平成２４年８月４日（土）

北海道算数数学教育研究会

第８２回数学教育実践研究会

研究発表論文

北海道札幌手稲高等学校
工　藤　寛　之

実践論文

論題　「二軸過程モデル」を生かした学習指導の提案

実践論文

「2軸過程モデル」を生かした学習指導の提案

北海道札幌手稲高等学校　工藤　寛之

要　約

本稿では、「2軸過程モデル」（小山，2006）の実証的理論を用いて、生徒の数学的理解の過程に焦点化する。そして、数学教育における「記述的特性」と「規範的特性」について実践的研究を行うものである。「記述的特性」とは、生徒の数学の理解にはどのような種類があるかを記述したり、理解という内面的な現象がどのように起こっているかを記述することである。「規範的特性」とは、生徒に数学を理解させるにはどのような状況を設定すればよいか、また、理解をどのような方向に深化させればよいかなど、教授学的原理を示唆し得る特性を示すものである。以上のように、数学教育においては、生徒の理解の様相や過程の実態を把握するだけでは十分ではない。なぜならば、数学教育というものは、本来、教師が教えるという活動と生徒が学ぶという活動の２つ、教授活動と学習活動から成立するものであると考えられるからである。したがって、数学の理解のモデルが、「教授＝学習活動」としての数学教育において真に有効なものであるためには、記述的特性だけでなく規範的特性をも備えていなければならない。そこで筆者は、このような特性を備えた「２軸理解モデル」の実証的理論を用いて、生徒の理解の様相を顕在化させ、生徒の理解の深化発展を図れる授業構成を実証的に提案していく。また本稿が、新学習指導要領の課題である「体系的理解」「表現能力」「数学のよさの認識」「数学的論拠に基づいて判断する態度」「創造性」などを培う上でも有効である。しかも本稿の提案は、主体的な学習と受験学力の一層の向上と躍進にもつながる。さらに、生徒が生涯に渡って数学を生活に役立て生涯学び続けていく楽しさも感得できると考えている。

キーワード：2軸過程モデル　理解水準　学習段階　記述的・規範的特性　学力向上　受験学力

1．研究の目的と方法

新学習指導要領の課題である「体系的理解」「表現能力」「数学のよさの認識」「数学的論拠に基づいて判断する態度」等を培うためにも「２軸過程モデル」（小山,2006）に着眼した学習指導の改善の必要性がある。このような数学教育の課題を解決実現するためにも本研究の目的を次の２点とする。

① 学習指導に「2軸過程モデル」の理論を生かして生徒の理解の様相を顕在化させる。そして、理解の水準を上げる方策も提案する。

② 「2軸過程モデル」の規範的特性に基づく授業構成を実践検証し、生徒の確かな学力の向上と受験学力形成の学習指導を提案する。

筆者は、教育現場において日々授業実践をしており、質的な資料（自由な観察・面接・会話、生徒のノートや授業記録ノートの記述など）を収集しやすい立場にいる。これらの資料を基にして、質的な分析と考察(平山,1997)を加えることにより有益な知見を導出していく。また、実践資料については主として事例研究法とプロトコル分析法を用いて実践的研究を行う。そして、文献研究(小山,2010）や授業実践などから「2軸過程モデル」の実証的理論を生かした学習指導について具体的に提案していきたい。また、生徒の理解の現在化と理解の深化発展を図れる問題と学習指導の工夫についても、文献研究や授業実践などから明らかにしていく。

２．数学的理解の「２軸過程モデル」

ここでは、「２軸過程モデル」（小山,2006)について概観していく。本稿では数学的理解の概念規定を行い、数学的理解のモデル化の理論が必要である。理解するということは生徒の内面的な複雑活動であるから、それをとらえるためにはこの内面的で直接見ることができない理解という現象を何らかの方法によって顕在化させることが必要である。しかしながら、いかなる方法によっても理解を直接とらえることはほとんど不可能である。そこで、理解の構造や機能を間接的にとらえるための理論的・解釈的枠組みとしてのモデルの理論が必要である。このような理論は、生徒の数学的理解を解明するために必要不可欠である。本稿ではこのような理論を「２軸過程モデル」に求めた。「2 軸過程モデル」における数学的理解の過程モデルの必要不可欠な構成要素として、次の２つのまとまりをもつ構成要素（BC1）と（BC2）を帰納的に抽出させている。これらの２つの構成要素を明確に区別し、相互に関連づけることによって数学的理解の過程をとらえることができる。

(BC1) 数学的思考の対象（数学的対象―対象間の関係―関係の一般性）

(BC2) 数学的思考の質（直感的思考―反省的思考―分析的思考）

数学的理解の過程モデルが教授学習活動としての数学教育において真に有効であるためには何が必要か。それは、生徒の数学の理解にはどのような種類があるかを記述したり、理解という内面的な現象がどのように起こっているかを記述する「記述的特性」だけでは十分ではない。この特性に加えて、生徒に数学を理解させるにはどのような状況を設定すればよいか、また、理解をどのような方向に深化させればよいかなど、教授学的原理を示唆し得る特性を示す「規範的特性」を備えていなければならない。「2 軸過程モデル」はこのような２つの特性を備え持つものである。

数学的理解の過程モデルにとって必要不可欠な２つの構成要素には「数学的思考の対象」と「数学的思考の質」があった。それぞれに対応して、①「数学的理解とはどのような水準に沿って深化するか。」②「ある水準においてどのように数学的思考が展開するか。」という２つの問いについて次のように考察している。問①については、1 単元や数時間の数学科授業における生徒の数学的理解の過程モデルに、数学的思考の対象（数学的対象―対象間の関係―関係の一般性）をひとまとめとする階層的水準を組み込んでいる。問②については、直感的段階、反省的段階、分析的段階の大きく３つに分け、各段階における数学的思考の質を規定している。

以上のことを踏まえて、生徒の数学的理解の深化する過程をとらえたり深化を促進したりするための１つの理論的枠組みとして、次のように構築している。数学的理解の階層的水準と各々の水準における学習段階をそれぞれ「縦軸」と「横軸」にもつ数学的理解の「２軸過程モデル」を構築している。「縦軸」には「数学的思考の対象（数学的対象―対象間の関係―関係の一般性）」を視点として、次のような３つの水準をひとまとめとする「階層的水準」を設定している。

(V1) 数学的概念や性質、原理・法則などの数学的対象の理解

(V2) それら数学的対象間の関係の理解

(V3) その数学的関係の一般性の理解

他方、この２軸過程モデルの「横軸」には、「数学的思考の質（直感的思考―反省的思考―分析的思考」を視点として、以下のような（H1）直感的段階（H2）反省的段階（H3）分析的段階の３つの段階をひとまとまりとする「学習段階」を設定している。必ずしも直線的にではないが、このような一連の学習段階を経て、数学的理解はある水準から次の水準へと上昇しうる、すなわち数学的理解が深化しうると考えられている。

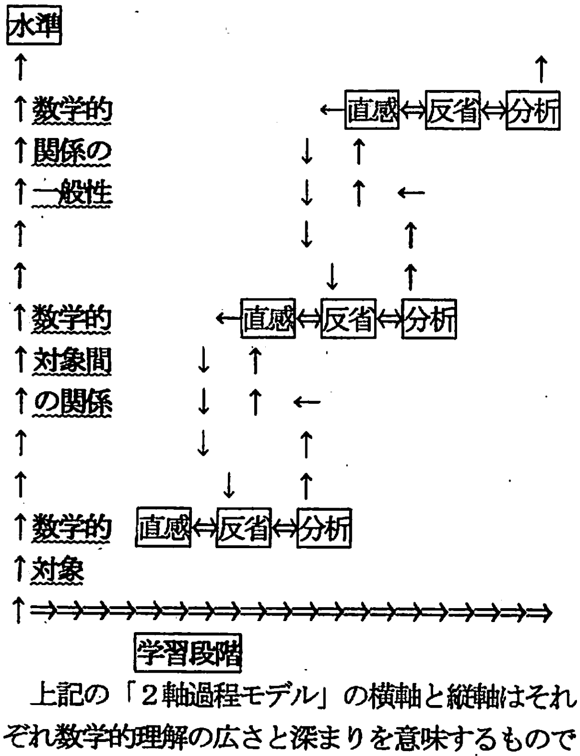
(H1) 直感的段階とは、学習者である生徒が具体的物あるいは概念や性質などの数学的対象を操作する「直感的思考」を働かせる段階である。

(H2) 反省的段階とは、学習者である生徒が自らの活動や操作に注意を向け、それらやその結果を意識化して、図や言葉などによって表現することを目的とする「反省的思考」を働かせる段階である。

(H3) 分析的段階とは、学習者である生徒が表現したものをより洗練して数学的に表現したり、他の例で確かめたり、それらのつながりを分析したりすることによって、統合を図ることを目的とする「分析的思考」を働かせる段階である。

こうした数学的理解の「2軸過程モデル」のイメージを図に表すと図1のようになる。基本的には、縦軸「(V1) 数学的対象の理解 (V2) 数学的対象間の関係の理解 (V3) 数学的関係の一般性の理解」の3つの水準をひとまとまりとする階層的水準は、数学科のおよそ1単元に対応するものととらえることもできる。そして、各水準における横軸の「(H1) 直感的段階、(H2) 反省的段階、(H3) 分析的段階」の3つの段階をひとまとまりとする学習段階は、1～3時間程度の授業に適用することもできる。

図1



上記の「2軸過程モデル」の横軸と縦軸はそれぞれ数学的理解の広さと深まりを意味するものである。以上より階層的水準と学習段階を2軸として設定する必要性があることは明らかである。また、この2軸過程モデルを数学科授業に適用するためには、その他の社会・文化的認識論や文化人類学的認識論に基づくアプローチによる研究によってそれを補完する必要もある。

3．「2軸過程モデル」の記述的・規範的特性

数学的理解の2軸過程モデルの「記述的特性」についての実践的研究として、後ほどの事例研究で行う。実際に生徒の数学的理解の過程は、2軸過程モデルの階層的水準（縦軸）と学習段階（横軸）を用いて記述することができる。数学的理解の2軸過程モデルが「記述的特性」を備えているということを後ほど実践事例で例証していくことにする。次に数学教育における数学的理解の2軸過程モデルの「規範的特性」についての要点を概観していく。図2のような、数学的理解の2軸過程モデルに基づく授業構成の3つの原理と3つの方法が導出されている(小山,2006)。

図2

《数学科授業構成の3つの原理》

P1：数学的理解を、全か無かというような二者択一的にではなく、複雑な力動的過程としてとらえること。[複雑な力動的過程としての理解過程]

P2：数学的理解の深化を促進するために、理解の階層的水準と学習段階の2軸を設定すること。[理解の階層的水準と学習段階の設定]

P3：教室で行われる数学の教授学習活動としての授業においては、個々の生徒の個人的構成と生徒たちや教師との社会的構成の両方の活動を重視すること。[個人的構成と社会的構成の重視]

《数学科授業構成の3つの方法》

M1：数学科の授業で生徒が学習する内容について、数学科の学習指導要領などのカリキュラムを分析することにより、数学的理解の階層的水準を明らかにすること。[理解の階層的水準の明確化]

M2：数学科の授業で学習する内容に対する生徒の理解の程度について、学習内容に応じた事前調査や診断的評価、形成的評価などを行うことによって、その実態を把握すること。[理解の程度の実態的把握]

M3：数学的理解の階層的水準と生徒の理解の程度の実態把握を基にして、数学科の授業で生徒が学習する内容についての教材研究を行い、3つの学習段階を具体化し、個々の生徒の個人的構成と生徒たちと教師との社会的構成の両方の活動を位置づけること。[理解の学習段階の具体化]

そして、これらの原理と方法を活用して、数学

科における授業構成を具体化していく。具体的事例として、高校3学年の単元「数学Ⅲ　積分法　直線の回りの回転体の体積」の授業構成例を示し、数学科授業改善の方向性を提案していく。これらの改善案によって生徒の数学的理解がさらに深化するかどうかについては今後の実践的研究の積み重ねによって検証しなければならない。しかし、こうした事例研究によって2軸過程モデルが数学教育において規範的特性を備えていることを例証したことになる。

4．数学理解の「2軸過程モデル」の実証的検討

(1) 数学理解の階層的水準（数学的対象）

ここでの数学的対象は、積分法による回転体の体積である。この階層的水準において3つ学習段階（直感的段階、反省的段階、分析的段階）を経て数学理解が深化していく事例を提示する。単元は「数学Ⅲ積分法と回転体の体積」で、指導目標は「数学的活動を通して回転体の体積について学ぶ。」である。

> 問題1　放物線 $f(x)=x^2-2x$ と直線 $y=x/2$ がある。放物線 $y=f(x)$ と直線 $y=x/2$ の原点O以外の交点をAとする。OからAにおける放物線 $y=f(x)$ 上の点を $P(x, x^2-2x)$、Pから直線 $y=x/2$ に下ろした垂線の足をQ、Pのx座標と同じ直線 $y=x/2$ 上の点をRとする。次に、この放物線と直線とで囲まれた部分 S_1 を、この直線を軸として1回転して得られる立体の体積 V_1 とする。
>
> (1) $V_1=\int_0^{5/2}\pi PR^2dx$
>
> (2) $V_1=\int_0^{5/2}\pi PQ^2dx$
>
> (3) $V_1=\int_0^{5\sqrt{5}/4}\pi PQ^2dx$
>
> (1)～(3)の中に体積 V_1 を求められる式はあるのだろうか。

T「体積 V_1 を求める正しい式はあるだろうか。」

S1「グラフを書いて考えます。S_1 において上方が直線 $y=x/2$ で下方が放物線 $f(x)=x^2-2x$ だから $PR=x/2-(x^2-2x)=5x/2-x^2$ より体積 V_1 は、(1)の式を用いて求められます。」

> $(1)V_1=\int_0^{5/2}\pi PR^2dx=\pi\int_0^{5/2}(5X/2-X^2)^2dx=\pi[25X^3/12-5X^4/4+X^5/5]_0^{5/2}=625\pi/192$

T「(1)の式に疑問はないのですか。」

S2「回転体の体積を求めるときは、まず回転軸に垂直に切った切り口の面積を求めることだと思います。(1)は $PR=x/2-(x^2-2x)$ を切り口の半径としていますが、これでは $y=5x/2-x^2$ とx軸とで囲まれた部分を、x軸の回りに回転してできる回転体になってしまうようです。直線 $y=x/2$ とx軸の正の部分とのなす角を θ とすると $\tan\theta=1/2$、$\cos\theta=2/\sqrt{5}$ だから回転軸 $y=x/2$ に垂直に切った切り口円の半径は $PQ=2/\sqrt{5}\ PR=2/\sqrt{5}(5x/2-x^2)$ です。(2)の式で回転体の体積 V_1 を次のように求めます。」

> $(2)V_1=\int_0^{5/2}\pi PQ^2dx=\pi\int_0^{5/2}(2/\sqrt{5}\,PR)^2dx$
>
> $=\pi\int_0^{5/2}\{2/\sqrt{5}(5x/2-x^2)\}^2dx$
>
> $=\pi\int_0^{5/2}(5X^2-4x^3+4x^4/5)dx$
>
> $=\pi[5x^3/3-x^4+4x^5/25]_0^{5/2}=125\pi/48$

T「(2)の式に疑問はないのですか。」

S3「(2)の切り口の面積 $\pi PQ^2=\pi(2/\sqrt{5}\,PR)^2=\pi\{2/\sqrt{5}(5x/2-x^2)\}^2$ はそれで正しいと思いますが、もう一つ大事なことがあります。それは回転軸に沿って積分することだと思います。(2)ではX軸に沿って0から5／2まで積分したことになっています。回転軸に沿ってOからAまで積分しなければならないと思います。$OA=5/2\times1/\cos\theta=5/2\times\sqrt{5}/2=5\sqrt{5}/4$ ですから(3)の式で回転体の体積 V_1 を次のように求めます。」

> $(3)V_1=\int_0^{5\sqrt{5}/4}\pi PQ^2dx$
>
> $=\pi\int_0^{5\sqrt{5}/4}(2/\sqrt{5}\,PR)^2dx$
>
> $=\pi\int_0^{5\sqrt{5}/4}\{2/\sqrt{5}(5x/2-x^2)\}^2dx$
>
> $=\pi\int_0^{5\sqrt{5}/4}(5X^2-4x^3+4x^4/5)dx$
>
> $=\pi[5x^3/3-x^4+4x^5/25]_0^{5\sqrt{5}/4}$
>
> $=625\pi(5\sqrt{5}/12-20^{1/4}+5/4)/16$

T「(3)の式に疑問はないのですか。」

S4「(3)はx軸に沿って0から $5\sqrt{5}/4$ まで積分しているにすぎません。回転軸OKの沿っての積分を計算するためには、$OQ=t$ とおいて t と x の間に成り立つ関係式が必要になると思います。$t=OQ=OR-QR=\sqrt{5}X/2-PR/\sqrt{5}=x^2/\sqrt{5}$ より $dt/dx=2x/\sqrt{5}$、t の積分区間

$[0,\ 5\sqrt{5}/4]$に対してxの積分区間は$[0,\ 5/2]$ですから、体積V_1を次の式で求めることができると思います。」

S4君の体積V_1の式

$$V_1=\int_0^{5\sqrt{5}/4}\pi PQ^2\,dt$$
$$=\pi\int_0^{5/2}(2/\sqrt{5}\,PR)^2\cdot 2x/\sqrt{5}\cdot dx$$
$$=\pi\int_0^{5/2}\{2/\sqrt{5}\,(5x/2-x^2)\}^2\cdot 2x/\sqrt{5}\cdot dx$$
$$=2\sqrt{5}\,\pi\int_0^{5/2}(x-2x^2/5)^2x\,dx$$
$$=2\sqrt{5}\,\pi[x^4/4-4x^5/25+2x^6/75]_0^{5/2}$$
$$=125\sqrt{5}\,\pi/96$$

T 「以上よりS4君の式が正しいことが分かったようですね。ここまでのことを振り返って大切なことは何でしょうか。」

S5「回転軸に垂直に切った切り口の面積を求めることです。」

S6「回転軸に沿って積分することも大切です。」

S7「変数の間の関係式を考えて、積分変数や積分区間にも注意して積分することも重要です。」

T 「次の問題2も考えていきましょう。」

問題2　放物線$f(x)=2x-x^2$と直線$y=x$がある。放物線$y=f(x)$と直線$y=x$の原点O以外の交点をAとする。OからAにおける放物線$y=f(x)$上の点をP $(x,\ 2x-x^2)$、Pから直線$y=x$に下ろした垂線の足をQ、Pのx座標と同じ直線$y=x$上の点をRとする。次に、この放物線と直線とで囲まれた部分S_2を、この直線を軸として1回転して得られる立体の体積V_2を求めよ。

S8「図を書いて考えていきます。直線$y=1x$とx軸の正の部分のなす角をθとすると$\tan\theta=1$, $\cos\theta=1/\sqrt{2}$となります。回転軸$y=x$に垂直に切った切り口円の半径は$PQ=PR/\sqrt{2}=(x-x^2)/\sqrt{2}$です。したがって切り口の断面積は、$\pi(x-x^2)^2/2$と表すことができます。」

T 「次にどのような式を立てますか。」

S9「回転軸に沿って積分していきます。$OQ=t$とおいてtとxの間に成り立つ関係式は$t=OQ=OR+QR=\sqrt{2}\,x+(x-x^2)/\sqrt{2}=3x/\sqrt{2}-x^2/\sqrt{2}$です。よって$dt/dx=3/\sqrt{2}-\sqrt{2}\,x$となり、tの積分区間$[0,\ \sqrt{2}]$に対してxの積分区間は$[0,\ 1]$ですから、体積$V_2$の式を立てることができます。」

T 「体積V_2を求めてみましょう。」

$$V_2=\int_0^{\sqrt{2}}\pi PQ^2\,dt$$
$$=\pi\int_0^1(PR/\sqrt{2})^2\cdot(3/\sqrt{2}-\sqrt{2}\,x)\cdot dx$$
$$=\sqrt{2}\,\pi/4\times\int_0^1(x-x^2)^2(3-2x)dx$$
$$=\sqrt{2}\,\pi/4[-x^6/3+7x^4/5-2x^4+x^3]_0^1$$
$$=\sqrt{2}\,\pi/60$$

T 「ここまでのことを振り返って大切なことは何でしょうか。」

S10「V_2も回転軸に垂直に切った切り口の面積を求めることが大切です。また、回転軸に沿って積分するために変数の間の関係式を考えて、積分変数や積分区間にも注意して積分することも重要です。」

上記の事例について質的な考察を加えていく。S1の構成している体積に関するメンタルモデルを次のように推測できる。2つの線で囲まれた面積を求める際には、上方の線を表す式を下方の線を表す式で引いた式を積分すればよい。次に面積を積分すれば体積が求められるというものである。回転体に対する断面積の分析が不十分であり、初めにもった予想としての見越的直感に、それまでの2線で囲まれた面積に関する学習で構成したメンタルモデルが否定的に働いたようである。このあたりの学習段階は直感的であり、数学的に誤った見越的直感が、その後の生徒の複数の反省的思考によって変わっていく。

反省的思考について確認していく。反省的思考とは、学習者が自らの無意識的な活動や操作に注意を向け、それらやその結果を意識化して、図や言葉によって表現することを目的とする思考である。特に次の3点が重要である。

① 反省的思考は、学習者自身による活動や操作をその前提とする。

② 反省的思考の対象は、その活動や操作およびその結果である。

③ 反省的思考の目的は、無意識的な活動や操作を意識化し、それを表現することである。

S2、S3、S4によって学習段階は反省的段階へと移行していった。S2によって回転体の断面積は回転軸に垂直に切った切り口である円の面積を求めることが重要であることが意識化されて

きた。また、S３による図や式や言葉などによって表現することを通して、断面積を回転軸に沿って積分することが重要であることも意識されてきた。さらに、S４によって無意識的な操作活動に注意を向け、それらの結果を意識化して式の欠陥に反省を加えていった。つまり、積分変数や積分区間にも注意を向けた。(3)の式ではx軸方向に向けて積分しているにすぎない。回転軸方向の変数とx軸方向の変数に注意を向けた関係式の必要性を感得していった。ここでの学習段階は反省的思考が中心であった。

次の問題２の学習段階では、分析的思考が活動していた。問題１で表現したものを洗練して数学的に表現し確かめることができた。また、回転軸や関数式が変わっても問題解決について統合を図ることができた。振り返ってみると、学習段階は直感的段階から分析的段階へと移行していった。

このように数学理解の「２軸過程モデル」には、次の２つの特徴がある。第１には、数学理解の深化の過程における直感と論理の相補性を反映させ、反省的思考の役割をこのモデルに明確に位置づけようとしているのである。そして第２の特徴は、生徒の数学理解の様相や過程を説明する「記述的特性」と理解を深化させるための状況や方向づけなどに関する教授学的原理を示唆し得る「規範的特性」の両方をこのモデルに持たせようとしていることである。

(2) 理解の階層的水準（数学的対象間の関係）

問題１と２に関する数学的活動を通して、３つの学習段階を経た。このような一連の学習段階を経て、理解水準が次の水準へと上昇していく。水準が上昇することを理解が深化すると解釈できる。次の水準に理解を深化させるために意図した問題を生徒に新たに提示していく。次の水準である数学的対象間の関係は、積分法による回転体の求積解法間の関係である。この階層的水準において３つ学習段階（直感的段階、反省的段階、分析的段階）を経て数学理解が深化していく事例を提示する。単元は「数学Ⅲ積分法と回転体の体積」で、指導目標は「数学的活動を通して回転体の求積解法を比較検討する。」である。

> 問題３　放物線 $f(x)=x^2-2x$ と直線 $y=x/2$ がある。放物線 $y=f(x)$ と直線 $y=x/2$ の原点O以外の交点をAとする。OからAにおける放物線 $y=f(x)$ 上の点を $P(x,\ x^2-2x)$、Pから直線 $y=x/2$ に下ろした垂線の足をQ、Pのx座標と同じ直線 $y=x/2$ 上の点をRとする。直線 $y=x/2$ とx軸の正の部分とのなす角を θ とする。次に、この放物線と直線とで囲まれた部分 S_1 を、この直線を軸として１回転して得られる立体の体積 V_1 とする。
> $V_1=\int_0^{5/2}\pi PQ^2/\cos\theta\,dx$　は正しいか。

T「この式で体積 V_1 を求めることができるか。」

S1「怪しそうですが、この式で計算を進めてみようと思います。」

$$
\begin{aligned}
V_1&=\int_0^{5/2}\pi PQ^2/\cos\theta\,dx\\
&=\pi\int_0^{5/2}(2/\sqrt{5}\,PR)^2\cdot\sqrt{5}/2\cdot dx\\
&=2\pi/\sqrt{5}\int_0^{5/2}\{(5x/2-x^2)\}^2dx\\
&=2\pi/\sqrt{5}\int_0^{5/2}(25x^2/4-5x^3+x^4)dx\\
&=2\sqrt{5}\,\pi\left[25x^3/12-5x^4/4+x^5/5\right]_0^{5/2}\\
&=125\sqrt{5}\,\pi/96
\end{aligned}
$$

S2「不思議ですが、問題１と同じ答えになりました。この式で計算をするとなぜ問題１の答えと同じになるのかわかりません。」

T「同じになる理由が分かる人はいますか。」

S3「積分変数がxのとき、問題１の被積分関数はxの５次式　$\pi\cdot(2/\sqrt{5}\,PR)^2\cdot 2x/\sqrt{5}=\pi\cdot\{2/\sqrt{5}(5x/2-x^2)\}^2\cdot 2x/\sqrt{5}$ であり、問題２の被積分関数はxの４次式　$\pi(2/\sqrt{5}\,PR)^2\cdot\sqrt{5}/2=2\pi/\sqrt{5}\{(5x/2-x^2)\}^2$ であり違います。同じ答えになる理由が分かりません。」

T「πPQ^2 は何を表していましたか。」

S4「回転体の回転軸に垂直な断面積です。」

T「$\pi PQ^2/\cos\theta$ は何を表していますか。」

S5「図を観て考えると $\pi PQ^2/\cos\theta=\pi(\cos\theta\,PR)^2/\cos\theta$ は、直角三角形PQRをQRの回りに回転してできる三角錐（底面の半径はPQでPRが母線）の側面積を表します。すなわち、側面を底面に正射影している関係です。」

S6「問題３の式は側面積を積分しているのですね。しかも、円錐の母線PRはx軸に垂直です。」

T「問題２も問題３と同じように解くとどのよ

うな式計算になりますか。」

S7「問題3と同様に円錐の側面積を積分する式を作って次のように計算します。」

$$V_2=\int_0^1 \pi PQ^2/\cos\theta\, dx$$
$$=\int_0^1 \pi(PR/\sqrt{2})^2\cdot\sqrt{2}\cdot dx$$
$$=\pi/\sqrt{2}\times\int_0^1 (x-x^2)^2dx$$
$$=\pi/\sqrt{2}\,[x^3/3-x^4/2+x^5/5]_0^1$$
$$=\sqrt{2}\,\pi/60$$

T 「次の問題4も問題1や問題3と同じように2つの考え方で解くとどのようになりますか。」

問題4　放物線$f(x)=x^2-x$と直線$y=x$がある。放物線$y=f(x)$と直線$y=x$の原点O以外の交点をAとする。OからAにおける放物線$y=f(x)$上の点をP $(x,\ x^2-x)$、Pから直線$y=x$に下ろした垂線の足をQ、Pのx座標と同じ直線$y=x$上の点をRとする。次に、この放物線と直線とで囲まれた部分S_3を、この直線を軸として1回転して得られる立体の体積V_3を求めよ。

S8「図を書いて考えていきます。直線$y=1x$とx軸の正の部分のなす角をθとすると$\tan\theta=1$, $\cos\theta=1/\sqrt{2}$となります。回転軸$y=x$に垂直に切った切り口円の半径は$PQ=PR/\sqrt{2}=(2x-x^2)/\sqrt{2}$です。したがって切り口の断面積は、$\pi(2x-x^2)^2/2$と表すことができます。」

T 「次にどのような式を立てますか。」

S9「回転軸に沿って積分していきます。$OQ=t$とおいてtとxの間に成り立つ関係式を作ると$t=OQ=OR-QR=\sqrt{2}\,x-(2x-x^2)/\sqrt{2}=x^2/\sqrt{2}$です。よって$dt/dx=\sqrt{2}\,x$となり、$t$の積分区間$[0,\ 2\sqrt{2}]$に対して$x$の積分区間は$[0,\ 2]$ですから、最初に体積$V_3$を回転軸に垂直な断面積を積分する式で求めます。」

T 「その考えで体積V_3を求めてみましょう。」

問題4の解法その1

$$V_3=\int_0^{2\sqrt{2}} \pi PQ^2\,dt$$
$$=\pi\int_0^2 (PR/\sqrt{2})^2\cdot\sqrt{2}\,x\cdot dx$$
$$=\sqrt{2}\,\pi/2\times\int_0^2 (4x^3-4x^4+x^5)dx$$
$$=\sqrt{2}\,\pi/2\times[x^4-4x^5/5+x^6/6]_0^2$$
$$=8\sqrt{2}\,\pi/15$$

T 「もう一つの考えで体積V_3を求めてみよう。」

S10「問題3と同様に円錐の側面積を積分する式を作って次のように計算します。」

問題4の解法その2

$$V_3=\int_0^2 \pi PQ^2/\cos\theta\, dx$$
$$=\int_0^2 \pi(PR/\sqrt{2})^2\cdot\sqrt{2}\cdot dx$$
$$=\pi/\sqrt{2}\times\int_0^2(2x-x^2)^2dx$$
$$=\pi/\sqrt{2}\times[4x^3/3-x^4/2+x^5/5]_0^2$$
$$=8\sqrt{2}\,\pi/15$$

T 「ここまでのことを振り返って大切なことは何でしょうか。」

S11「正射影の考えで回転軸に垂直に切った切り口の面積を、円錐の側面積に変換してから回転体の体積を求めることもできます。」

S12「円錐の母線PRはx軸に垂直であり、側面積はxの式ですのでx軸に沿って積分できます。変数置換もしないので便利な考えです。」

S13「回転軸に垂直な断面積で積分をすると、変数置換が必要ですし被積分関数も複雑に変化します。側面積を積分する方が被積分関数もおだやかさを保っていて計算もしやすいようです。」

上記の事例について質的な考察を加えていく。S1、S2、S3の構成している回転体の体積に関するメンタルモデルを次のように推測できる。回転体の体積を求めるには、まず回転軸に垂直な断面積を求めなければならない。この断面積は円の面積である。この円の面積を回転軸にそって積分していくと回転体の体積が求められる。ところが被積分関数の式$\pi PQ^2/\cos\theta$が奇異に感じられて回転体の体積は求められないであろうと予想していたようだ。初めにもった予想としての見越的直感を援護するかのように、それまでの回転体に関する学習で構成したメンタルモデルが否定的に働いたようである。このあたりの学習段階は直感的であり、数学的に誤った見越的直感が、その後の生徒の反省的思考によって変わっていく。

S5、S6によって学習段階は反省的段階へと移行していった。S5は図を観て考えることによって$\pi PQ^2/\cos\theta=\pi(\cos\theta PR)^2/\cos\theta$は、直角三角形PQRをQRの回りに回転してできる三角錐（底面の半径はPQでPRが母線）の側面積を表していることが意識化されてきた。すなわち、

側面を底面に正射影している関係であることが図や式の観察から意識化されてきたのである。さらに、S６はS１やS２による計算活動、すなわち無意識的な操作活動に注意を向け、それらの結果を意識化して式のもつ意味を深化させるように反省的思考を働かせていった。つまり、問題３の式は側面積をx軸に沿って積分していけばよいことを感得していったのである。ここでの学習段階は反省的思考が中心であった。

次の問題４の学習段階では、分析的思考が活動していた。問題３で表現したものを洗練して数学的に表現し確かめることができた。つまり、他の例で確かめたり、それらのつながりを分析したりすることによって、統合を図ることを目的とする「分析的思考」を働かせる段階であった。また、被積分関数を何にするかについて統合を図ることができた。振り返ってみると、学習段階は直感的段階から分析的段階へと移行していった。

（３）理解の階層的水準（数学的関係の一般性）

問題３と４に関する数学的活動を通して、３つの学習段階を経た。このような一連の学習段階を経て、理解水準が次の水準へと上昇していく。水準が上昇することを理解が深化すると解釈できる。次の水準に理解を深化させるために意図した問題を生徒に新たに提示していく。次の水準である数学的関係の一般性は、積分法による回転体の求積において円錐の側面積による解法等の一般化である。この階層的水準において３つ学習段階（直感的段階、反省的段階、分析的段階）を経て数学理解が深化していく事例を提示する。単元は「数学Ⅲ積分法と回転体の体積」で、指導目標は「数学的活動を通して回転体の求積解法を一般化する。」である。

問題５　放物線 $f(x)=x^2-2x$ と直線 $y=x/2$ がある。放物線 $y=f(x)$ と直線 $y=x/2$ の原点O以外の交点をAとする。OからAにおける放物線 $y=f(x)$ 上の点を $P(x,\ x^2-2x)$、Pから直線 $y=x/2$ に下ろした垂線の足をQ、Pのx座標と同じ直線 $y=x/2$ 上の点をRとする。次に、この放物線と直線とで囲まれた部分を、この直線を軸として１回転して得られる立体の体積 V_1 とする。

次に放物線 $g(x)=-x^2+5x/2$ とx軸で囲まれた部分をx軸の回りに回転して得られる体積を $V_1{}'$ とする。
直線 $y=x/2$ とx軸の正の部分とのなす角を θ とするとき $V_1=\cos\theta V_1{}'$ は正しいか。

T 「理由も考えてみましょう。」

S1「正しいようにも観えますが自信がないです。」

S2「V_1は問題１より $V_1=125\sqrt{5}\pi/96$ です。$V_1{}'$ を計算して調べてみようと思います。」

S3「まずx軸に垂直な断面積を考えます。放物線 $g(x)=-x^2+5x/2$ とx軸の交点は、原点OとB（0, 5/2）です。OB上の点Cを（x, 0）とすると断面積は円だから $\pi(-x^2+5x/2)^2$ です。体積 $V_1{}'$ を求めると次のようになります。」

$$V_1{}'=\int_0^{5/2}\pi(-x^2+5x/2)^2dx$$
$$=\pi\int_0^{5/2}(x^4-5x^3+25x^2/4)dx$$
$$=\pi\left[x^5/5-5x^4/4+25x^3/12\right]_0^{5/2}$$
$$=625\pi/192$$

T 「$\cos\theta=2/\sqrt{5}$ ですが、正しいですか。」

S4「$\cos\theta V_1{}'=2/\sqrt{5}\times625\pi/192=125\sqrt{5}\pi/96=V_1$ ですから正しいです。」

T 「なぜ正しくなるのでしょうか。」

S5「V_1 の被積分関数は $\pi PQ^2/\cos\theta=\pi(2/\sqrt{5}PR)^2\cdot\sqrt{5}/2=2\pi/\sqrt{5}\{(5x/2-x^2)\}^2=2\pi/\sqrt{5}\ (25x^2/4-5x^3+x^4)=2/\sqrt{5}\times\pi(x^4-5x^3+25x^2/4)=\cos\theta\times\pi(x^4-5x^3+25x^2/4)=\cos\theta\times\pi(-x^2+5x/2)^2$ と変形できます。$\pi(-x^2+5x/2)^2$ の部分が $V_1{}'$ の被積分関数と同じです。」

S6「$\pi PQ^2/\cos\theta=\pi(\cos\theta PR)^2/\cos\theta=\cos\theta\times\pi PR^2=\cos\theta\times\pi(5x/2-x^2)^2=\cos\theta\times\pi\{g(x)\}^2$ と変形できますので、V_1は$V_1{}'$ の $\cos\theta$ 倍であることが分かります。」

S7「$PR=|f(x)|+x\times\tan\theta=2x-x^2+x\times1/2=-x^2+5x/2=g(x)$ です。」

S8「$\pi(\cos\theta PR)^2/\cos\theta=\pi\{\cos\theta(|f(x)|+x\times\tan\theta)\}^2/\cos\theta=\cos\theta\times\pi\{(|f(x)|+x\times\tan\theta)\}^2=\cos\theta\times\pi\{g(x)\}^2$ となります。つまり放物線 $y=f(x)$ と直線 $y=\tan\theta\times x$ で囲まれた部分をこの直線の回りに回転させた体積 V_1 は、放物線 $y=g(x)$ とx軸で囲まれた部分をx軸の回りに回転させた体積 $V_1{}'$ の $\cos\theta$ 倍であ

ることが分かりました。」

T 「次の問題6も考えてみましょう。」

> 問題6　放物線 $f(x)=2x-x^2$ と直線 $y=x$ がある。放物線 $y=f(x)$ と直線 $y=x$ の原点O以外の交点をAとする。OからAにおける放物線 $y=f(x)$ 上の点をP $(x,\ 2x-x^2)$、Pから直線 $y=x$ に下ろした垂線の足をQ、Pのx座標と同じ直線 $y=x$ 上の点をRとする。次に、この放物線と直線とで囲まれた部分を、この直線を軸として1回転して得られる立体の体積 V_2 とする。
>
> 次に放物線 $g(x)=x-x^2$ とx軸で囲まれた部分をx軸の回りに回転して得られる体積を $V_2{}'$ とする。
>
> 直線 $y=x$ とx軸の正の部分とのなす角を θ とするとき $V_2=\cos\theta V_2{}'$ は正しいか。

T 「問題6と同様に考えられそうですね。」

S9「問題2より $V_2=\sqrt{2}\ \pi/60$ です。$V_2{}'$ を計算して調べてみようと思います。」

S10「まずx軸に垂直な断面積を考えます。放物線 $g(x)=x-x^2$ とx軸の交点は、原点OとB (0, 1) です。OB上の点Cを $(x,\ 0)$ とすると断面積は円だから $\pi(x-x^2)^2$ です。体積 $V_2{}'$ を求めると次のようになります。」

$$
\begin{aligned}
V_2{}' &= \int_0^1 \pi(x-x^2)^2 dx \\
&= \pi \int_0^1 (x^2-2x^3+x^4)dx \\
&= \pi\left[x^3/3-x^4/2+x^5/5\right]_0^1 \\
&= \pi/30
\end{aligned}
$$

T 「$\cos\theta=1/\sqrt{2}$ を使いますね。」

S11「$\cos\theta V_2{}'=1/\sqrt{2}\times\pi/30=\sqrt{2}\ \pi/60=V_2$ ですから正しいです。」

T 「問題5と同様に理由を確認しましょう。」

S12「V_2 の被積分関数は $\pi PQ^2/\cos\theta=\pi(1/\sqrt{2}\times PR)^2\cdot\sqrt{2}=\pi/\sqrt{2}(x-x^2)^2$
$=\pi/\sqrt{2}\ (x^2-2x^3+x^4)=1/\sqrt{2}\times\pi(x^2-2x^3+x^4)=\cos\theta\times\pi(x^2-2x^3+x^4)=\cos\theta\times\pi(x-x^2)^2$ と変形できます。$\pi(x-x^2)^2$ の部分が $V_2{}'$ の被積分関数と同じです。」

S13「$\pi\times PQ^2/\cos\theta=\pi(\cos\theta PR)^2/\cos\theta=\cos\theta\times\pi PR^2=\cos\theta\times\pi\{(x-x^2)\}^2=\cos\theta\times\pi\{g(x)\}^2$ と変形できます。よって V_2 は $V_2{}'$ の $\cos\theta$ 倍であることが分かります。」

S14「$PR=f(x)-x\times\tan\theta=2x-x^2-x\times1=x-x^2=g(x)$ です。」

S15「$\pi(\cos\theta PR)^2/\cos\theta=\pi\{\cos\theta(f(x)-x\times\tan\theta)\}^2/\cos\theta=\cos\theta\ \pi\{(f(x)-x\tan\theta)\}^2=\cos\theta\times\pi\{g(x)\}^2$ となります。つまり、放物線 $y=f(x)$ と直線 $y=\tan\theta\times x$ が囲まれた部分をこの直線の回りに回転させた体積 V_2 は、放物線 $y=g(x)$ とx軸で囲まれた部分をx軸の回りに回転させた体積 $V_2{}'$ の $\cos\theta$ 倍であることが分かりました。」

T「一般化するとどのようなことがいえますか。」

S16「放物線 $y=f(x)$ と直線 $y=\tan\theta\times x$ で囲まれた部分が第1象限にあり、交点のx座標が $a,\ b\ (a<b)$ であるとき、回転軸に垂直な断面積を円錐の底面とする側面積は、$\pi\{\cos\theta(f(x)-x\times\tan\theta)\}^2/\cos\theta$ であるから、回転体の体積Vは次の式となります。」

$$
\boxed{V=\cos\theta\times\pi\int_a^b\{f(x)-x\times\tan\theta\}^2dx}
$$

T 「ここまでのことを振り返って大切なことは何でしょうか。」

S17「正射影の考えで回転軸に垂直に切った切り口の面積を、円錐の側面積に変換してから回転体の体積Vを求めることもできます。」

S18「回転軸に垂直な断面積で積分をすると、変数置換が必要ですし被積分関数も複雑に変化します。側面積を積分する方が被積分関数もおだやかさを保っていて計算もしやすいようです。」

S19「$g(x)=f(x)-x\times\tan\theta$ とx軸に囲まれた部分をx軸の回りに回転させてできる体積 V' を $\cos\theta$ 倍すると体積Vと同じになります。」

上記の事例について質的な考察を加えていく。S1、S2、S3の構成している回転体の体積に関するメンタルモデルを次のように推測できる。回転体の体積を求めるには、まず回転軸に垂直な断面積を求めなければならない。この断面積は円の面積である。この円の面積を回転軸にそって積分していくと回転体の体積が求められる。ところが体積 V_1 と $V_1{}'$ では関数も回転軸も異なるので $V_1=\cos\theta V_1{}'$ の等式が奇異に感じられていた。等式が成立することに疑念もいだいていたようだ。初めにもった予想としての見越的直感を援護するかのように、それまでの回転体に関する学

習で構成したメンタルモデルが否定的に働いたようである。このあたりの学習段階は直感的であり、数学的に誤った見越的直感が、その後の生徒の反省的思考によって変わっていく。

Ｓ５、Ｓ６、Ｓ７、Ｓ８によって学習段階は反省的段階へと移行していった。Ｓ５は式を観て考えることによってV_1の被積分関数からV_1'の被積分関数を導出することに成功した。これを観ていたＳ６、Ｓ７、Ｓ８はさらに式に変形操作を加えることによって、体積V_1はV_1'の$\cos\theta$倍であることを解明していった。すなわち$V_1=\cos\theta V_1'$の関係が図や式の観察から意識化されてきたのである。換言すると、Ｓ３たちによる計算活動、すなわち無意識的な操作活動に注意を向け、それらの結果を意識化して式のもつ意味を深化させるように反省的思考を働かせていった。つまり、x軸の回りに回転して求められる体積V_1'を$\cos\theta$倍すれば体積V_1となるという単純で面白い結論を感得していったのである。更にこのことを一般化するように思考が分析的に活動していった。ここでの学習段階は分析的思考が中心であった。

以上の事例（1）から（3）について概観する。問題２から問題３にかけて理解の水準が数学的対象から数学的対象間の関係へと上昇していった。さらに、問題４から問題５にかけて理解の水準が数学的対象の関係から数学的対象の一般性へと上昇していった。各水準においては、直感的思考・反省的思考・分析的思考が活動する３つの学習段階を踏みながら理解が深化していった。つまり、生徒は文字の意味や式の構造に着目して、反省的思考の結果を数学的により洗練された形で表現していった。また、課題の分析を行って統合を図ろうとした。このことより、生徒は次の学習段階である分析的思考を働かせ、理解の水準も次の水準へと上昇していったのである。このことから数学理解の「２軸過程モデル」の横軸である３つの学習段階や、縦軸である３つの理解の水準の妥当性は、実践事例によって実証的に裏付けられたといってよいのである。そして、生徒の数学理解の過程は、この「2 軸過程過程モデル」の階層的水準（縦軸）と学習段階（横軸）を用いて記述でき、規範的特性も備えていることを例証確認した。

５．本論文のまとめと今後の課題

本研究の主要な成果をまとめて列挙すると、つぎの４点となる。

〔成果１〕生徒の数学理解の過程は従来未分化な形で潜在したままであったが、「２軸過程モデル」の理論を足場にして生徒の数学理解の過程を実践的にとらえることが可能になってきた。また、「２軸過程モデル」の構成要素として必要不可欠なものは、「数学的思考の対象(数学的対象―対象間の関係―関係の一般性)」と「数学的思考の質（直感的思考―反省的思考―分析的思考)」であり、生徒の数学理解の過程をとらえる上で必要欠くべからずものであった。

〔成果２〕数学的理解の過程モデルが教授学習活動として数学教育、特に数学科授業において真に有効なものであるために「記述的特性」だけでなく「規範的特性」をも備えていなければならないことが実証的に確認できた。これら両方の特性を備えた数学教育における数学的理解の過程モデルの１つとして「２軸過程モデル」は次の３つの水準を縦軸に、そして３つの学習段階を横軸にもつ。縦軸は、数学的思考の対象を視点とした「(Ｖ１)数学的対象の理解，(Ｖ２)数学的対象間の関係の理解，(Ｖ３)数学的関係の一般性の理解」の３つの水準をひとまとまりとする階層的理解水準である。横軸は、各々の理解水準における数学的思考の質を視点とした「(Ｈ１）直観的理解，（Ｈ２)反省的理解，（Ｈ３）分析的理解」の３つの段階をひとまとまりとする学習段階である。この縦軸と横軸にもつ「２軸過程モデル」によって、生徒の理解の過程をとらえることができ、授業構成にも有効であった。

〔成果３〕数学教育における数学的理解の２軸過程モデルの「記述的特性」についての実践的研究として、「積分法による回転体の求積」授業の事例研究によって、2 軸過程モデルには記述的特性が備わっていることを例証確認できた。

〔成果４〕数学教育における数学的理解の２軸過程モデルの「規範的特性」についての実践的研究として、その２軸過程モデルに基づく数学科授業構成の３つの原理（Ｐ１～Ｐ３）と３つの方法（Ｍ

１～Ｍ３）を活用していくことは、授業を構成し実践していく上で有効であることを例証提案した。

本研究の今後の主要な課題は、数学教育における数学的理解の２軸過程モデルを基盤にした実践研究を積み重ね、２軸過程モデルのさらなる精緻化と具体化を図ることである。そして、他の実践理論も取り入れながら生徒の理解の深化と学力向上を図ることである。しかも本研究における提案が、生徒の主体的な学習と受験学力の一層の向上と躍進にもつなげていく。さらに、生徒が生涯に渡って数学を生活に役立て生涯学び続けていく楽しさも感得できるように授業構成を工夫構築していくことである。

最後に、本稿の実践事例には他の実践理論も組み込んであることに触れる。それは、問題解決後に必ず生徒に振り返らせている点である。特にうまく問題が解けなかったときや、最初分からなかったが後で分かったときなどには有効なものである。つまり、「問題解決の失敗経験から教訓を抽出する」という学習方略であり、認知カウンセリングでは「教訓帰納（Lesson induction）」（市川,1993）と呼ばれているものである。要するに「自分はこの問題や授業から学んだことは何か」をそのつど明らかにしながら学習や授業をすすめていくことである。このことに関して、ポリア（Polya、1962）は著書で次のように述べている。『いろいろな方法について考えるのに最もよい時期は、読者が一つの問題を解き終えた時、あるいはそれの解答を読み終えた時、あるいは解法の来歴を読み終えた時であろう。自分の仕事をやり終えて、その経験がまだ頭の中に生々しいとき、自分の努力のあとを振り返ってみると、いましがた克服した困難の特質を調べて、いろいろ有益な教訓を得ることができるのである。』（下線は筆者）

本稿を閉じるにあたって、筆者は次のことを反芻自戒していく。『実践なき理論は空虚であり、理論なき実践は盲目である。』『実践なき理論は無力であり、理論なき実践は暴力である。』出典先は不明であるが時たま目にする言葉である。教師は実践者であるとともに理論も学び続ける責務をもつ。数学教育学研究も理論と実践を両輪として研究していくことを肝に銘じていきたい。

引用・参考文献

文部科学省(2009)，高等学校学習指導要領解説数学編.

日本数学教育学会編(2010)，数学教育学研究ハンドブック，東洋館出版社.

平山満義(1997),質的研究法による授業研究. 北大路書房.

小山正孝(2010),数学的理解の過程モデルの研究. 聖文社.

小山正孝(2006)，「数学的理解の過程モデルの研究」，日本数学教育学界誌『数学教育学論究』,第 88 巻, pp.25－36.

小山正孝(2006),「数学理解の２軸過程モデルに基づく授業構成の原理と方法」，『日本教科教育学会誌』，第 28 巻第 4 号，pp.61－70.

小山正孝(1997),「数学学習と理解過程」,日本数学教育学会編『学校数学の授業構成を問い直す』,産業図書,135－149.

市川伸一編著(1993),認知カウンセリング,ブレーン出版

ポリア(1962),数学の問題の発見的解き方１,みすず書房

ポリア(1967)，数学の問題の発見的解き方２,みすず書房

藤井斉亮(2001)，「学校数学における「文字の式」の理解に関する研究―認知的コンフリクトによる理解の顕在化と分析―」，日本数学教育学界誌『数学教育学論究』，第 76 巻，pp.19－24.

藤井斉亮(2000),「理解と認知的コンフリクトについての一考察」,『日数教学会誌』, 第 45 巻, 24－25.

藤井斉亮(1997)，「数学学習と認知的コンフリクト」，日本数学教育学会編『学校数学の授業構成を問い直す』，産業図書，122－134.

藤井斉亮(1989)，「認知的コンフリクトによる理解の分析と評価―方程式・不等式を具体的題材として―」，『日本数学教育学会数学教育学論究』，Vol. 53，pp.3－31.

スケンプ(1973)，数学学習の心理学，新曜社.

相馬一彦(1995)，「予想」を取り入れた数学授業の改善，明治図書.

中原忠男編集(2000)，算数数学科重要用語，,明治図書.

長崎栄三(2004)，高校新数学科の在り方，明治図書.

長崎編著(2001)，数学と社会文化のつながり，明治図書.

日本数学教育学会編(2000)，和英/英和算数数学活用辞典，東洋館出版社.

謝辞

本稿は、諸先生方と教職活動の中でいただいたご助言やご指導と、諸研究会で得た知見等を基にして完成しました。本稿が数学教育のさらなる進化発展に貢献できることをお祈り申し上げます。