の増減が調べられることが分かりました。」

ここでも、複数の課題解決が生み出されるように問題を作成した。複数の課題解決の「比較」によって生徒は深い理解と納得を獲得していった。このような問題作成においては、複数の別解をもつ問題をさらに練り上げ作り直していく。この時に使用する文字を配慮することによっても有効な「比較」が生ずる。そうすることによって、学ぶ上で有効な数学的活動も生ずるようにする。

5．「比較」による誤概念を生かした問題

（1）問題事例1

ここでは「比較」による誤概念を生かした問題事例を考察していく。単元は「数学Ⅰ絶対方程式・不等式」で指導目標は「比較による数学的活動を通して絶対方程式・不等式について学ぶ。」である。

> 問題　不等式を解く。
> （1）$|X-3|=2X$ を解くと $X-3=\pm 2X$より解は$X=-3$, 1である。
> （2）$|2X-3|<X$ を解くと $2X-3<\pm X$より$X<3$, $X<1$ よって解は$X<1$
> （1）（2）は正しいか。

S1「（1）（2）共に正しいと思う。」

S2「（1）は正しいけれど、（2）は間違い。」

S3「（1）（2）共に間違いだと思う。」

T 「（1）がなぜ正しいのか。」

（予想する。）

S4「例えば$|X|=2$のとき、$X=\pm 2$だから（1）の解き方は正しいはずです。」

S5「$X=-3$が解だとしたら$|X-3|=|-3-3|=|-6|=6$、$2X=2\times(-3)=-6$となり$|X-3| \neq 2X$ですから（1）は間違い。」

S2「正しい答えはどうなるのでしょうか。」

（課題1をつかむ。）

T 「正しい答えを導くにはどう考えるのか。」

S6「｜X－3｜≧0だから2X≧0つまりX≧0を満たす解はX＝1で、X＝－3は解として適さないです。あるいは、X≧3のときとX＜0のときに分けて考えても同じです。」(課題1解決)

T 「(2) は本当に正しいだろか。」

S7「X＜1が解だとしたら、X＝0を不等式に代入すると｜2×0－3｜＜0より3＜0となり矛盾します。」

S1「正しい答えはどうなるのでしょうか。」

(課題2をつかむ。)

S8「－X＜2X－3＜Xより－X＜2X－3かつ2X－3＜Xすなわち1＜X＜3が解です。あるいは、X≧3／2のときとX＜3／2のときに分けて考えても同じです。」(課題2解決)

（2）問題事例2

ここでは「比較」による誤概念を生かした問題事例を考察していく。単元は「数学A組合せ」で、指導目標は「比較による数学的活動を通して組合せについて学ぶ。」である。

問題　9人を次のように分ける。 （1）3人ずつ3グループに分ける。 （2）3人ずつA，B，C組に分ける。 （1）（2）共に$_9C_3 \cdot {}_6C_3$＝1680通りある。 正しいか。

T 「(1) (2) 共に1680通りで正しいですか。」

S1「9人から3人ずつ選ぶから正しい思います。」

S2「(1) は3グループに (2) のようにA、B、Cグループとして名が付いていて区別されているならば1680通りだと思います。しかし、(2) はグループが区別されていないから間違いです。」

T 「正しい答えが分かる人はいますか。」

S3「例えばAグループ (a, b, c) Bグループ (d, e, f) Cグループ (g, h, i) としてグループ名だけ変えるとしたならば3！＝6通り考えられるけれども、グループに区別がなければ、この6通りは同じ組み分けとなります。(1) は、$_9C_3 \cdot {}_6C_3$÷3！＝280通りだと思います。」

T 「この考え方をどう思いますか。」

S4「初めは (1) と (2) の問題文の意味は同じだと思いました。(1) と (2) を比べながら他の人の考えを聞いていたら違いが分かりました。」

ここでは、生徒がつまずきやすい誤答例を問題の中に配置した。また誤答例を含ませた (1) と (2) を対比させることによって、確かな理解と納得を獲得できるように配慮して作成した。誤答を含ませた問題を提示することによって、生徒は正しい答えは求めるための考え方の追求が始まった。誤答と正答の比較によりつまずきも生かされ、確かな学力を獲得することになる。

6．並列配置における「比較」を生かした問題

（1）問題事例1

ここでは並列配置された小問どうしの比較を通して課題が解決されていく問題事例を考察していく。単元は「数学A命題と論理」で、指導目標は「比較による数学的活動を通して数学的論理について学ぶ。」である。

問題　$-2 \leqq X \leqq 2$のとき，関数$f(X)=X^2+2X-2$，$g(X)=-X^2+2X+a+1$について，次の条件を満たすような定数aの値の範囲について考える。 ①任意の実数Xに対して，$f(X)<g(X)$ ②適当な実数Xに対して，$f(X)<g(X)$ ③任意の実数X_1, X_2に対して$f(X_1)<g(X_2)$ ④適当な実数X_1, X_2に対して$f(X_1)<g(X_2)$ A「①と③の定数aの値の範囲は同じようだ。」 B「②と④の定数aの値の範囲は同じようだ。」 C「全部定数aの値の範囲は違うようだ。」 誰が正しいのだろうか。

S1「AとBは正しいようです。」

S2「③と④の実数X_1, X_2は必ずしも同じ実数を表していないと思うので、AとBは間違いかも…」

T 「Cが正しいのですか。」

(異なる予想の比較)

S3「①から定数aの値の範囲を求めたいです。」

(課題をつかむ。)

S4「先ず2次関数について調べます。関数$f(X)=(X+1)^2-3$より軸X＝－1，頂点(－1, －3)、$g(X)=-(X-1)^2+a+2$より軸X＝1，頂点 (1, a＋2) です。」

T 「①の任意や$f(X)<g(X)$はどんな意味か。」

S5「「任意の」とは「すべての」Xに対して$f(X)<g(X)$、$-2 \leqq X \leqq 2$の範囲のどのXの値に対

しても、つねに f(X)＜g(X)になるという意味です。グラフ上では、どのXの値の場合も g(X)が f(X)より上側にあります。」

T 「定数 a の値の範囲はどうなるのか。」

S6「すべてのXに対して f(X)＜g(X)、つまり、$h(X)=g(X)-f(X)=-2X^2+a+3>0$ となるには、$-2\leqq X\leqq 2$ における h(X)の最小値が 0 より大きくなればよいです。$y=h(X)$ のグラフは、上に凸で、軸が直線 $X=0$ ですから、$X=-2$ または $X=2$ で最小値をとります。よって、$h(-2)=a-5$、$h(2)=a-5$ より $a-5>0$ つまり、$a>5$ です。」

T「②の適当や f(X)＜g(X)はどんな意味か。」

S7「適当な」とは「ある」Xに対して f(X)＜g(X)、$-2\leqq X\leqq 2$ の範囲で f(X)＜g(X)を満たすXの値が少なくとも1つあればよいという意味です。」

T 「定数 a の値の範囲はどうなるのか。」

S8「あるXに対して、f(X)＜g(X)となるには、$h(X)=g(X)-f(X)=-2X^2+a+3$ の最大値が $-2\leqq X\leqq 2$ において 0 より大きければよいです。$y=h(X)$ のグラフは、上に凸で、軸が直線 $X=0$ で最大値をとります。よって、$h(0)=a+3$ より、$a+3>0$　つまり、$a>-3$ です。」

T「③の任意の実数 X_1, X_2 や $f(X_1)<g(X_2)$ にはどんな意味があるだろうか。」

S9「「任意の」とは「すべての」組 X_1, X_2 に対して $f(X_1)<g(X_2)$、どの $f(X_1)$ に対しても $g(X_2)$ はつねにグラフが上側にあるということです。」

T 「定数 a の値の範囲はどうなるのか。」

S10「g(X)の最小値が、f(X)の最大値より大きければよいので、$g(-2)>f(2)$ と考えます。よって、$a-7>6$　から $a>13$ となります。」

T「④の適当な実数 X_1, X_2 や $f(X_1)<g(X_2)$ にはどんな意味があるだろうか。」

S11「「適当な」とは「ある」組 X_1, X_2 に対して $f(X_1)<g(X_2)$、$f(X_1)<g(X_2)$ を満たす X_1, X_2 の組が1つでもあればよいという意味です。」

T 「定数 a の値の範囲はどうなるのか。」

S12「g(X)の最大値が f(X)の最小値より大きければよいので、$g(1)>f(-1)$ と考えます。$a+2>-3$ より $a>-5$ となります。」

（課題が解決した。）

S13「①から④までの a の値の範囲がすべて異なることが分かりました。」

S14「Cが正しいことが分かりました。」

（問題が解決した。）

T 「以上を振り返ってみよう。」

S14「初めは①から④は同じような意味をもつ表現かと思いましたが、比較して考えていくうちにそれぞれの意味の違いが分かってきました。」

S15「任意とか適当の数学的な意味や式が表す意味が、比較することによって分かってきました。」

ここでは、4組の小問を並列配置して「比較」の有効性が引き出されるように問題を作成した。①だけでも問題として機能するだろうが、数学用語の意味の違いや式の意味の相違点を浮き出させるためにも4組配置した。生徒は問題文の微妙な違いを比較することによって、数学用語や式がもつ意味の違いを明確に理解していくことができる。確かな理解と納得をもたらし学力向上に結びつけるためにも、似て非なる用語や式を比較しやすいように問題を作成していくことは重要である。

（2）問題事例2

ここでも並列配置された小問どうしの比較を通して課題が解決されていく問題事例を考察していく。単元は「数学Ⅲ微分法の活用」で、指導目標は「比較による数学的活動を通し微分法の活用について学ぶ。」である。

問題
①$(1+2000/1999)^{1999/2000}<(1+1999/2000)^{2000/1999}$
②$(1+2000/1999)^{1999/2000}>(1+1999/2000)^{2000/1999}$
③$X>0$，$f(X)=(1+1/X)^X$ は単調増加関数
④$X>0$，$f(X)=(1+1/X)^X$ は単調減少関数
⑤$X>0$，$1/(X+1)<\log(1+1/X)^X$
⑥$X>0$，$1/(X+1)>\log(1+1/X)^X$
正しいのはどれだろうか。

S1「①と③が正しそうです。」

S2「②と④が正しそうです。」

S3「$f(2)=243/108$、$f(3)=256/108$ より、おそらく $f(X)=(1+1/X)^X$ は単調増加関数だから①と③が正しそうです。」（予想する。）

T 「①と③が本当に正しいですか。⑤⑥は？」

S4「関数 $f(X)=(1+1/X)^X$ の増減を調べたいです。」（課題をつかむ。）

T 「どのように微分しますか。」

S5「対数をとって微分します。」

S6「$\log\{f(X)\}=X\log(1+1/X)$より，両辺をXで微分すると，$f'(X)/g(X)=\log(1+1/X)-1/(X+1)$　したがって，$f'(X)=(1+1/X)^X\{\log(1+1/X)-1/(X+1)\}$となります。ここで⑤が成り立てばf(X)は増加関数であることが分かります。」

T 「このあとはどのように調べるのか。」

S7「$\log(1+1/X)-1/(X+1)$の部分を微分して調べていきたいと思います。」

S8「$g(X)=\log(1+1/X)-1/(X+1)$とおきます。$g(X)=\log(X+1)-\log X-1/(X+1)$より，$g'(X)=1/(X+1)-1/X+1/(X+1)^2=-1/X(X+1)^2<0$　したがって，g(X)はX＞0で単調減少となります。」

T 「f(X)は増加関数か減少関数か。」

S9「X→∞のとき$g(X)=\log(1+1/X)-1/(X+1)\to\log 1-0=0$　よって，X＞0のとき，g(X)＞0より，X＞0のとき，$\log(1+1/X)>1/(X+1)$が成り立ちます。つまり⑤は正しいことがここで分かりました。したがって，$f'(X)=(1+1/X)^X\{\log(1+1/X)-1/(X+1)\}>0$　よってX＞0のときf(X)は単調増加関数です。」（課題が解決した。）

T 「正しいのはどれか。」

S10「1999/2000＜2000/1999 より f(1999/2000)＜f(2000/1999)であるから$(1+2000/1999)^{1999/2000}<(1+1999/2000)^{2000/1999}$が成り立ちます。以上から①と③と⑤が正しいことが分かりました。」

（問題が解決した。）

上記の事例について考察していく。誤答と対比させた複数の小問を並列に配置した。どちらが正しいのか複数配置することによって「比較」の有効性が引き出されるようにした。複数並列配置した問題は、誤答を含んだ小問を対にして配置してある。このことによって、生徒はどちらが正しいのか知りたくなり、考え方の追求も促すことができる。このような数学的活動を通して新学習指導要領の課題である「体系的理解」「表現能力」「数学のよさの認識」「数学的論拠に基づいて判断する態度」などが培われると考えている。

7．予想証明問題（補足問題）

（1）問題事例1

ここでは予想から証明の必要感を抱きながら課題が解決されていく問題事例を考察していく。単元は「数学Ⅲ積分法と回転の体積」で、指導目標は「比較による数学的活動を通して、学級全体で積分法を活用した証明を学ぶ。」である。

> 問題　放物線$y=-x^2+2x$と直線$y=x$によって囲まれる部分を直線$y=x$のまわりに回転して得られる立体の体積をV_1とする。放物線$y=-x^2+x$とx軸によって囲まれる部分をx軸のまわりに回転して得られる立体の体積をV_2とする。このときA君は「V_1はV_2の$\cos(\pi/4)$倍になるであろう。」と予想した。この予想は正しいだろうか。

S1「直線y＝xとx軸のなす角$\theta=\pi/4$だからA君の予想は正しいかもしれない。」

S2「囲まれている部分が違うから体積も異なるのではないだろうか。」

T 「正しいか間違いか、どのように調べるか。」

S3「V_1とV_2の体積を求めて比較したいです。」

T 「先ずV_1の体積をどのように求めるか。」

S4「放物線$y=-x^2+2x$を$-\pi/4$回転させた曲線Cをx軸の回りに回転させた体積を求める。」

S5「曲線Cは複雑な式となり計算が困難です。」

T 「他の方法を考えてみよう。」

S6「直線y＝xの回りの回転体も回転軸y＝xに垂直に切った断面積は円です。この断面積を回転軸にそって積分すれば体積が求められるはずです。」

S7「図を書いて考えていきます。」

S8「放物線$y=-x^2+2x$と直線$y=x$の交点はO(0，0)と(1，1)です。放物線$y=-x^2+2x$上における点を$P(X, -X^2+2X)$とします。点Pからx軸に垂線を下ろしたとき直線y＝xとの交点をQとします。点Pから直線y＝xに下ろした垂線の足をRとします。このとき$OR=\sqrt{2}x$であり、$OQ=t$（$0\leqq t\leqq\sqrt{2}$）、$PQ=h$とします。$h=|x-(-x^2+2x)|/\sqrt{2}=(x-x^2)/\sqrt{2}$です。$t=OR-QR=\sqrt{2}x-(x-x^2)/\sqrt{2}=(x+x^2)/\sqrt{2}$より$dt/dx=(1+2x)/\sqrt{2}$となります。」

T 「体積V_1を求めるとどうなるのか。」

$V_1=\pi\int_0^{\sqrt{2}} h^2 dt=\pi\int_0^1\{(x-x^2)/\sqrt{2}\}^2(1+2x)/\sqrt{2}\,dx=\pi/2\sqrt{2}\int_0^1(x^2-3x^4+2x^5)\,dx=\pi/2\sqrt{2}\,[x^3/3-3x^5/5+x^6/3]_0^1=\pi/30\sqrt{2}$

T 「次に体積V_2を求めてみよう。」

$V_2=\pi\int_0^1(x-x^2)^2dx=\pi\int_0^1(x^2-2x^3+x^4)dx=\pi\,[x^3/3-x^4/2+x^5/5]_0^1=\pi/30$

S9「以上$V_1=\pi/30\sqrt{2}=V_2/\sqrt{2}=COS(\pi/4)V_2$となるので$V_1$は$V_2$の$\cos(\pi/4)$倍になる。」

S10「A君の予想は正しいことが分かりました。」

上記の事例について考察する。異なる予想の比較から本当に正しいかどうかを知りたいという知的好奇心が刺激された。そして、本当に正しいのかを調べてみたいため考え方の追求が始まった。積分法を活用して正しいことが証明されたのである。このような数学的活動を通して、積分法に対する理解を深めていった。

（2）問題事例2

ここでも予想から証明の必要感を抱きながら課題が解決されていく問題事例を考察していく。単元は「数学Ⅲ微分法と最大最小」で、指導目標は「比較による数学的活動を通して、学級全体で微分法を活用した証明を学ぶ。」である。

問題　辺の長さAB＝a，BC＝b，CD＝c，DA＝dが一定である凸四辺形ABCDにおいて、∠A＝x，∠C＝yとおく。このときE子さんは「x＋y＝πのとき凸四辺形ABCDの面積が最大になります。残念ながら証明を書く暇がないわ。」といった。本当にx＋y＝πのとき面積が最大になるのだろうか。

S1「x＋y＝πのときは円に内接する四角形のときですね。正しそうです。」

S2「4辺の長さが固定されています。本当に正しいでしょうか。」

T 「どのように調べたらよいのか。」

S3「図を書いて考えていきます。」

S4「三角形ABDと三角形BCDにおいて余弦定理を使います。余弦定理より　$BD^2=a^2+d^2-2ad\cdot\cos x=b^2+c^2-2bc\cdot\cos y$……①が成り立ちます。」

S5「凸四辺形ABCDの面積は$S=1/2\cdot ad\cdot\sin x+1/2\cdot bc\cdot\sin y$……②となります。」

T 「この後どうするのか。」

S6「微分して増減表をつくると分かりそうです。」

S7「①の両辺をxで微分します。

$2ad\cdot\sin x=2bc\cdot\sin y\cdot dy/dx$より

$dy/dx=ad\cdot\sin x/bc\cdot\sin y$……③

次に、②をxで微分します。

$dS/dx=1/2(ad\cdot\cos x+bc\cdot\cos x\cdot dy/dx)$

$=ad(\sin y\cdot\cos x+\cos y\cdot\sin x)/2\sin y$

$=ad\cdot\sin(x+y)/2\sin y$」

T 「面積Sの増減は分かるのか。」

S8「yの増減からSの増減が分かります。」

S9「$0<x<\pi$、$0<y<\pi$だから$\sin x>0$、$\sin y>0$　よって③より$dy/dx=ad\cdot\sin x/bc\cdot\sin y>0$となるので、yはxの増加関数です。したがって、x+yもxの増加関数です。$dS/dx=ad\cdot\sin(x+y)/2\sin y=0$のとき$\sin(x+y)=0$より$x+y=\pi$です。次にSの増減表を書きます。」

x＋y	0	…	π	…	2π
dS／dx	／	＋	0	－	／
S	／	増加	極大	減少	／

S10「以上より、x＋y＝πのときSは極大かつ最大となります。E子さんは正しかったです。」

上記の事例について考察する。ここでも異なる予想の比較から本当に正しいかどうかを知りたいという知的好奇心が刺激された。そして、本当に正しいのかを調べてみたいため考え方の追求が始まった。微分法を活用して正しいことが証明されたのである。このような数学的活動を通して、微分法に対する理解を深めていった。

このような数学的活動を通して新学習指導要領の課題である「体系的理解」「表現能力」「数学のよさの認識」「数学的論拠に基づいて判断する態度」などが培われると考えている。

以上より、本稿では「比較」の有効性が授業で引き出だされ、上記の新学習指導要領の課題を達成できる問題作成について具体的に提案してきた。このような問題を使用した学習指導が主体的な学習や学力向上につながる。さらに、受験学力の向上躍進にも生きていく。また、生涯数学を学び続けていく楽しみも感得できると考えている。

8．問題と教師の十戒

（1）題材

教師の重要な務めの一つに授業がある。授業における教授法は、教師の重要なスキルでもある。ほぼ間違いのない教授法の一つに、教師自身がうんざりするような題材を授業で使ってはいけないということである。教師自身が興味を持てないような題材で授業を構成しようしたらどうなるであろうか。ほぼ間違いなくクラスの生徒たちはその題材にうんざりするであろう。逆に教師自身がわくわくするような題材をもって授業を構成しようとしたとき、生徒も興味を示すことが多いであろう。つまり、教師自身の興味関心が生徒に与える影響力は大きいと考えられる。これによって、教師に対するいの一番の重要な戒律は「自分の題材に興味を持てば、生徒の興味関心も喚起できる。」である。

教師自身が興味を持てない題材を、授業を構成するとき使わないということを原則としたい。つまり、興味を持てない題材を生徒に教えないということである。なぜならばそれを生徒が快く受け入れられるように、教師が教えることはできないだろうからである。興味は授業を構成していく上で必要欠くべからざる条件である。しかし、それだけでは十分ではない。いかに多くの興味や、教授法や、他の何物にあっても教師自身がはっきり理解していないことを題材に使用してはいけない。なぜならば、教師自身がはっきり理解していない題材で、生徒に深い理解と納得もたらすような授業を構成することはできないからである。これによって、教師に対する戒律を引き出すことができる。それは「扱いたい題材を教師自身が十分知り尽くしていく。」である。

以上より、教材に対する興味、そして知識は、共に教師に必要なものである。教師自身が興味や関心を持ち続けることは重要である。なぜならば、教師自身が真の興味を抱いていれば、教師は必要な知識を得る良い機会を得ることになるからである。逆に興味の欠乏と一体になった多少の知識は、容易に教師を並外れた悪い教師にすることが多いからである。

（2）学習と教授

教師が学習心理学に関する書物を読んだり、講演などを聞いたりすることから多くの利益を得ることがあるだろう。しかし、読んだり聞いたりすることだけでは十分ではない。教師自身が学習の仕方について研鑽を積むべきだ。それも教育現場の経験を中心に研鑽を積むことが大切である。つまり、教師自身の研究の経験と自分の生徒の観察とから深く学習の方法に精通するべきである。

まず、学習について3つにまとめてみる。1つめは積極的な学習である。学習は消極的であったり、受容的であったりしてはいけない。自分自身の心の活動を加えることである。つまり、学習において自分自身が発見するはめになった事柄は、必要が起こったときにまた使用できる事柄として自分自身の心の中に残すものである。2つめは最良の動機づけをもつことである。学習者が学ぶべき題材に興味をもち、学習活動に喜びを見出すことである。3つめは、有効な学習のために人間の認識は直感に始まり、そこから概念に進む。そして、知識の体系の中に吸収されて応用や一般化への道につなげる。

以上より学習について概観した。有効な学習法の知見から有効な教授法の知見が導き出される。積極的な学習を引き出すためには、生徒が何を考えているかを大切にしなければならない。つまり、授業時間には制限があり、履修させるべき題材は規定されている。このような与えられた状況のもとで、生徒にできるだけ多くの事を自分で発見させることである。次に最良の動機づけは、生徒が自分の課題に対して興味を抱くことである。そのために、生徒が問題をやる前に、結果あるいはその一部でも推測させることである。生徒は自分の推測が正しかったか否かを知りたくなる。このような動機づけが生徒の心に望ましい学習態度を教えることになる。次に学習の流れを、直感、概念化、応用一般化へともっていくためには、生徒に与える題材を工夫する必要がある。教科書の例題や練習問題などを工夫して提示することによっても可能である。そのためにも有効な数学的活動が引き起こされるような問題を工夫して提示することは、生徒の有益な学習を引き出す。

次に学習と教授の関係について考察する。教師が知識と興味と学習法についてのある程度の理解を持っていても十分ではない。教師による教授が生徒の学習に終わるためには、教師と生徒との間にある種の接触あるいはつながりが存在しなければならない。教師は生徒の考えを受容しなければならない。これによって、教師に対する戒律を引き出すことができる。それは「教師は生徒たちの顔を通して内面を理解するように努力する。生徒たちの期待と困難を知るように努める。教師は生徒の立場にも身を置けるように努力する。」である。

教師には別にも重要な役割がある。教師は数学の授業を通して数学の知識を生徒に授けることができる。また、数学の授業において問題を解き、証明を組み立て、解答や証明などを比較検討する力を生徒に授けることもできる。後者の方がずっと重要である。したがって、数学の授業では教師が何を教えるかより、いかに教えるかの方が重要である。これによって、教師に対する戒律を引き出すことができる。それは「教師は生徒たちに単に数学的知識を与えるだけでなく、数学的に考える力や習慣も与えよ。」である。

（3）学習指導

我々数学教師はどのような手順で学習指導を展開していくことが最善であろうか。それは、生徒にまず推測させ、それから証明させることである。多くの発見はこのように進んでいるはずである。数学の教師は発見における推測の役割を示すいい機会を幾つも持っているはずである。したがって、根本的に重要な数学的活動を生徒から引き出すことができるいい機会を幾つも持っているのだということである。つまり、我々数学教師は、教育的で合理的な推測を生徒から引き出す指導に努めなければならない。これによって、教師に対する戒律を引き出すことができる。それは「教師は生徒に推測することを学ばせよ。」である。

推測から証明の流れは多くの発見を生み出してきた。数学は発見に向けた推論を学ぶ良き教科である。このような推論は諸科学にも浸透している。多くの推論から多くの発見がなされてきた。このように推測から証明という数学的な考え方の筋道は、他の諸科学においても有益なものである。ここからも教師に対する戒律を引き出せる。それは「教師は生徒に証明することを学ばせよ。」である。

次に、問題解答時における教師の指導について考えていきたい。教師やある生徒の考えを学級内に提示するとき、その考えの有益な特徴を強調しておくことが大切である。特徴は他者が模倣に値するとき有益なものとなる。すなわち、当面の問題の考え方の筋道においてのみならず、他の問題を考える時においてもその筋道が利用される時が有益である。利用されることの多い考え方の筋道が多いほど、それだけ有益である。有益な特徴は、その考え方を示した生徒をただほめるだけではなく（生徒によっては逆効果になるかもしれない）、教師の行動によって強調することが大切である。演劇的才能があれば、少し芝居をすると効果的なこともある。うまく強調された特徴は、教師や生徒の有益な考え方の筋道を他の生徒がまねることによって、他の多くの問題が解けるように生徒自身の内部に有益な特徴として再構築していく。これによって、教師に対する戒律を引き出すことができる。それは「生徒が現在解いている問題について、今後の諸問題を解く時に有用だろうと思われる諸特徴を探し出させる指導をする。」である。

（4）生徒の自由と独創

ここでも教室における教師の指導について考えていく。問題を解説解答する前に、生徒に推測予想させたい。生徒が推測予想したことは、自分の推測予想したことが正しいか否かを観るために、解答の進展を最後まで見守っていかなければならない。それで生徒は不注意ではいられなくなる。なぜならば、生徒は最後の結果を知りたいし、その理由や証明も知りたくなるからである。特に異なる推測予想が複数あるときは、心理的に不快で不安定になる。生徒は心の安定を得ようとする心的動向が生じる。それは自分の推測予想が正しいか否かを知るための考え方の追求が始まることである。ここからも教師に対する戒律を引き出せる。それは「教師が一度に解答の全てをさらけ出すな。教師が言う前に生徒に推測予想させよ。できるだけ生徒自身に沢山発見させよ。」である。

次に生徒が長い解答を作成して提案提出してきた時を想定してみよう。教師がその解答の最後あたりの行に誤りがあることを知るとする。この時に教師はどのような指導的態度を示すのがよいであろうか。もし、頭ごなしに「これは間違いだ。」と言ったら、その生徒は感情を害し、教師と数学を憎むだろう。また、教師のこれからのその生徒に対する指導的努力は無駄になるであろう。できれば、「君は正しい。だが……」と肯定的なメッセジーを送りたい。生徒自身が気づくように暗示的指導していきたい。無理やり頭ごなしに正しい解答を生徒に打ち込んでも、生徒の内面に深く溶け込んではいかないであろう。やはり、生徒の思考を大切にしたい。これによって、教師に対する戒律を引き出すことができる。それは「教師は暗示せよ。無理に正答を押し込むな。」である。

最後に教師の日々の務めと精神的態度にふれる。このことで示唆に富むポリアの教師に対する十戒を記載して本稿を閉じる。(ポリア，1971)

1. 自分の題材に興味をもて.
2. 自分の題材を知れ.
3. 学習の仕方を知れ：物を学ぶ最良の道は，それを自分で発見することだ.
4. 自分の生徒達の顔を読むように努めよ，彼らの期待と困難とを知るように努めよ．自分を彼らの立場に置け.
5. 彼らに，情報だけでなく「能力」，心の態度，組織的な仕事の習慣をも与えよ.
6. 彼らに推測することを学ばせよ.
7. 彼らに証明することを学ばせよ.
8. 現在手がけている問題について，今後の諸問題を解くとき有用だろうと思われる諸特徴を探せ――現在の具体的状位の背後に横たわる一般的パターンを賜わにするよう努めよ.
9. 自分の秘密をすべて一度にさらけ出すな――貴方が云う前に生徒に推測させよ――出来るだけ沢山生徒に自分で発見させよ.
10. それを暗示せよ，無理に生徒の口に飲みこませるな.

引用・参考文献

文部科学省(2009)，高等学校学習指導要領解説数学編，1－17.

相馬一彦(2000)，「問題解決の授業」に生きる「問題」集，明治図書，13－30.

相馬一彦(1997)，問題解決の授業，明治図書.

長崎栄三(2004),高校新数学科の在り方,明治図書

長崎(2001),数学と社会文化のつながり,明治図書

能田伸彦(1983)，オープンアプローチによる指導の研究，東洋館出版社

中原忠男(1995)，算数数学教育における構成的アプローチの研究，聖文社

西成(2011),とんでもなく役に立つ数学,朝日出版社

志村五郎(2010)，数学をいかに使うか，筑摩書房

佐竹武文(2010),生活に役立つ高校数学,日本文芸社

ポリア(1986),いかにして問題をとくか,丸善株式会社

ポリア(1986)，帰納と類比，丸善株式会社

ポリア(1981)，発見的推論，丸善株式会社

ポリア(1970),数学の問題の発見的解き方1,みすず書房

ポリア(1971),数学の問題の発見的解き方2,みすず書房

塚原成夫(2000)，数学的思考の構造，現代数学社

志賀(2000),教えるヒント学ぶヒント1,日本評論社

志賀(2000),教えるヒント学ぶヒント2,日本評論社

上田薫(1986)，人間の生きている授業，黎明書房

上田薫(1986)，ずれによる創造，黎明書房

中田基照(1993)，授業の現象学，東京出版会

レイブ(1993),状況に埋め込まれた学習,産業図書

ブルーナ(1986)，教育の過程，岩波書店

中村雄二郎(1992)，臨床の知とは何か，岩波書店

吉田甫(1992),どう教えるかどう学ぶか,北大路書房

西林克彦(1994)，間違いだらけの学習論，新曜社

日本数学教育学会(1997)，２０世紀の数学教育思想の流れ，産業図書

日本数学教育学会(1998)，学校数学の授業構成を問う，産業図書

日本数学教育学会(1999)，算数数学カリキュラムの改革へ，産業図書

日本数学教育学会編(2000)，和英/英和算数数学活用辞典，東洋館出版社

日本数学教育学会編(2010)，数学教育学研究ハンドブック，東洋館出版社

第３部　実践論文

「比較」を生かした入試問題過去問による問題作成の提案

北海道滝川高等学校　工藤　寛之

要　約

意識的・戦略的に「比較」を取り入れた学習指導は、主体的な学習意欲と確かな理解や納得を得る上で有効である。「比較」も「数学的活動」の一種であると考えている。新学習指導要領では数学的活動を通して一層主体的な学習活動を求めている。また、「比較」は、新学習指導要領の課題である「体系的理解」「表現能力」「数学のよさの認識」「数学的論拠に基づいて判断する態度」「創造性」を培う上でも有効である。このような「比較」の有効性を生徒から引き出す問題づくりの工夫についても、授業実践や文献研究などより明らかになってきた。本稿では、「比較」の有効性が授業で引き出だされ、上記の新学習指導要領の課題を達成できる問題作成における大学入試問題過去問の利用法について具体的な事例を提案していく。また、実践事例から「比較」の有効性が引き出されていく状況も考察された。このような問題を使用した学習指導が主体的な学習や学力向上につながる。また、本稿の提案が数学教育の目標の一つでもある「社会に活きる。社会に活かす。」数学教育の探求にもつながる。そして、本稿が大学受験の学力の一層の向上と躍進にも生きると考えている。

キーワード：比較　問題作成　大学入試問題　数学的活動　表現能力　学力向上　受験学力

１．「期待値」に関する問題

（１）比較の有効性が生きた期待値の問題

授業で大学の入試問題を活用していくと、生徒に深い理解と納得をもたらすことができる。ただし、このとき入試問題をそのまま演習や解説用として活用するのではなく、時期や生徒の実態を配慮しながら問題を作り直して生徒に提示していくことが大切である。もちろん、受験学力向上のために、入試問題の傾向を分析し対策を練ることも重要なことである。そのための演習授業や解説授業は価値のある指導である。また、受験生にとっては合格することが大変重要な目的である。そのためにも教師は惜しみない教材研究を行い、受験生のために学習指導を熱心に行おうことは十分価値の高い教育的活動である。だからこそ、生徒の受験学力を一層高いものに向上させるために、入試問題を少し作り直して提示していくが重要であると考えている。入試問題を作り直して教室で提示し授業を構成していくということは、教室における集団学習において受験学力の根っこの部分を太く培うことである。そのことは、教室という集団の力で個々の学力も向上していくということである。つまり、教室における多様な考えの比較検討や集団の学ぶ雰囲気の醸成などが個々の生徒の真の学力向上をもたらすと考えている。ここからは入試問題を活用した事例を提案していく。

ここでは「比較」の有効性を生かした期待値の問題事例を考察していく。単元は「数学Ａ期待値」で、指導目標は「比較による数学的活動を通して期待値の活用について学ぶ。」である。

問題　１枚２００円の２種類の宝くじがある。 宝くじＡ「1 万分の１の確率で特賞１００万円が当たる。それ以外ははずれである。」 宝くじＢ「10 分の１の確率で１等５００円、残りは全て残念賞５０円である。」 この場合、君はどうするか。

Ｔ「ＡとＢのどちらを買うほうが得か。」

S1「わずか２００円で１００万円の夢が見られるから、宝くじAを買います。」
S2「悪くても５０円になるからＢを買います。」
S3「どちらも損しそうなので買わないです。」
S4「1枚あたりの期待金額を調べてからどちらを買うかを決めたほうがよさそうです。」
T「確率の期待値の考えで計算してみよう。」
S5「宝くじＡの期待金額は 1000000 × 1/10000=100 円です。」
S6「宝くじＢの期待金額は 500×１/10＋50×9/10＝95 円です。」
T「期待値が分かったがどうする。」
S7「宝くじを買うとしたら、宝くじAを買った方が有利のようです。しかし、宝くじ 200 円に対してのこの期待金額では、買うのは不利だと思います。」

ここでの問題事例について考察していく。２つの確率の期待値の問題を並列に配置した。２つの期待値を求め比較する活動で期待値の有効性を学ぶことができた。また、期待値の学習は指導目標の一つである「社会に活かす。社会に活きる。」数学教育の探求にも合致するするものであると考えている。このような数学教育の研究が教室や学校社会を超えて一般の社会生活にも役立つものになる。また、生徒自身が数学と社会生活のつながりを実感するよい教材でもある。さらに大学受験や大学での学習研究にもつながる数学教育の研究にも努めなければならない。次からは大学入試問題を活用した具体的な実践事例を列挙していく。

（2）大学入試問題を改題した期待値の問題

ここでは大学入試問題を改題した問題事例を提案していく。単元は「数学A期待値」で、指導目標は「比較による数学的活動を通して期待値の活用について学ぶ。」である。

> **問題1**　さいころを１回または２回振り、最後に出た目の数を得点とするゲームを考える。１回振って出た目を見た上で、２回目を振るか否かを決める。２人は次のように考えた。
> A君「４以下ならば２回目を振る。」
> Bさん「４以上ならば２回目を振らない。」
> どちらが有利だろうか。

> **問題２**　１と同様のゲームで、３回振ることも許されるとする。４人は次のように考えた。
> C君「４以上が出たら、２回目は振らない。」
> Dさん「４以下が出たら、２回目を振る。」
> E君「2回目に４以下が出たら３回目は振る。」
> Fさん「2回目に４以上が出たら、３回目は振らない。」
> 有利な考えはあるだろうか。（K大入試の改題）

T「AとBのどちらのほうが有利か。」
S1「Aくんの方が有利かな。」
S2「Bさんの方が有利な気がします。」
S3「さいころを１回振る場合の出る期待値を求めることから考えた方がよいと思います。」
T「この場合の期待値はどうなるか。」
S4「1×１/６＋2×１/６＋3×１/６＋4×１/６＋5×１/６＋6×１/６＝7/2=3.5 です。」
S5「Bさんのように４以上の目が出たら振らないほうが有利です。」
T「問題２で有利な考えはあるだろうか。」
S6「ここも期待値を調べてから考えたいと思います。」
T「どのように考えて期待値を求めるか。」
S7「上の作戦で２回または１回さいころを振る場合の得点が１点となる場合を考えます。」
S8「1回目が１，２，３のいずれかであり、２回目が１の場合であるから、その確率は３/６×１/６＝１/12 です。」
S9「２点、３点のときも同様に１／12 です。」
T「４点、５点、６点の場合はどうなるのか。」
S10「１回目に４が出るか、１回目に１，２，３のいずれかで、2回目が4点となる場合であるから、その確率は１/6+3/6×1/6=1/4 です。」
S11「５点、６点のときも同様に１／４です。」
T「期待値はどうなるのか。」
S12「(1+2+3)×１/12＋(4+5+6)×１/４＝4.25」
T「有利な考えはあるだろうか。」
S13「期待値 4.25 と１回目の目とを比較して、２回目を振るかどうかを決めます。」
S14「Dさんのように、１回目に４以下が出たら２回目を振る方が有利です。」
S15「2回目は、Fさんのように４以上出たら３回目は振らない方が有利だと思います。」

（3）センター試験過去問を改題した問題

ここではセンター試験過去問を改題した問題による実践事例を提示していく。単元は「数学A 期待値」で指導目標は「比較による数学的活動を通して期待値の活用について学ぶ。」である。

> 問題　次の各ゲームの中で、どれに参加することが得点上一番有利だろうか。
>
> ゲーム1
>
> 1枚の硬貨を3回投げ、表が出た回数をXとする。次にさいころをX回振る。（例えばX＝2ならば、さいころを2回振ることになる。）そうして、1または2の目が出た回数をYとしてこの回数を得点Aとする。ただし、X＝0の場合は、Y＝0ときめる。
>
> （平成13年センター試験の改題）
>
> ゲーム2
>
> 1つのさいころを2回続けて投げ、出た目の数を順にa,bとするとき、u＝a／bとおく。Tを次で定義する。
>
> uが偶数の整数にならばT＝u
>
> uが奇数の整数にならばT＝1
>
> uが整数にならない場合はT＝0
>
> このときのTを得点Bとする。
>
> （平成16年センター試験の改題）
>
> ゲーム3
>
> 赤,青,黄,緑の4色のカードが5枚ずつ計20枚ある。この20枚の中から3枚を一度に取り出す。3枚の中にある赤いカードの枚数を得点Cとする。
>
> （平成11年センター試験の改題）
>
> ゲーム4
>
> 大小2個さいころを投げ、出た目を其々a,bとし2次関数$y=x^2-(b-2)/a$のグラフFとx軸との共有点の個数を得点Dとする。
>
> （平成17年センター試験の改題）

S1「各ゲームの得点の期待値を求めて、その値を比較すると、どのゲームに参加することが一番有利になるかが分かると思います。」

T　「各ゲームにおける得点の期待値を、グループ1から4に分けて調べてもらいます。」

（4つのグループに分けて調べる時間を取る。）

T　「ゲーム1の期待値を調べたグループ1から発表してもらいます。」

グループ1「Y＝1となる確率は、X＝1，2，3のときがあるから、${}_3C_1/2^3\times2/6+{}_3C_2/2^3\times{}_2C_1 1/3\cdot2/3+{}_3C_3/2^3\times{}_3C_1 1/3\cdot(2/3)^2=1/8+1/6+1/18=25/72$です。同様にY＝2となる確率は${}_3C_2/2^3\times(1/3)^2+{}_3C_3/2^3\times{}_3C_2(1/3)^2\cdot2/3=1/24+1/36=5/72$です。同様に考えるとY=3となる確率は${}_3C_3/2^3\times(1/3)^3=1/216$です。以上より得点Aの期待値は$1\times25/72+2\times5/72+3\times1/216=1/2$です。」

グループ2「u＝1となるのは6通りです。u=2すなわちa=2bとなるのは(a,b)=(2,1),(4,2),(6,3)の3通りです。u＝3すなわちa＝3bとなるのは(a，b)=(3，1)，(6，2)の2通りです。u＝4，5，6となるのは(a，b)=(4，1)，(5，1)，(6，1)の3通りです。したがって、T＝1となる場合はu＝1，3，5のときで6＋2＋1＝9通りです。T＝2となる場合はu＝2のときで3通りです。T＝4となる場合はu＝4のときで1通りです。T＝6となる場合はu＝6のときで1通りです。以上より得点Bの期待値は$1\times9/36+2\times3/36+4\times1/36+6\times1/36=25/36$です。」

グループ3「20枚のカードから3枚を取り出すとき、赤色のカードがX枚（X=0，1，2，3）だけ含まれる確率をP(X)とおきます。$P(1)={}_5C_1\times{}_{15}C_2/{}_{20}C_3=525/1140=35/76$，$P(2)={}_5C_2\times{}_{15}C_1/{}_{20}C_3=5/38$，$P(3)={}_5C_3/{}_{20}C_3=1/114$となります。よって得点Cの期待値は、$1\times35/76+2\times5/38+3\times1/114=3/4$です。」

グループ4「共有点の個数が1個のときを考えると$-(b-2)/a=0$よりb=2となります。このときのa，bの組は(a，b)=(1，2)，(2，2)，(3，2)，(4，2)，(5，2)，(6，2)の6通り。したがって、この時の確率は$6/6^2=1/6$です。共有点の個数が2個のとき$-(b-2)/a<0$より$a<0$だから$b-2>0$　つまり$b>2$となるbは3，4，5，6の4通りである。よって、このときのa，bの組(a，b)は6×4＝24通りです。したがって、この時の確率は、24／36＝2／3です。以上より、得点Dの期待値は$1\times1/6+2\times2/3=3/2$です。」

T　「以上より各ゲームの得点の期待値が分かったが、どのゲームに参加すると有利か。」

S2「期待値が一番大きいゲーム4に参加することが一番有利になりそうです。」

（4）2次試験過去問を改題した問題

ここでは2次試験過去問を改題した問題によるグループ学習を提示する。単元は「数学A期待値」で、指導目標は「比較による数学的活動を通して期待値の活用について学ぶ。」である。

> 問題　次の各ゲームの中で、どれに参加することが得点上一番有利だろうか。
>
> **ゲーム1**
>
> X、Yの2人にはそれぞれ4点の持ち点があり、1つのさいころを振って1または3の目が出たときはXが1点を失い、その他の目が出たときはYが1点を失うものとする。XまたはYの少なくとも一方が持ち点をすべて失うまでにさいころを振る回数を得点Aとする。
>
> （昭和54年　K大の改題）
>
> **ゲーム2**
>
> 2個のさいころを同時に1回投げるとき、出た目の数の差を得点Bとする。
>
> （昭和53年　K大の改題）
>
> **ゲーム3**
>
> 箱の中に、1、2、……、9の数字を1つずつ書いた同形同質のカードが9枚入っている。この箱から1枚のカードを無作為に取り出し、その数字を調べてから、もとの箱に戻す。これを3回くり返して、取り出したカードの数字の最大値を得点Cとする。
>
> （昭和48年　K大の改題）
>
> **ゲーム4**
>
> 袋の中に赤、青、黄、緑の4色の球が1個ずつ合計4個入っている。袋から球を1個取り出してその色を記録し袋にもどす試行を、くりかえし4回行う。こうして記録された相異なる色の数を得点Dとする。
>
> （平成17年　K大の改題）

S1「各ゲームの得点の期待値を求めて、その値を比較すると、どのゲームに参加することが一番有利になるかが分かると思います。」

T　「各ゲームにおける得点の期待値を、グループ1から4に分けて調べてもらいます。」

（4つのグループに分けて調べる時間を取る。）

T　「ゲーム1の期待値を調べたグループ1から発表してもらいます。」

グループ1「Xが1点を失うことをXで、Yが1点を失うことをYで表すことにすると、P(X)＝1／3，P(Y)＝2／3です。題意により、Aのとりうる値はA＝4，5，6，7である。4回で一方の持ち点がなくなるためには、4回続けてXまたはYが起こることであるから、$P(A=4)=(1/3)^4+(2/3)^4=17/81$　5回で一方の持ち点がなくなるためには、はじめの4回にX（またはY）が3回起こって、5回目にX（またはY）が起こることであるから$P(A=5)={}_4C_3(1/3)^3(2/3)(1/3)+{}_4C_3(2/3)^3(1/3)(2/3)=8/27$　6回で一方の持ち点がなくなるためには、はじめの5回にX（またはY）が3回起こって、6回目にX（またはY）が起こることであるから$P(A=6)={}_5C_3(1/3)^3(2/3)^2(1/3)+{}_5C_3(2/3)^3(1/3)^2(2/3)=200/729$　7回で一方の持ち点がなくなるためには、はじめの6回にX（またはY）が3回起こって、6回目にXとYが3回ずつ起こって、7回目にどちらが起こっても良いから$P(A=7)={}_6C_3(1/3)^3(2/3)^3(1/3+2/3)=160/729$　よって、得点Aの期待値は$4\times17/81+5\times8/27+6\times200/729+7\times160/729=4012/729$です。」

グループ2「出た目の差は0，1，2，3，4，5の6通りで、各確率をかける。得点Bの期待値は$1\times10/36+2\times8/36+3\times6/36+4\times4/36+5\times2/36=35/18$となります。」

グループ3「X＝1となる確率を求めると、$(1/9)^3=1/729$である。次に例えばX=3となる確率は$P(X\leqq3)-P(X\leqq2)=(3/9)^3-(2/9)^3=19/729$です。したがって得点Cの期待値は、Σをk＝1からk＝9までの和を表すとすると、$\Sigma\{P(X\leqq k)-P(X\leqq k-1)\}=\Sigma\{(k/9)^3-(k-1)^3/9^3\}=\Sigma(3k^2-3k+1)k/729=1/729\times\{3/4\times9^2\times10^2-1/2\times9\times10\times19+1/2\times9\times10\}=65/9$となります。」

グループ4「C＝1となるのは、1色のみが4回取り出されるときで、$P_1=4\times(1/4)^4=1/64$です。C＝4となるのは、各色が1回ずつ取り出されるときで$P_4=4!\times(1/4)^4=2/32$です。

C＝3となるのは例えば赤が2回、青と黄色が1回ずつ取り出されるときで、その確率は$(4!/2!)\times(1/4)^2\times1/4\times1/4=3/4^3$であり、2回取り出される色の選び方が4通り、それが決まったとき、他の1回ずつ取り出される色の選び方が、${}_3C_2=3$通りあるから$P_3=3/4^3\times4\times3=9/16$となりま

す。残りのP_2は余事象を考えて$P_2=1-(1/64+9/16+3/32)=21/64$となります。以上より得点Dの期待値は$1\times 1/64+2\times 21/64+3\times 9/16+4\times 3/32=175/64$です。」

T 「各期待値から、どのゲームに参加するか。」

S2「ゲーム3の得点の期待値が一番大きいので、ゲーム3に参加することが有利なようです。」

2．「面積・体積」に関する問題

(1) 比較の有効性が生きた面積と体積の問題

ここでは「比較」の有効性を生かすために2題並列に配置した。単元は「数学Ⅲ積分法と面積と体積」で、指導目標は「比較による数学的活動を通して積分法の活用について学ぶ。」である。

> 問題　次の(1)の体積V_1と(2)の体積V_2において、どちらの体積が大きいだろうか。
>
> (1) 放物線$y=x^2-4x+2$と直線$y=-x$とで囲まれた部分を底面とし、x軸に垂直な平面で切った切り口がつねに正三角形であるような立体の体積をV_1とする。(S大の改題)
>
> (2) 曲線$\sqrt{x}+\sqrt{Y}=1$ $(0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1)$と直線$x+y=1$とで囲まれた部分を底面とし、直線$x+y=1$に垂直な平面で切った切り口がつねに正三角形であるような立体の体積をV_2とする。(T大の改題)

S1「積分で体積V_1とV_2を求めたいです。」

T 「先ず、体積V_1をどのように求めるのか。」

S2「切り口の断面積を積分します。そのためにグラフを書いて考えます。放物線$y=x^2-4x+2$と直線$y=-x$の交点は$(1,\ -1)$と$(2,\ -2)$です。放物線$y=x^2-4x+2$と直線$y=-x$とで囲まれた部分を、直線$x=a$で切ると、切り口つまり線分の長さは$-a-(a^2-4a+2)=-a^2+3a-2$……①です。点$(a,\ 0)$を通りx軸に垂直な平面で題意のように切った切り口は一辺の長さが①である正三角形です。」

T 「この切り口の面積はどうなるか。」

S3「この面積は、$1/2\times(-a^2+3a-2)\times\sqrt{3}/2\times(-a^2+3a-2)=\sqrt{3}/4\times(a^2-3a+2)^2=\sqrt{3}/4\times(a-1)^2\ (a-2)^2$……②」

T 「これをどのように積分するのか。」

S4「②を$a=1$から2までで積分します。」

> $V_1=\int_1^2\sqrt{3}/4\times(a-1)^2(a-2)^2da$
> $=\sqrt{3}/4\int_1^2(a-1)^2\{(a-1)-1\}^2da=\sqrt{3}/4\int_1^2\{(a-1)^4-2(a-1)^3+(a-1)^2\}da=\sqrt{3}/4\ [1/5(a-1)^5-1/2(a-1)^4+1/3(a-1)^3]_1^2$
> $=\sqrt{3}/4(1/5-1/2+1/3)=\sqrt{3}/120$

T 「次に体積V_2を求めてみよう。」

S5「グラフを書いて考えます。直線$x+y=1$上の点$P(a,\ 1-a)$ $(0\leqq a\leqq 1)$を通り、直線$x+y=1$に垂直な平面で切った切り口の面積Sを求めます。次に面積Sを積分すると体積V_2を求めることができます。」

T 「どのように断面積Sを求めるのか。」

S6「直線$x+y=1$上の点P$(a,\ 1-a)$ $(0\leqq a\leqq 1)$を通り、直線$x+y=1$に垂直な直線mを求めます。mは$y-(1-a)=1\cdot(x-a)$より$y=x+1-2a$……①　次に直線①と曲線$\sqrt{x}+\sqrt{Y}=1$の交点のx座標を求めます。$\sqrt{x}+\sqrt{Y}=1$の両辺を2乗すると$x+y+2\sqrt{xY}=1$ゆえに$x+y-1=-2\sqrt{xY}$です。さらに2乗すると$(x+y)^2-2(x+y)+1=4xy$　ゆえに$(x-y)^2-2(x+y)+1=0$……②　①と②からyを消去すると$(2a-1)^2-2(2x+1-2a)+1=0$　ゆえに$4a^2-4x=0$　よって直線①と曲線$\sqrt{x}+\sqrt{Y}=1$の交点のx座標はa^2です。したがって、切り口は正三角形だから、面積$S=1/2\times\sqrt{2}(a-a^2)\times\sqrt{3}/2\times\sqrt{2}(a-a^2)=\sqrt{3}/2\times(a-a^2)^2$です。」

T 「この面積Sをどのように積分するのか。」

S7「このSを積分区間$0\leqq a\leqq 1$で積分します。」

T 「本当にこの積分で正しいか。」

S8「断面積に垂直な方向の区間で積分することが正しく、aで積分するのは間違いです。」

T 「どのように積分するのか。」

S9「点$(0,\ 1)$を点A、点$(1,\ 0)$を点Bとする。AB上の点がPである。$AP=t$とすると、$AB=\sqrt{2}$だから$t=\sqrt{2}a$です。よって、$S=\sqrt{3}/2\times(a-a^2)^2=\sqrt{3}/2\times(t^2/2-t/\sqrt{2})^2$となります。このSを積分区間$0\leqq t\leqq\sqrt{2}$で積分します。」

> $V_2=\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{3}/2\times(t^2/2-t/\sqrt{2})^2dt=$
> $\sqrt{3}/2\int_0^{\sqrt{2}}(t^4/4-t^3/\sqrt{2}+t^2/2)dt=\sqrt{3}/2\times[t^5/20-t^4/4\sqrt{2}+t^3/6]_0^{\sqrt{2}}=\sqrt{6}/60$

T 「これ以外の積分の方法はあるだろうか。」

S10「$t=\sqrt{2}a$ より $dt/da=\sqrt{2}$ となり $dt=\sqrt{2}da$ だから次のようにも積分できます。」

$$V_2=\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{3}/2\times(t^2/2-t/\sqrt{2})^2dt$$
$$=\int_0^1 \sqrt{3}/2\times(a-a^2)^2\sqrt{2}\,da$$
$$=\sqrt{6}/2\int_0^1 (a^4-2a^3+a^2)da$$
$$=\sqrt{6}/2\times[a^5/5-a^4/2+a^3/3]_0^1=\sqrt{6}/60$$

S11「$V_1=\sqrt{3}/120<2\sqrt{6}/120=V_2$となり、$V_2$の方が大きいことが分かりました。」

（2）比較の有効性が生きた面積の問題

ここでは「比較」の有効性を生かしたグループ学習の事例を提示する。単元は「数学Ⅲ積分法と面積」で、指導目標は「比較による数学的活動を通して積分法の活用について学ぶ。」である。

問題（1）から（5）の体積S_1～S_5の中で、一番大きい面積と一番小さい面積と3番目に大きい面積はどれだろうか。

（1）曲線$y=\log x$，直線$x=1/e$，$x=e$，$y=0$で囲まれた面積をS_1とする。（06年　K大の改題）

（2）2つの放物線　$3y=x^2$, $3x=y^2$で囲まれた部分の面積をS_2とする。（07年　R大の改題）

（3）2つの楕円$x^2+y^2/3=1$と$x^2/3+y^2=1$の内部の重なった部分を面積S_3とする。（N大の改題）

（4）極方程式$r=1+\cos\theta$で表された曲線で囲まれた部分の面積をS_4とする。ただし、$0\leqq\theta\leqq2\pi$とする。（H大の改題）

（5）曲線$y=\sin x$，$y=\sin 2x$で囲まれら部分を面積S_5とする。ただし$0\leqq\theta\leqq2\pi$とする。（M大の改題）

S1「積分で各面積を求めて比較することです。」

T 「面積S_1からS_5を5グループに分かれて調べてもらい、発表してもらうことにします。」

（5つのグループに分けて調べる時間を取る。）

グループ1「グラフを書いて考えていきます。曲線$y=\log x$とx軸との交点のx座標は、$x=1$です。$y=\log x$のグラフは、$1/e\leqq x\leqq1$でx軸より下方、$1\leqq x\leqq e$でx軸より上方にあります。よって、積分すると次のようになります。」

$$S_1=-\int_{1/e}^1 \log x\,dx+\int_1^e \log x\,dx$$
$$=-[x\log x-x]_{1/e}^1+[x\log x-x]_1^e=2-2/e$$

グループ2「グラフを書いて考えます。2つの放物線 $3y=x^2$と直線$y=x$の交点のx座標を求めます。$3x=x^2$　$x(x-3)=0$ より$x=0, 3$　よって、求める交点は(0, 0), (3, 3)です。2つの放物線は直線$y=x$に関して対称になるので、面積を次のように積分して求めます。」

$$S_2=2\int_0^3 (\sqrt{3x}-x)dx$$
$$=2[2\sqrt{3}\,x^{3/2}/3-x^2/2]_0^3=3$$

グループ3「グラフを書いて考えます。2つの楕円$x^2+y^2/3=1$と$x^2/3+y^2=1$の内部の重なった部分はx軸、y軸に関して対称だから、$0\leqq x$、$0\leqq y$の部分の面積$S_3/4$を先ず考えます。2つの楕円$x^2+y^2/3=1$と$x^2/3+y^2=1$の第1象限における交点を求めると$(\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2)$です。また$0\leqq x$、$0\leqq y$の部分の面積は直線$y=x$に関して対称であることを使います。$x^2+y^2/3=1$より$y=\sqrt{3}\sqrt{1-x^2}$だから次のように積分します。」

$$S_3/4=2\{1/2(\sqrt{3}/2)^2+\int_{\sqrt{3}/2}^1 \sqrt{3}\sqrt{1-x^2}\,dx\}$$
よって、$S_3=3+8\sqrt{3}\int_{\sqrt{3}/2}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$
$=3+$(扇形)$-$(直角三角形)
$$=3+1/2\times1^2\times\pi/6-1/2\times\sqrt{3}/2\times1/2$$
$$=3+8\sqrt{3}(\pi/12-\sqrt{3}/8)=2\sqrt{3}\pi/3$$

グループ4「グラフを書いて考えます。この曲線は以前学んだカージオイド（心臓形）です。x軸に関して対称だから次のように積分します。

$$S_4=2\times1/2\int_0^\pi r^2d\theta=\int_0^\pi(1+\cos\theta)^2d\theta$$
$$=\int_0^\pi(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$$
$$=\int_0^\pi(1+2\cos\theta+1/2+\cos2\theta/2)d\theta$$
$$=[\theta+2\sin\theta+\theta/2+\sin2\theta/4]_0^\pi=3\pi/2$$

グループ5「グラフを書いて考えます。2つのグラフの交点は$\sin x=\sin2x$　$\sin x=2\sin x\cos x$　$\sin x(1-2\cos x)=0$　$\sin x=0$, $\cos x=1/2$ より$x=0$, $\pi/3$, π, $5\pi/3$, 2π　これと$y=\sin2x$のグラフは$y=\sin x$をx軸方向に1/2倍したものだから、この2曲線のグラフは共に点$(\pi, 0)$に関して点対称です。次のように積分します。」

$S_5/2=\int_0^{\pi/3}(\sin 2x-\sin x)dx+\int_{\pi/3}^{\pi}(\sin x-\sin 2x)dx=[-\cos 2x/2+\cos x]_0^{\pi/3}+[-\cos 2x/2+\cos x]_{\pi}^{\pi/3}=5/2$ より $S_5=5$

T 「各面積が求められた。順番はどうなるか。」

S2「$1<S_1=2(e-1)/e<2$、$S_2=3$、$3<S_3=2\sqrt{3}\pi/3<4$、$4<S_4=3\pi/2<5$、$S_5=5$ より一番大きい面積は S_5 で、一番小さい面積は S_1 です。3番目に大きい面積は S_3 です。」

(3) 比較の有効性が生きた体積の問題

ここでも「比較」の有効性を生かしたグループ学習の事例を提示する。単元は「数学Ⅲ積分法と体積」で、指導目標は「比較による数学的活動を通して積分法の活用について学ぶ。」である。

問題（1）から（5）の体積 V_1～V_5 の中で、一番大きい体積と一番小さい体積と3番目に大きい体積はどれだろうか。

（1）曲線 $y=\log x$，直線 $x=e$，$y=0$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を V_1 とする。（01年 I大の改題）

（2）$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ の範囲で、曲線 $y=\sin x$ と $y=\cos\theta$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を V_2 とする。（02年 T大の改題）

（3）曲線 $y=x\sqrt{1-x^2}$ $(0\leqq x\leqq 1)$，x 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を V_3 とする。（05年 H大の改題）

（4）曲線 $y=\sin x$，$y=\tan x/2$，直線 $x=0$，$x=\pi/2$ で囲まれた部分を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を V_4 とする。（07年 K大の改題）

（5）直線 $y=x$ と曲線 $y=x^3$ $(x\geqq 0)$ により囲まれる部分を、直線 $y=x$ のまわりに1回転してできる回転体の体積を V_5 とする。（06年 Y大の改題）

S1「積分で各体積を求めて比較することです。」

T 「体積 V_1 から V_5 を5グループに分かれて調べてもらい、発表してもらうことにします。」

（5つのグループに分けて調べる時間を取る。）

グループ1「グラフを書いて考えていきます。積分区間 $1\leqq x\leqq e$ で $\pi(\log x)^2$ を積分します。」

$V_1=\pi\int_1^e(\log x)^2dx$
$=\pi[x(\log x)^2]_1^e-\pi\int_1^e 2\log x\,dx$
$=\pi e-2\pi[x\log x-x]_1^e=\pi(e-2)$

グループ2「グラフを書いて考えます。2つの曲線で囲まれた部分においてX軸より下側を折り返した図形の回転体の体積を求めることになります。また折り返した図形は直線 $x=3\pi/4$ に関して対称ですので $\pi/4\leqq x\leqq 3\pi/4$ の部分の回転体の体積を求めて次のように2倍します。」

$V_2=2(\pi\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\sin^2 x dx-\pi\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^2 x dx)$
$\pi\int_{\pi/4}^{3\pi/4}(1-\cos 2x)dx-\pi\int_{\pi/4}^{\pi/2}(1+\cos 2x)dx$
$\pi[x-1/2\cdot\sin 2x]_{\pi/4}^{3\pi/4}-\pi[x+1/2\cdot\sin 2x]_{\pi/4}^{\pi/2}$
$=\pi(\pi+6)/4$

グループ3「グラフを書いて考えます。$y'=(1-2x^2)/\sqrt{1-x^2}$ より増減表を書きます。

x	0	……	$1/\sqrt{2}$	……	1
y´	／	＋	0	－	／
y	0	増加	1/2	減少	0

半径 x、高さ $y=x\sqrt{1-x^2}$、幅 Δx の円筒形の体積は $\Delta V=2\pi x\cdot x\sqrt{1-x^2}\,\Delta x$ だから、求めたい体積 V_3 は次のようになります。」

$x=\sin\theta$ とおくと $dx/d\theta=\cos\theta$ より $dx=\cos\theta\,d\theta$ 　x が [0, 1] の時 θ が $[0,\pi/2]$ である。
したがって $V_3=2\pi\int_0^1 2\pi x\cdot x\sqrt{1-x^2}dx=2\pi\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta=\pi/2\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\theta d\theta=\pi/4\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4\theta)d\theta$
$=\pi/4[\theta-1/4\cdot\sin 4\theta]_0^{\pi/2}=\pi^2/8$

グループ4「グラフを書いて考えます。2曲線 $y=\sin x$ と $y=\tan x/2$ は、原点と点 $(\pi/2, 1)$ で交わるので、次のように積分します。

$V_4=\pi\int_0^{\pi/2}\sin^2 x dx-\pi\int_0^{\pi/2}\tan^2 x dx$
$=\pi\int_0^{\pi/2}(1-\mathrm{con}2x)/2dx$
$-\pi\int_0^{\pi/2}(1/\cos^2 x/2-1)dx$
$=\pi[x/2-1/4\sin 2x]_0^{\pi/2}-\pi[2\tan x/2-x]_0^{\pi/2}$
$=\pi(3\pi-8)/4$

グループ5「グラフを書いて考えます。直線 $y=x$ 上で原点から距離 a にある点をA、点Aを通る傾き -1 の直線と曲線 $y=x^3$ との交点を $B(x, x^3)$ とします。またBを通り x 軸に垂直な直線で直線

$y=x$との交点をCとします。$OC=\sqrt{2}$です。さらに直線$y=x$と曲線$y=x^3$との交点(1, 1)をDとします。$OC=\sqrt{2}x$ ($0\leqq x$)、$AB=AC=|x-x^3|/\sqrt{2}=(x-x^3)/\sqrt{2}$より $a=OC-AC=\sqrt{2}x-(x-x^3)/\sqrt{2}=(x+x^3)/\sqrt{2}$ …① したがって、$da/dx=(1+3x^2)/\sqrt{2}$より $da=1/\sqrt{2}\times(1+3x^2)\,dx$ ①よりaが$[0, \sqrt{2}]$のときxは[0, 1]です。よって、体積V_5は次のように積分します。」

$$
\begin{aligned}
V_5 &= \pi\int_0^{\sqrt{2}} AB^2 da \\
&= \pi\int_0^1 (x-x^3)^2/2\times(1+3x^2)/\sqrt{2}\ dx \\
&= \pi/2\sqrt{2}\int_0^1 (x^2-2x^4+x^6)(1+3x^2)dx \\
&= \pi/2\sqrt{2}\times\int_0^1 (3x^8-5x^6+x^4+x^2)dx \\
&= \pi/2\sqrt{2}\,[x^9/3-5x^7/7+x^5/5+x^3/3]_0^1 \\
&= \pi/2\sqrt{2}\times(1/3-5/7+1/5+1/3) \\
&= 4\sqrt{2}\,\pi/105
\end{aligned}
$$

T 「体積が求めれらたが順番はどうなるか。」

S2「$2<V_1=\pi(e-2)<3$、$7<V_2=\pi(\pi+6)/4<8$, $1<V_3=\pi^2/8<2$, $1<V_4=\pi(3\pi-8)/4<2$, $V_3-V_4=\pi(16-5\pi)/8>0$より$V_3>V_4$, $0<V_5=4\sqrt{2}\,\pi/105<1$だから、一番大きい体積は$V_2$で、一番小さい体積は$V_5$で、3番目に大きい体積は$V_3$です。」

以上のように、入試問題を改題したものを複数並列に配置した。教科書で積分法を一通り終えた段階で、上記の問題を提示して授業を構成すると、積分法に関する確かな理解と納得を獲得することができた。つまり、複数のタイプの問題を集団で比較検討しながら問題を解決していく過程で、不確かで曖昧であった知識や技能や理解などが、確かな理解や納得へと結び付いていったのである。受験では、不確かで曖昧である知識や技能や理解などは合格得点には結ぶ付かない。集団で比較検討するなどの学習によって、個々の曖昧で不確かな学力が、確かな学力へと昇華していくのである。

最後に、提示する問題の質の重要性について示唆に富むポリアの言葉を記述して本稿を閉じる。

『教師が学生の知識にふさわしい問題を与えて興味をそそり、適当な質問によって問題を解く手助けをしてやるならば、学生に自分自身でものを考える意欲と方法を与えることができる。』

引用・参考文献

文部科学省(2009)，高等学校学習指導要領解説数学編，1－17.

相馬一彦(2000)，「問題解決の授業」に生きる「問題」集，明治図書，13－30.

相馬一彦(1997)，問題解決の授業，明治図書.

長崎栄三(2004),高校新数学科の在り方,明治図書

長崎(2001),数学と社会文化のつながり,明治図書

能田伸彦(1983)，オープンアプローチによる指導の研究，東洋館出版社

中原忠男(1995)，算数数学教育における構成的アプローチの研究，聖文社

西成(2011),とんでもなく役に立つ数学,朝日出版社

志村五郎(2010)，数学をいかに使うか，筑摩書房

佐竹武文(2010)，生活に役立つ高校数学，日本文芸社

ポリア(1986)，いかにして問題をとくか，丸善株式会社

ポリア(1986)，帰納と類比，丸善株式会社

ポリア(1981)，発見的推論，丸善株式会社

ポリア(1970)，数学の問題の発見的解き方１,みすず書房

ポリア(1971)，数学の問題の発見的解き方２,みすず書房

塚原成夫(2000)，数学的思考の構造，現代数学社

志賀(2000),教えるヒント学ぶヒント１,日本評論社

志賀(2000),教えるヒント学ぶヒント２,日本評論社

上田薫(1986)，人間の生きている授業，黎明書房

上田薫(1986)，ずれによる創造，黎明書房

中田基照(1993)，授業の現象学，東京出版会

レイブ(1993),状況に埋め込まれた学習,産業図書

ブルーナ(1986)，教育の過程，岩波書店

中村雄二郎(1992)，臨床の知とは何か，岩波書店

吉田甫(1992),どう教えるかどう学ぶか,北大路書房

西林克彦(1994)，間違いだらけの学習論，新曜社

日本数学教育学会(1997)，２０世紀の数学教育思想の流れ，産業図書

日本数学教育学会(1998)，学校数学の授業構成を問う，産業図書

日本数学教育学会(1999)，算数数学カリキュラムの改革へ，産業図書

日本数学教育学会編(2000)，和英/英和算数数学活用辞典，東洋館出版社

日本数学教育学会編(2010)，数学教育学研究ハンドブック，東洋館出版社

第4部　実践論文

「比較」を絡めた「一般化」「特殊化」「類推」による問題解決

北海道滝川高等学校　工藤　寛之

要　約

意識的・戦略的に「比較」を取り入れた学習指導は、主体的な学習意欲と確かな理解や納得を得る上で有効である。「比較」も「数学的活動」の一種であると考えている。新学習指導要領では数学的活動を通して一層主体的な学習活動を求めている。また、「比較」は、新学習指導要領の課題である「体系的理解」「表現能力」「数学のよさの認識」「数学的論拠に基づいて判断する態度」「創造性」を培う上でも有効である。このような「比較」の有効性を生徒から引き出す問題づくりの工夫についても、授業実践や文献研究などより明らかになってきた。本稿では、上記の新学習指導要領の課題を達成できるために、問題解決において「比較」の有効性を生かしながら「一般化」「特殊化」「類推」の考え方を用いた問題解決の授業について具体的な事例で提案していく。また、実践事例から「一般化」「特殊化」「類推」の有効性が引き出されていく状況も考察された。「比較」と絡めながら「一般化」「特殊化」「類推」を生かした学習指導が主体的な学習や学力向上につながる。また、本稿の実践事例が大学受験の学力の一層の向上と躍進にも生きると考えている。

キーワード：一般化　特殊化　類推　比較　数学的活動　問題解決　大学入試問題　学力向上

1．「一般化（Generalizaion）」による問題解決

一般化（Generalizaion）ということは、与えられた一組の対象からそれを含むより大きな組の考察に移ることである。例えば生徒が数列1，1，2，3，5，8，……の第7項や第8項などの考察から任意の項の数（一般項）についての考察学習に移るとき、生徒は一般化したわけである。また生徒が鋭角の三角比の学習から一般角の三角関数の学習に移る時、生徒の学習は一般化したわけである。これらの2つの事例において2つの違った仕方がなされたことが注意される。第1例では、一般項に移る際に、定数が変数によって定まった整数 13 が $a_n = 1/\sqrt{5}\cdot\{(1+\sqrt{5})^n/2^n-(1-\sqrt{5})^n/2^n\}$ で制限されているだけの任意の自然数nによって置き換えられた。第2例では、鋭角から任意の角 θ に移る時、一つの制限、すなわち $0° \leqq \theta \leqq 180°$ なる制限が取り去られた。しばしばただ一つの対象からそれを含む全体の集団に移ることで一般化（Generalizaion）が行われる。

問題を解くのに一般化は極めて有効である。特殊な問題を解く成功の鍵は一般的な問題を考え出すことである。例えば、a，bが任意の正の数のとき $2^{n-1}(a^n+b^n) \geqq (a+b)^n$ が成り立つことを証明する成功の鍵の一つは、一般的な問題「$x>0$ のとき関数 $f(x)=2^{n-1}(a^n+x^n)-(a+x)^n$ の値域が0以上であることを証明せよ。」を考え出すことである。つまり、不等式の証明問題を特定の文字に着目した関数の値域の問題へと「一般化（Generalizaion）」することによって微分という道具の利用が可能となり解き易くなってくることである。このような数学的な考え方に触れることによって、新学習指導要領の課題である「体系的理解」「表現能力」「数学のよさの認識」「数学的論拠に基づいて判断する態度」「創造性」を培う上でも有効である。また、生徒が大学の入試問題でも合格

点を勝ち取るためには有効な考え方であり、一般化が活きる授業を構成できるように考えたい。

ここでは「比較」による「一般化」の有効性を生かした不等式の証明の問題事例を考察していく。問題を数題並列に配置して比較が有効に働くように意図した。単元は「数学Ⅱ不等式、数学Ⅲ微分法」で指導目標は「比較による一般化という数学的活動を通して微分法の活用について学ぶ。」である。

> 問題　nは2以上の整数，mは自然数，a_i($1 \leqq i \leqq m$)は任意の正の数とする。次の（1）から（6）の中で正しい不等式はあるだろうか。
>
> （1）$2(a_1^2+a_2^2) \geqq (a_1+a_2)^2$
>
> （2）$4(a_1^3+a_2^3) \geqq (a_1+a_2)^3$
>
> （3）$125(a_1^4+a_2^4+a_3^4+a_4^4+a_5^4) \geqq (a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)^4$
>
> （4）$2^{n-1}(a_1^n+a_2^n) \geqq (a_1+a_2)^n$
>
> （5）$3^{n-1}(a_1^n+a_2^n+a_3^n) \geqq (a_1+a_2+a_3)^n$
>
> （6）$m^{n-1}(a_1^n+a_2^n+\cdots\cdots+a_m^n) \geqq (a_1+a_2+\cdots\cdots+a_m)^n$

T 「5つの式の中で、正しい不等式はあるか。」

S1「（1）と（2）は正しそうです。例えば$a_1=2$、$a_2=1$のときなどは成り立ちます。」

T 「任意の正の数a_iに対して成り立つのか。」

S2「（4）が正しければ(1)も正しいようです。」

S3「（6）が正しければ（3）も正しそうです。」

（各生徒が予想する。）

T 「正しいようにも観えるが、どうするか。」

S4「（1）と（2）は証明できそうです。」

S5「（4）（5）（6）も証明できそうです。」

（不等式の証明が各生徒の課題となった。）

T 「（1）と（2）の証明を先ず考えてみよう。」正しいようにも観えるが、どうするか。」

S6「(1)を証明します。$2(a_1^2+a_2^2)-(a_1+a_2)^2=a_1^2+2a_1a_2+a_2^2=(a_1-a_2)^2 \geqq 0$となり、$2(a_1^2+a_2^2) \geqq (a_1+a_2)^2$が成り立ちます。」

S6「(2)を証明します。$4(a_1^3+a_2^3)-(a_1+a_2)^3=3(a_1^3+a_2^3-a_1^2a_2-a_1a_2^2)=3(a_1+a_2)(a_1-a_2)^2 \geqq 0$となり$4(a_1^3+a_2^3) \geqq (a_1+a_2)^3$ が成り立ちます。」

T 「（4）と（5）の証明はどうなるだろうか。」

S7「（1）と（2）と同じように式変形では証明できそうにもありません。」

T 「特定の文字に着目して、その文字の関数式へと読み換えると「一般化」が有効となる場合があるので（4）は$a_2=x>0$と置き換えて考えみるとどうなるだろうか。」

S7「$f(x)=2^{n-1}(a_1^n+x^n)-(a_1+x)^n$とおき、xで微分すると$f'(x)=n2^{n-1}x^{n-1}-n(a_1+x)^{n-1}=n\{(2x)^{n-1}-(a_1+x)^{n-1}\}$ 以上より$f'(a_1)=n2^{n-1}a_1^{n-1}-n(a_1+a_1)^{n-1}=0$、$f(a_1)=2^{n-1}(a_1^n+a_1^n)-(a_1+a_1)^n=2^na_1^n-2^na_1^n=0$ また、$x>a$のとき$2x>x+a$より$f'(x)>0$、$x<a$のとき$2x<x+a$より$f'(x)<0$である。次に増減表を書きます。」

x	0	……	a	……
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		減少	0	増加

S8「以上から$f(x)=2^{n-1}(a_1^n+x^n)-(a_1+x)^n \geqq 0$であることが分かり、$2^{n-1}(a_1^n+a_2^n) \geqq (a_1+a_2)^n$が成り立ちます。」

T 「次に（5）の証明はどうなるだろうか。」

S9「（4）と同様に特定の文字に着目して、その文字の関数式へと読み換えると「一般化」が有効となるので（5）は$a_3=x>0$と置き換えて考えてみます。」

S10「$g(x)=3^{n-1}(a_1^n+a_2^n+x^n)-(a_1+a_2+x)^n$とおき、xで微分すると　$g'(x)=n3^{n-1}x^{n-1}-n(a_1+a_2+x)^{n-1}=n\{(3x)^{n-1}-(a_1+a_2+x)^{n-1}\}$ 以上より$g'(a_1/2+a_2/2)=n\{(3a_1/2+3a_2/2)^{n-1}-(3a_1/2+3a_2/2)^{n-1}\}=0$また$x>a_1/2+a_2/2$のとき$3x>a_1+a_2+x$より$g'(x)>0$、$x<a_1/2+a_2/2$のとき$3x<a_1+a_2+x$より$g'(x)<0$である。$g(a_1/2+a_2/2)=3^{n-1}\{a_1^n+a_2^n+(a_1/2+a_2/2)^n\}-(a_1+a_2+a_1/2+a_2/2)^n=(3/2)^{n-1}\{2^{n-1}(a_1^n+a_2^n)-(a_1+a_2)^n\} \geqq 0$　なぜならば（4）が成り立つからです。」

S11「次に増減表を書いて、調べていこうと思います。」

x	0	……	$a_1/2+a_2/2$	……
$g'(x)$	／	−	0	＋
$g(x)$	／	減少	0以上	増加

S12「以上から $f(x)=3^{n-1}(a_1^n+a_2^n+x^n)-(a_1+a_2+x)^n\geqq 0$ であることが分かり、$3^{n-1}(a_1^n+a_2^n+a_3^n)\geqq(a_1+a_2+a_3)^n$ が成り立ちます。」

T 「次に(6)の証明 はどうなるだろうか。」

S13「数学的帰納法で証明できそうです。」

S14「m＝1のときは自明です。m＝2のとき(2)で証明されました。次にm=kのとき $k^{n-1}(a_1^n+a_2^n+\cdots\cdots+a_k^n)\geqq(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k)^n$

……① が成り立つと仮定します。

次にm＝k＋1のときを調べます。$a_{k+1}=x$ と置き換えて、 関数 $h(x)=(k+1)^{n-1}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n+x^n)-(a_1+a_2+\cdots+a_k+x)^n$ を考えてみます。この関数をxで微分すると $h'(x)=(k+1)^{n-1}nx^{n-1})-n(a_1+a_2+\cdots+a_k+x)^{n-1}=n\{(k+1)^{n-1}x^{n-1})-(a_1+a_2+\cdots+a_k+x)^{n-1}\}$ 、$(k+1)x>a_1+a_2+\cdots+a_k+x$

つまり、$x>(a_1+a_2+\cdots+a_k)/k$ のとき、$h'(x)>0$ です。

また、$x<(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k)/k$ のとき、$h'(x)<0$ です。

そして $h((a_1+a_2+\cdots+a_k)/k)=(k+1)^{n-1}[a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n+\{(a_1+a_2+\cdots+a_k)/k\}^n]-\{(k+1)/k\}^n(a_1+a_2+\cdots+a_k+x)^n=\{(k+1)/k\}^n\{k^{n-1}(a_1^n+a_2^n+\cdots\cdots+a_k^n)-(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k)^n\geqq 0$ なぜならば①から成り立ちます。次に増減表を書きます。」

x	0	……	$(a_1+a_2+\cdots+a_k)/k$	……
$h'(x)$	／	−	0	＋
$h(x)$	／	減少	0以上	増加

S15「以上より、$(k+1)^{n-1}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n+a_{k+1}^n)\geqq(a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1})^n$ が成り立つことが分かりました。」

S16「以上から任意の正の数 $a_i(1\leqq i\leqq m)$ に対して(6)が成り立つことが証明できました。」

(以上で課題が解決した。)

T 「(3)は正しいのか。」

S17「(6)においてm＝5、n＝4のときが(3)であるから正しいです。」

(問題が解決した。)

T 「振り返ってみて大切なことは何か。」

S18「特定の文字に着目して、その文字の関数式へと読み換えると「一般化」が有効となります。つまり、不等式の証明問題を特定の文字に着目した関数の値域の問題へと「一般化(Generalizaion)」することによって微分という道具の利用が可能となり解き易くなってくることです。」

次でも「比較」による「一般化」の有効性を生かした不等式の証明の問題事例を考察していく。問題を数題並列に配置して比較が有効に働くように意図した。単元は「数学Ⅱ不等式、数学Ⅲ微分法」で指導目標は「比較による一般化という数学的活動を通して微分法の活用について学ぶ。」である。

T 「問題を提示します。」

問題 $a_i(1\leqq i\leqq n+1)$ を正の実数とする。次の(1)~(3)の中で正しい不等式はあるか。

(1) $2\{(a_1+a_2)/2-(a_1a_2)^{1/2}\}\leqq 3\{(a_1+a_2+a_3)/3-(a_1a_2a_3)^{1/3}\}$

(2) $3\{(a_1+a_2+a_3)/3-(a_1a_2a_3)^{1/3}\}\leqq 4\{(a_1+a_2+a_3+a_4)/4-(a_1a_2a_3a_4)^{1/4}\}$

(3) $n\{(a_1+\cdots+a_n)/n-(a_1\cdots a_n)^{1/n}\}\leqq (n+1)\{(a_1+\cdots+a_n+a_{n+1})/(n+1)-(a_1\cdots a_na_{n+1})^{1/(n+1)}\}$

S1「(3)が証明できれば(1)も(2)も正しいことになります。(3)を証明することは難しいようです。」

(予想する。)

T 「先ず(1)の証明を考えてみよう。」

S2「$a_3=x^3$ つまり $a_3^{1/3}=x$ とおいて関数へ一般化することによって解決しそうです。」

(課題1をつかむ。)

S3「$f(x)=X^3-3(a_1a_2)^{1/3}X+2(a_1a_2)^{1/2}$ とおきます。xで微分すると $f'(x)=3x^2-3(a_1a_2)^{1/3}=3\{x^2-(a_1a_2)^{1/3}\}$ となる。$f((a_1a_2)^{1/6})=\{(a_1a_2)^{1/6}\}^3-3(a_1a_2)^{1/3}(a_1a_2)^{1/6}+2(a_1a_2)^{1/2}$

=0　$f'((a_1a_2)^{1/6})=3\{(a_1a_2)^{2/6}-(a_1a_2)^{1/3}\}=0$です。増減表を作ります。」

x	0	……	$(a_1a_2)^{1/6}$	……
$f'(x)$	／	−	0	＋
$f(x)$	／	減少	0	増加

S4「以上より $2\{(a_1+a_2)/2-(a_1a_2)^{1/2}\}$ $\leqq 3\{(a_1+a_2+a_3)/3-(a_1a_2a_3)^{1/3}$ が成り立つことが分かりました。」

(課題1が解決した。)

T 「次に(3)の証明を考えてみよう。」

S5「$a_{n+1}=x^{n+1}$とおいて、つまり$a_3^{1/(n+1)}=x$とおいて関数へ一般化することによって解決しそうです。しかし、$(a_1\cdots a_n)^{1/n}$や$(a_1\cdots a_n a_{n+1})^{1/(n+1)}$が式計算を困難にしそうです。」

(課題2をつかむ。)

T 「$(a_1\cdots a_n)^{1/n(n+1)}=b$と置こう。」

S6「$g(x)=a_{n+1}-(n+1)(a_1\cdots a_n a_{n+1})^{1/(n+1)}+n(a_1\cdots a_n)^{1/n}=x^{n+1}-(n+1)\ b^n x+n\ b^{n+1}$となります。」

S7「xで微分すると$g'(x)=(n+1)\ x^n-(n+1)\ b^n=(n+1)(x^n-b^n)$となります。」

S8「$g(b)=b^{n+1}-(n+1)\ b^n b+n b^{n+1}=0$、$g'(b)=(n+1)(b^n-b^n)=0$となり、次に増減表を書きます。$b=(a_1\cdots a_n)^{1/n(n+1)}$」

x	0	……	b	……
$g'(x)$	／	−	0	＋
$g(x)$	／	減少	0	増加

S9「よって(3)が成り立ちます。」

(課題2が解決した。)

T 「(2)はどうなるのか。」

S10「(2)は(3)においてn＝3のときです。」

S11「(1)(2)(3)全て正しいです。」

T 「振り返ってみて大切なことは何か。」

S15「特定の文字に着目して、その文字の関数式へと読み換えると「一般化」が有効となります。つまり、不等式の証明問題を特定の文字に着目した関数の値域の問題へと「一般化(Generalizaion)」することによって微分という道具の利用が可能となり解き易くなってくることです。」

(問題が解決した。)

以上の事例から分かるように、問題を「一般化」することによって、複雑になるどころか、かえって、微分や数学的帰納法などの利用できる数学的道具の範囲が広がることにより、問題が解き易くなることもあるのだということである。また、複数の小問を並列配置することによって、問題間の比較ができ、考え方の比較も有効に機能していった。次では、一般化と対になる概念である特殊化について考察する。

2．「特殊化(Specialization)」による問題解決

特殊化(Specialization)ということは、与えられた一組の対象の考察からそれに含まれるより小さい一組の対象の考察に移ることである。例えば2次関数$y=x^2+2x+k+3$の考察から、このグラフがx軸と2点で交わるように定数kの値の範囲を生徒が考えると、判別式より$D/4=12-1\cdot(k+3)>0$　ゆえに$k<-2$が答えとなる。このとき2次関数$y=x^2+2x+k+3$は1点で接するとき$k=-3$、共有点を持たないとき$k>-3$などより、x軸と2点で交わるときのみに特殊化(Specialization)させたのである。さらに$k=-4$のとき2次関数$y=x^2+2x-1$となりx軸と2点で交わる。一層、特殊化(Specialization)したわけである。これら2つの移行の例には2つの違った仕方が行われた。第1の移行、すなわち「$y=x^2+2x+k+3$」から「x軸と2点で交わる場合　$y=x^2+2x+k+3$ $(k<-2)$」に制限が導入された。第2の移行では変数kに対して特別な値$k=-4$という値が、すなわち変わる実数kに対して−4と置かれた。

我々は、対象物の全集団から、その集団に含まれるただ1つの対象に移ることで、特殊化することが多い。我々は一般的な主張を検討したい場合、具体的な1例を取り上げて、一般的な主張がちょうどこの具体的な1例に対して真であるか否かを調べるのである。特殊化(Specialization)は一般化(Generalizaion)と移行方向が逆方向であるが、相互に関連し合

った重要な概念である。授業で大学の入試問題などの解法を教授していくときの重要な概念でもある。この概念を活用していくと、生徒に深い理解と納得をもたらすことができる。

特殊化という概念を活用して問題解決していく授業を構成していくということは、教室における集団学習において受験学力の根っこの部分を太く培うことである。そのことは、教室という集団の力で個々の学力も向上していくということである。つまり、教室における多様な考えの比較検討や集団の学ぶ雰囲気の醸成などが個々の生徒の真の学力向上をもたらすと考えている。ここからは特殊化の考えを活用した問題解決の実践事例を提示していく。

ここでは「比較」を絡めながら「特殊化」の有効性を生かした証明問題の事例を提示していくことにする。単元は「数学A　背理法」と「数学B　数学的帰納法」である。背理法の問題と数学的帰納法の問題を並列に配置することによって、2つ証明法の比較を意識しながら2者の違いや良さ感得していこうと意図した。指導目標は「比較を絡めた特殊化という数学的活動を通して背理法や数学的帰納法の活用について学ぶ。」である。

T 「問題を提示する。」

問題　　D君『$x_n=5^n+nx+y$において（nは任意の自然数、xとyは16以下の自然数）x_nが16の倍数となる自然数xとyはある。』 E子さん『平面上に相異なる2n個の点が存在し、どの3点も一直線上にない。この2nの点をn個ずつ2つの集合PとQに分ける。Pの点とQの点によってn組のペアを作り線分で結ぶ。このとき、どの2つの線分も交わらないようにn組のペアを作ることはできない。』 D君、E子さんの各主張は正しいか。

T 「2人の主張は正しいだろうか。」

S1「D君の主張から調べていこうと思います。」

S2「全てのnに対してx_nが16の倍数となるためのxとyの条件を考えることは困難です。」

T 「特別なnの値の場合について考えていき、xとyの条件を探っていったらどうだろうか。」

S3「まず、n＝1のときを考えてみます。このとき$x_1=5^1+1\times x+y$となります。」

S4「n＝2のときを考えてみます。このとき$x_2=5^2+2\times x+y$　つまり、$x_2=25+2x+y$となります。」

T 「$x_1=5+x+y$と$x_2=25+2x+y$の2つの式からxとyの値が搾り出せないか。」

S5「x_1とx_2を16の倍数としたらx_2-x_1も16の倍数です。よって$x_2-x_1=x+20$も16の倍数です。$1\leqq x\leqq 16$より$21\leqq x+20\leqq 36$ゆえに$x+20=32$より$x=12$です。」

T 「yはどのようにして求めるのか。」

S6「$x_1=5+12+y=17+y$と$1\leqq y\leqq 16$より$18\leqq 17+y\leqq 33$であり、$17+y=32$である。よって$y=15$となります。」

S7「以上から$x_n=5^n+12n+15$となります。」

S8「$n=1$のとき$x_1=5^1+12\times 1+15=32$となり、x_nは16の倍数です。」

S9「任意の自然数nに対して$x_n=5^n+12n+15$が16の倍数となりそうです。」

（予想する。）

T 「あとはすべての自然数nに対してx_nが16の倍数となることを示したい。」

S10「数学的帰納法で証明できそうです。」

（課題1をつかむ。）

S11「$n=k$のとき$x_k=5^k+12k+15$を16の倍数と仮定します。$n=k+1$のとき$x_{k+1}=5^{k+1}+12(k+1)+15=5(5^k+12k+15)-48k-48=5x_k-16\times 3(n+1)$よって$x_{k+1}$も16の倍数である。以上より、任意の自然数に対して、$x_n=5^n+12n+15$は16の倍数です。」

（課題1が解決した。）

T 「D君の主張は正しかったわけだ。次にE子さんの主張について調べていこう。」

S12「帰納的に$n=1$の場合、2の場合と考えてもうまくいきそうもありません。」

T 「このような問題では、一般数nのままで特別な場合、つまり極端な場合に条件が達成できるのだろうかと予想を付けてみよう。」

S11「n本の線分の距離の和が最小の場合に問題の条件が達成されそうだと予想できます。」

（予想する。）

T 「ペアの作り方はn!通りと有限なので、距離

の和が最小となる場合は存在する。」

S12「あとは交わると仮定して背理法で調べることができそうです。」

（課題２をつかむ。）

S13「点A_1，A_2，B_1，B_2　$P=\{A_1, A_2\}$　$Q=\{B_1, B_2\}$とします。線分A_1B_1と線分A_2B_2が交点Cで交わるとします。」

T「このとき、線分A_1B_1と線分A_2B_2を線分A_1B_2と線分A_2B_1に置き換えると、もとのペアが線分の距離の和が最小という仮定に反することになる。なぜだろうか。図を書いて考えよう。」

S14「$A_1B_1+A_2B_2=(A_1C+CB_1)+(A_2C+CB_2)=(A_1C+CB_2)+(A_2C+CB_1)>A_1B_2+A_2B_1$となるからです。」

S15「以上から、距離の和が最小のペアを構成するn本の線分は交点をもたないことが分かりました。E子さんの主張は間違いでした。」

（課題２が解決した。）

T「振り返ってみて大切なことは何か。」

S15「数値を具体的に代入して予想することが大切でした。」

S16「問題によって、数学的帰納法が有効な場合と、背理法が有効な場合があることが分かりました。」

　ここでも「特殊化」を生かした証明問題の事例を提示していく。単元は「数学B　数学的帰納法」である。指導目標は「特殊化という数学的活動を通して数学的帰納法の活用について学ぶ。」である。

T「問題を提示します。」

問題　『nは任意の自然数、$(2-\sqrt{3})^n$ の形の数に対して次のように予想した。』
A君「いずれも、各々適当な自然数xに対して$\sqrt{x-1}-\sqrt{x}$という形の数をもつだろう。」
Bさん「いずれも、各々適当な自然数xに対して$\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$という形の数をもつだろう。」
２人のどちらかの予想は本当に正しいか。

T「本当にどちらかが正しいのだろうか。」

S1「特別なnの値の場合について考えていき、X－1やXについて考察していきます。」

T「n＝1，2，3のときを調べてみます。」

S2「n＝1のとき$(2-\sqrt{3})^1=2-\sqrt{3}=\sqrt{4}-\sqrt{3}$　n＝2のとき$(2-\sqrt{3})^2=7-4\sqrt{3}=\sqrt{49}-\sqrt{48}$　n＝3のとき$(2-\sqrt{3})^3=26-15\sqrt{3}=\sqrt{676}-\sqrt{675}$となります。」

S3「Bさんが正しそうです。」

（予想する。）

S4「nは任意の自然数に対して$(2-\sqrt{3})^n$ の形の数は、いずれも各々適当な自然数xに対して$\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$という形の数をもつことを、どのように証明したらよいのでしょうか。」

（課題をつかむ。）

T「$(2-\sqrt{3})^n=a_n-b_n\sqrt{3}$　（a_n，b_nは正の整数）…①　の形に表して　$(2-\sqrt{3})^n=(a_n{}^2)^{1/2}-(b_n{}^2)^{1/2}\sqrt{3}$…②と変形する。それでは、まず①を満足する正の整数a_n，b_nが存在することの証明を考えてみよう。」

S5「n＝kのとき①が成り立つと仮定します。$(2-\sqrt{3})^k=a_k-b_k\sqrt{3}$…③とおきます。次にn＝k＋1のとき、$(2-\sqrt{3})^{k+1}=(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^k=(2-\sqrt{3})(a_k-b_k\sqrt{3})=(2a_k+3b_k)+(a_k+2b_k)\sqrt{3}$となります。ここで、数列　$\{a_n\}$，$\{b_n\}$を$a_1=2$，$b_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+3b_n$，$b_{n+1}=a_n+2b_n$…③と定義すれば、すべての正の整数nに対して①が成り立つことになります。また、このとき③の形から、すべての正の整数nに対してa_n，b_nは正の整数となります。」

T「次に①を②に変形した時に$\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$の形、つまりX－(X－1)=1となる。つまり、$a_n{}^2-3b_n{}^2=1$……④を証明したい。」

S6「数学的帰納法で証明できそうです。」

S7「n=1 のとき$a_1{}^2-3b_1{}^2=2^2-3\times1^2=1$となります。次にn＝kのとき、④が成り立つと仮定します。$a_k{}^2-3b_k{}^2=1$…⑤　次にn＝k＋1の時、③から$a_{k+1}{}^2-3b_{k+1}{}^2=(2a_k+3b_k)^2-3(a_k+2b_k)^2=a_k{}^2-3b_k{}^2=1$となりますのでn＝k＋1のときも④が成り立ち、証明も終わりました。」

（課題が解決した。）

T「以上で$\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$という形をもつ証明ができました。」

S8「Bさんが正しいことが分かりました。」

（問題が解決した。）

次でも「特殊化」を生かした証明問題の事例を提示していく。単元は「数学B数学的帰納法」で、指導目標は「特殊化という数学的活動を通して帰納法の活用について学ぶ。」である。

T「問題を提示します。」

> 問題『数列$\{x_n\}$が次のように定義されている。
> $x_1=0$，$k=1,2,3,\cdots$とする。
> $n=2k$のとき、$x_n=x_k+1$
> $n=2k+1$のとき、$x_n=x_k+2$』
> $n=2,3,4,\cdots$のとき２人は次のように予想した。
> A君「$x_n>2\log_2 n-1$が成り立つ。」
> Bさん「$x_n\leqq 2\log_2 n-1$が成り立つ。」
> ２人のどちらかの予想は本当に正しいか。

T 「本当にどちらかが正しいのだろうか。」

S1「初めの数項を具体的に求めてみます。」

（予想する。）

S2「$x_2=x_1+1=1$，$x_3=x_2+2=2$，
$x_4=x_2+1=2$，$x_5=x_2+2=3$，
$x_6=x_3+1=3$，$x_7=x_3+2=4$，
$x_8=x_4+1=3$，$x_9=x_4+2=4$，
$x_{10}=x_5+1=4$，$x_{11}=x_5+2=5$，
………となります。」

S3「一般項が予想できません。」

T 「一般項を求める必要があるのだろか。」

S4「$n=2$のとき、x_nと$2\log_2 n-1$の関係を調べてみます。」

（課題１をつかむ。）

S5「$x_2=x_1+1=1$，$2\log_2 2-1=2-1=1$となり$x_n=2\log_2 n-1$が成り立ちます。$n=3$のときも調べた方がよいと思います。」

（課題１解決、課題２をつかむ。）

S6「$x_3=x_2+2=2$，$2\log_2 3-1=2\log_2 3-\log_2 2=\log_2 9/2>\log_2 8/2=\log_2 4=2=x_3$，よって$n=3$のとき$x_n<2\log_2 n-1$が成り立ちます。」

（課題２が解決）

T「確かに$n=2$，３のとき$x_n\leqq 2\log_2 n-1$が成り立ちます。$n=2$，３，４，５，……で$x_n\leqq 2\log_2 n-1$が成り立つことをどのように調べますか。」

S7「数学的帰納法で証明できそうです。」

S8「nのときの成立を仮定して$n+1$のときも成り立つことを示すという普通の数学的帰納法ではうまくいかないようです。」

（課題３をつかむ。）

T「x_{n+1}はx_nから決まるのではなく、もっと前の項から決まっていますね。」

S10「例えばx_{10}はx_9からではなくx_5から決まっています。」

T「$n+1$のときの成立を示すのに、その直前のnのときの成立を仮定するだけでは不十分ですから、n以前のときの成立をすべて仮定して考えてみるとどのようになりますか。」

S11「$n\geqq 3$として、$m=2$，３，……，nに対して、$x_m\leqq 2\log_2 m-1$……①が成り立つと仮定します。」

S12「$n+1\geqq 4$ですから、$n+1$が偶数か奇数かに応じて考えるので、$n+1=2m$のときと$n+1=2m+1$のときに分けて調べます。このとき$2\leqq m\leqq n$となり①が使えます。」

S13「$n+1=2m$のとき
$$x_{n+1}=x_m+1\leqq 2\log_2 m-1+1$$
$$=2\log_2 m<2\log_2(n+1)/2$$
$$=2\{\log_2(n+1)-1\}$$
$$=2\log_2(n+1)-2<2\log_2(n+1)-1$$」

S14「$n+1=2m+1$のとき
$$x_{n+1}=x_m+2\leqq 2\log_2 m-1+2$$
$$=2\log_2 n/2+1=2(\log_2 n-1)+1$$
$$=2(\log_2 n-1)-1<2\log_2(n+1)-1$$」

S15「以上で$n+1$のときも①が成り立つことが分かりました。」

S16「$n=2,3,4,\cdots$のとき$x_n\leqq 2\log_2 n-1$が成り立つ証明が完成しました。」

（課題３が解決）

T 「以上で$x_n\leqq 2\log_2 n-1$が成り立つことが分かりましたね。」

S17「A君の予想が間違いで、Bさんの予想が正しいことが分かりました。」

（問題が解決した。）

T 「以上を振り返って大切なことは何か。」

S17「数値を代入して具体的に調べてみることが大切です。」

S18「一般項を予想してから数学的帰納法で証明する場合がありましたが、ここでは必ずしも

一般項を求める必要がないことも分りました。」

S19「普通はnのときのみの成立を仮定してn＋1のときも成り立つことを示すという数学的帰納法でうまく証明できる場合が多いのですが、ここではnまでの成立を仮定することが大切であることが分りました。」

S20「今後問題によって、nまでの成立を仮定してn＋1のときも成り立つことを示す数学的帰納法も考えていくようにします。」

以上のような「一般化」や「特殊化」も数学的活動の一種である。この数学的活動を2つに分けて考えることができる。つまり「数学的活動」については、観察,操作,実験などの外的活動と、直観,類推,帰納,演繹などの内的活動が考えられる。ここでの「一般化」や「特殊化」は、内的な数学的活動と考えることもできる。また、「比較」も内的な数学的活動としても捉えることができる。「比較」を絡めた「一般化」「特殊化」という活動を通して論理的思考力、想像力及び直観力などの創造性の基礎を培うものと考えられる。次では、内的活動である「類推」について考察する。

3．「類推 (Analogical Inference)」による問題解決

推論は推理ともいい、既知の命題から結論の命題を導き出すことをいう。推論はふつう演繹的推論、帰納的推論、類比的推論の3つに大別される。演繹的推論は、既知の命題から論理的に正しい方法で結論の命題を導くから、結論の命題の正しさを検証する方法と言われる。これに対して帰納的推論と類比的推論は、結論の命題を発見する方法と言われる。類比的推論のことを簡単に類比、類推とも呼ぶことがある。

類比的推論 (Analogical Inference) とは、2つのことがらの類似性に注目し、一方で成り立つ性質を他方の事柄についても成り立つとする推論である。例えば P(x)が既知であって、tがxに類似しているとき、P(t)が成り立つと推論する。具体的には、1次式(ax＋b)＋(cx＋d)の計算を知っているとき、平方根の計算$(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})+(4\sqrt{3}+5\sqrt{2})$や複素数の計算(2+3i)+(4+5i)を1次式と同じように計算できると推論する。次では「類推」を生かした問題解決の事例を提示していく。

ここでの単元は「数学B　数列　漸化式」で、指導目標は「比較を絡めて類推という数学的活動を通して漸化式の活用について学ぶ。」である。

T「問題を提示します。」

問題　A、B、Cの各予想は以下の通りである。
A君「直線に重なることなく順にn個の点を置くと、直線はn＋1個の部分に分けられる。」
B君「平面内に、いずれの3直線も1つの三角形を決定するように順に直線を置いていくべ。n本の直線を置いた時、平面は$(n^2+n+4)/2$の部分に分けられるはずだべ。」
Cさん「空間内にいずれの4平面も1つの四面体を決定するように順に平面を置いていきます。n個の平面を置いた時、空間は$(n+1)(n^2-n+6)/6$の部分に分けらるはずですわ。」
n≧1とする。3人の予想は正しいか。

T「正しい予想はあるだろうか。」

S1「A君の予想について図を書いて調べます。n＝1の時は2個の部分に分けられます。同様に考えてn＝2の時は3個、n＝3の時は4個、n＝4の時は5個、……、n個の点を置くと直線はn＋1個の部分に分けられるようです。」

S2「B君の予想についても図を書いて調べます。n＝1の時は2個の部分に分けられます。同様に考えてn＝2の時は4個、n＝3の時は7個、n＝4の時は11個の部分に分けられます。n＝4を$(n^2+n+4)/2$の式に代入して計算すると$(4^2+4+4)/2=24/2=12$となり正しくないようです。」

S3「Cさんの予想についても調べてみます。xy平面、yz平面、zx平面を想像します。n＝1の時は2個の部分に分けられます。同様に考えてn＝2の時は4個、n＝3の時は8個の部分に分けられます。n＝3を$(n+1)(n^2-n+6)/6$の式に代入すると$4\times(4^2-4+6)\div 6=4\times 18\div 6=12$となり、成り立ちそうです。」

（生徒が予想する場面）

T「Cさんの予想などは本当に正しいか。」

S4「A君の予想は正しいです。Cさんも正しい

ようですが、分かりません。B君の予想は間違いのようです。」

S5「B君の予想の正しい式はどうなるのでしょうか。Cさんの式には疑問が残ります。」

S6「Cさんの式が本当に正しいかどうか、さらに調べていきたいです。」

(生徒が課題をつかむ場面)

T 「A君の場合についてn＝1，2，…の時、分けられる部分の個数を$a_1=2$，$a_2=3$，…。B君の場合についてn＝1，2，…の時、$b_1=2$，$b_2=4$，…。Cさんの場合についてn＝1，2…の時、$c_1=2$，$c_2=4$，…とおいて考えてみよう。表にするとどうなる。」

S7「表にすると次のようになるようです。」

n	1	2	3	4
a_n	2	3	4	5
b_n	2	4	7	11
c_n	2	4	8	15

S8「表を観て気づきました。数列$\{c_n\}$の階差数列が$\{b_n\}$で、数列$\{b_n\}$の階差数列が$\{a_n\}$であることが見出されます。」

T 「明らかに$a_n=n+1$は成立する。階差数列で与えられた漸化式の一般項を求める知識を利用するとb_nが、さらにc_nが求められるという見通しが得られる。b_nやc_nについてもう少しきちんと推論を行うことにしよう。」

S9「n本の直線が平面上におかれているとして、新たに(n＋1)本目の直線mを引きます。するとmは、すでに置かれている直線とn個の点で交わり、これらの交点によってmは、$a_n=n+1$個の部分に分けられます。このa_n個の部分が新しい境界となり平面の部分の数は、以前よりa_n個増えるので、$b_{n+1}=b_n+a_n$……①が成立します。」

S10「①より漸化式は$b_{n+1}-b_n=n+1$だから一般項を求めていきます。$n\geqq 2$のとき$b_n=b_1+\Sigma(k+1)=2+(n-1)(n+2)/2=(n^2+n+2)/2$(ただし、Σはk＝1からn－1までの和を表す。)これはn＝1のときも成立します。」

S11「n個の平面が空間内に置かれているとします。新たに(n＋1)個目の平面mを置いたとします。すると平面mは、すでに置かれているn個の平面とn本の交線で交わります。すなわち、平面m上にn本の交線が引かれることになります。そこで、これらの交線によって、平面mはb_n個の部分に分けられることとなります。例えば、平面mが5個目の平面とすると、既に置かれている4個の平面によって平面m上には4本の交線が引かれることとなります。そこで平面mは、これら4本の交線によって$b_4=11$個の部分に分けられることとなります。」

T 「一般的にいうとどういうことか。」

S12「b_n個の平面部分が新しい境界となり空間の部分の数は、以前よりb_n個だけ増すことが、数列$\{b_n\}$の漸化式$b_{n+1}-b_n=n+1$を導いた時と同様に考えることができます。そこで、$c_{n+1}=c_n+b_n$……②が成立します。」

T「②より数列$\{c_n\}$の一般項を求めてみよう。」

S13「②により$c_{n+1}-c_n=(n^2+n+2)/2$です。あとはb_nを求めた時と同様に考えて求めます。$n\geqq 2$のとき、$c_n=c_1+\Sigma(k^2+k+2)/2=2+\{n(n-1)(2n-1)/6+n(n-1)/2+2(n-1)\}=(n+1)(n^2-n+6)/6$ (ただし、Σはk＝1からn－1までの和を表す。) これはn＝1のときも成立します。」

(課題が解決した。)

T 「以上で分かったことは何か。」

S14「A君とCさんの予想は正しいことが分かりました。B君の予想は間違いでした。」

(問題が解決した。)

T 「今まで考えたことを振り返って、大切のことは何か。」

S15「A君、B君、Cさんの予想を比べて考えていくと、類似しているところがあります。比較しながら類似している箇所を足場にして推理していくことが大切です。」

S16「2つの事柄を比較しながら、2者の類似性

に注目していくことが大切です。一方で成り立つ性質を他方の事柄についても成り立つだろうと推論することが課題を解決していく上で重要な考えであることが分かりました。」

以上の事例について、簡便に質的な考察をしていく。比較を絡めた類推（Analogical Inference）によって、AやBを考えることによりCに対する洞察が得られた。つまり、比較することによって２つの事柄の類似性に注目でき、一方で成り立つ性質を他方の事柄についても成り立つだろうと推論することができた。すなわち、平面における漸化式①の成立過程への「類推」によって、空間における漸化式②が成立することを考えることができた。このように、空間の問題に対して、平面において「類推」することには本来の課題解決への見通しを得る手助けになることが多い。生徒もこのような学習を通して、問題解決上「類推」が重要な数学的活動であることを感得していった。

ところで、新学習指導要領でも「数学的活動」が一層重視されている。新学習指導要領を確認すると以下の通りである。(文部科学省,2009)

「数学的活動を通して、数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め、事象を数学的に考察し表現する能力を高め、創造性の基礎を培うとともに、数学のよさを認識し、それらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる。」（下線が変更部分）

これらの言葉は、学習においては学習者自らが主体的に活動すること、数学の学習においては、生徒たち自らが数学をする（数学する，数学をつくる）ことの重要性を指摘したものである。また、学習指導者自身の重要な指導目標でもある。今後も諸先生方のご助言やご指導をいただきながら実践と研究を積み重ねていきたい。

最後に、アメリカの数学者ハルモス教授(Halmos, P．R)の数学の学習について示唆に富む名言を記述して本稿を閉じることにする。

『 The best way to learn mathematics is to do mathematics, and the worst way to theach mathematics is to talk. 』

引用・参考文献

文科省(2009)，高校学習指導要領解説　数学編

菅野(2007),「高等学校における発展的な問題作りの授業」,『日本数学教育学会誌』,89(7),2-9

鈴木聡美(2007)，「知的葛藤を生かす高校数学の授業」,『日本数学教育学会誌』,89(7),10-15

長崎栄三(2004),高校新数学科の在り方,明治図書

長崎(2001),数学と社会文化のつながり,明治図書

相馬一彦(2000)，「問題解決の授業」に生きる「問題」集，明治図書，13－30.

相馬一彦(1997)，問題解決の授業，明治図書.

能田伸彦(1983)，オープンアプローチによる指導の研究，東洋館出版社

中原忠男(1995)，算数数学教育における構成的アプローチの研究，聖文社

ポリア(1986),いかにして問題をとくか，丸善株式会社

ポリア(1986)，帰納と類比，丸善株式会社

ポリア(1981)，発見的推論，丸善株式会社

ポリア(1970),数学の問題の発見的解き方１,みすず書房

ポリア(1971)，数学の問題の発見的解き方２,みすず書房

塚原成夫(2000)，数学的思考の構造,現代数学社

志賀(2000),教えるヒント学ぶヒント１,日本評論社

上田薫(1986)，人間の生きている授業,黎明書房

中田基照(1993)，授業の現象学，東京出版会

レイブ(1993),状況に埋め込まれた学習,産業図書

ブルーナ(1986)，教育の過程，岩波書店

中村雄二郎(1992)，臨床の知とは何か,岩波書店

西林克彦(1994)，間違いだらけの学習論,新曜社

志村五郎(2010),数学をいかに使うか，筑摩書房

佐竹武文(2010),生活に役立つ高校数学，日本文芸社

日本数学教育学会(1998)，学校数学の授業構成を問う，産業図書

日本数学教育学会編(2000)，和英/英和算数数学活用辞典，東洋館出版社

日本数学教育学会編(2010)，数学教育学研究ハンドブック，東洋館出版社

謝辞

本稿は、諸先生方との教職活動の中でいただいたご助言やご指導と、諸研究会で得た知見等を基にして完成しました。本稿が数学教育の更なる進化発展に貢献できることをお祈りします。