# 2009韓国大学修学能力試験〜数学理系問題から

江別高等学校　植松寛喜 Ebetsu High School Hironobu Uematsu

平成 20 年 12 月 18 日

## 1　大学修学能力試験

大学修学能力試験は、大韓民国で実施されている大学共通の入学試験で、通称「修能（スヌン）」と呼ばれる。日本の大学入試センター試験と異なるのは日本では国公立大学への進学希望者のみ受験義務があるが、韓国では国立・公立・私立を問わず４年制大学の志願者全員がこの試験を受けなければならない。受験生は、進学を希望する大学によって各科目を選択して受験する。「言語領域」「数理・探究領域」「外国語領域」の３領域が必須のほか選択科目を受験する。なお、韓国の高校では第二外国語が必修となっており、諸言語のなかで日本語が最も履修者が多い。内容は言語領域、数理探求領域、外国語領域、社会領域、科学領域があり、それぞれ数科目選択する。数学は数理探求領域にあり、理系が数学Ｉ・数学IIに加え確率統計、微分積分、離散数学から１分野選択、文系は数学Ｉが必修である。

## 2　韓国の教育課程

韓国の教育課程は、１学年（小学１年）から１０学年（高校１年）までは「国民共通 基本教育課程」とし、小中高の学校段階の区分を弱め、学年間の連携を強化している。また、１学年から１０学年までは、数学の内容を「数と演算」「図形」「測定」「確率統計」「文字と式」「規則性と関数」の6領域に構成し、一貫性をもたせている。

１０学年（高校１年）では「数学」が必修科目で、２年で「数学Ｉ」が必修科目、２、３年では「実用数学」「数学II」「微積分」「確率統計」「離散数学」の各科目から生徒が選択する。理系の生徒は２、３年で「数学II」「微積分」「確率統計」「離散数学」をすべて履修する。

| 学年 | 科目 | 単位 |
|---|---|---|
| １０学年 | 数学 | 4 |
| １１学年<br>１２学年 | 実用数学 | 4 |
| | 数学Ｉ | 8 |
| | 数学Ｉ | 8 |
| | 数学II | 8 |
| | 微分と積分 | 4 |
| | 確率と統計 | 4 |
| | 離散数学 | 4 |

## 3　数理・探究領域の問題

数理探求領域の問題はカ型 (理系) は数学Ｉ・数学IIに加え確率統計、微分積分、離散数学から１分野選択する。ナ型 (文系) は数学Ｉだけである。理系文系問題ともに３０題あり、文系はマークシート形式が２１題、記述が９題あり、理系はマークシート形式が１７題、記述が８題ある。残りの５題は「微積分」「確率統計」「離散数学」の分野から一つの領域を選択してマークシート形式４題、記述１題を解く。100 点満点で試験時間は 100 分間である。

| 試験領域 | 試験時間 | 設問数 | 素点 | 備考 |
|---|---|---|---|---|
| 言語 | 8 : 40〜10 : 10（９０分） | ６０ | ２００ | 聞き取り問題：６題 |
| 数理 | 10 : 40〜12:20（１００分） | ３０ | ２００ | 非選択型３０％程度 |
| 社会探究<br>科学探究<br>職業探究 | 13:20〜15:20（１２０分）[1]<br>３０分/科目 | ２０/科目 | １００/科目 | 最大４科目 |
| 外国語 | 15 : 50〜17 : 00（７０分） | ５０ | ２００ | 聞き取り問題：１７題 |
| 第２外国語 | 17 : 30〜18 : 10（４０分） | ３０ | １００ | 大学により必要な領域 |

## 3.1 微分積分選択問題

$\boxed{\text{I}}$ [問題 26]　三角方程式

$\sin 2x = 2\cos x - 2\cos^2 x (0 \leqq x < 2\pi)$ を解き、その異なる解の和を求めよ。

$\boxed{\text{II}}$ [問題 27] 関数 $f(x)$ について、

$f(0) = 0, f(1) = 1$ である。また、開区間 $(0,1)$ で $f'(x) > 0, f''(x) > 0$ である。

そのとき、$\displaystyle\int_0^1 \left\{f^{-1}(x) - f(x)\right\} dx$ と等しくなるものを次から選べ。

① $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n} - f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{2n}$

② $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n} - f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{2}{n}$

③ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n} - f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$

④ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{2n} - f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$

⑤ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2k}{n} - f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$

$\boxed{\text{III}}$ [問題 28] $f(x) = 4\log x + \log(10 - x)$ について、次の中から正しいものを選べ。

| | |
|---|---|
| ア | $f(x)$ は極大値 $13\log 2$ をとる |
| イ | $f(x) = 0$ となる $x$ が存在する |
| ウ | $y = e^{f(x)}$ は $(4, 8)$ で下に凸である |

①　ア
②　ウ
③　ア、イ
④　イ、ウ
⑤　ア、イ、ウ

$\boxed{\text{IV}}$ [問題 29]

$f(x) = \displaystyle\int_a^x \left\{2 + \sin\left(t^2\right)\right\} dt, f''(a) = \sqrt{3}a$

のとき、$\left(f^{-1}\right)(0)$ の値を求めよ。

ただし、$0 < a < \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ とする。

$\boxed{\text{V}}$ [問題 30]

図 1 のように半径 1 の円上に 3 点 $A, B, C$ があり、$AB = AC$ とする。$\triangle ABC$ の内接円の半径を $r(\theta)$ とし、$\displaystyle\lim_{\theta\to\pi-\theta}\frac{r(\theta)}{(\pi-\theta)^2} = \frac{q}{p}$ とするとき、$p^2 + q^2$ の値を求めよ。

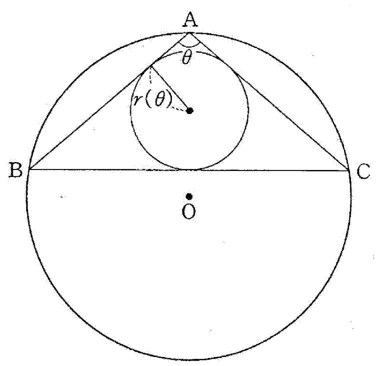


図 1: 図

## 3.2 解答

$\boxed{\text{I}}$ [解答]

$\sin 2x = 2\cos x - 2\cos^2 x$ から
$2\sin x\cos x = 2\cos x - 2\cos^2 x$
$\cos x(\sin x + \cos x - 1) = 0$
よって
$\cos x = 0, \sin x + \cos x = 1$
(i) $\cos x = 0$ から $x = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$
(ii) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \dfrac{\pi}{4}) = 1$
$\sin(x + \dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\dfrac{\pi}{4} \leqq x + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{9\pi}{4}$ から $x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}$
よって $x = 0, \dfrac{\pi}{2}$
(i)(ii) から $0 + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{3\pi}{2} = 2\pi$
⑤ $\cdots$ ( 答 )

$\boxed{\text{II}}$ [解答]

$f(x)$ は条件より、下に凸の増加関数で、
$y = f^{-1}(x)$ は $y = x$ に対称だから、

$$\int_0^1 \left\{f^{-1}(x) - f(x)\right\} dx$$
$$= 2\int_0^1 \left\{x - f(x)\right\} dx$$
$$= 2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n} - f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n} - f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{2}{n}$$

② $\cdots$ ( 答 )

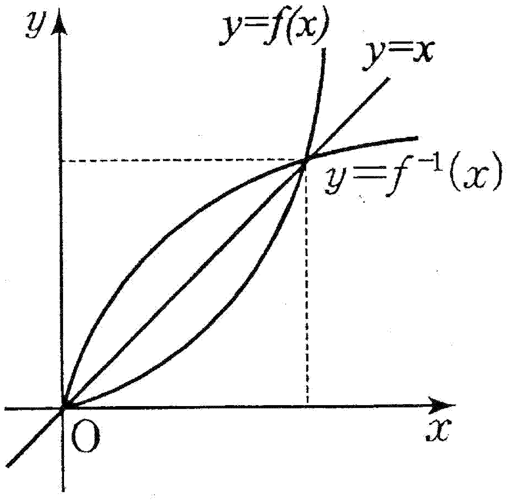


図 2: 図

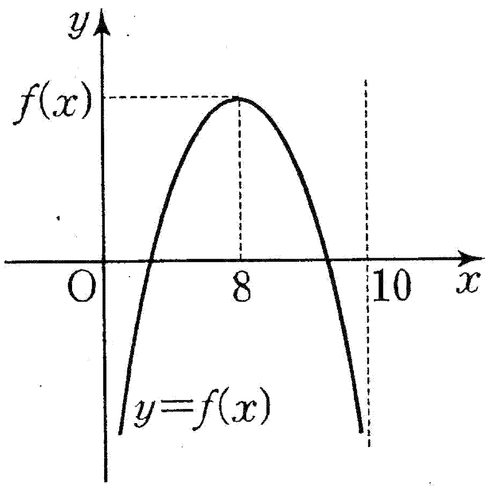


図 3: 図

$\boxed{\text{III}}$ [解答]

$f'(x) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{-1}{10-x} = \dfrac{-5(x-8)}{x(10-x)}$ より、

| $x$ | 0 | | 8 | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | 極大 | ↘ | $-\infty$ |

増減表より $x = 8$ で極大で、
極大値 $f(8) = 13\log 2$
また、図より $f(x) = 0$ となる $x$ が存在する。
$f(x) = \log x^4(10-x)$ より
$y = e^{f(x)} = x^4(10-x) = 10x^4 - x^5$
$y' = 40x^3 - 5x^4, y'' = 20x^2(6-x)$
したがって、$0 < x < 6$ で $y'' > 0$
以上よりウは成立しない。

③$\cdots$( 答 )

$\boxed{\text{IV}}$ [解答]

$f'(x) = 2 + \sin(x^2),\ f''(x) = 2x\cos(x^2)$
よって、$f''(a) = 2a\cos(a^2) = \sqrt{3}a, \cos(a^2) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(0 < a^2 < \dfrac{\pi}{2}\right)$
$f(f^{-1}(x)) = x$ の両辺 $x$ について微分すると、
$f'(f^{-1}(x))\left\{(f^{-1})'(x)\right\} = 1$
$x = 0$ を代入して、
$f'(f^{-1}(0))\left\{(f^{-1})'(0)\right\} = 1$
よって
$(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(0))}$
$f^{-1}(0) = a$ より、
$(f^{-1})'(0)$
$= \dfrac{1}{f'(a)}$
$= \dfrac{1}{2+\sin(a^2)}$
$= \dfrac{1}{2+\sin\frac{\pi}{6}}$
$= \dfrac{2}{5}$
④$\cdots$( 答 )

$\boxed{\text{V}}$ [解答] $\dfrac{BC}{\sin\theta} = 2$ より $BC = 2\sin\theta,$

$BC$ の中点を $M,$ 内接円の中心を $I$ とすると、

$\angle ABC = \dfrac{\pi-\theta}{2}, \angle IBC = \dfrac{\pi-\theta}{4}$
$BM = \sin\theta,\ \tan\dfrac{\pi-\theta}{4} = \dfrac{r(\theta)}{BM}$
よって、$r(\theta) = \sin\theta\tan\dfrac{\pi-\theta}{4}$

$\lim\limits_{\theta\to\pi-\theta} \dfrac{\sin\theta\tan\frac{\pi-\theta}{4}}{(\pi-\theta)^2},$

ここで $\pi - \theta = \alpha$ とおくと、

$\lim\limits_{\alpha\to+0} \dfrac{\sin(\pi-\alpha)\theta\tan\frac{\alpha}{4}}{\alpha^2}$
$= \lim\limits_{\alpha\to+0} \dfrac{\sin\alpha\tan\frac{\alpha}{4}}{\alpha\cdot\frac{\alpha}{4}\cdot 4}$
$= \dfrac{1}{4}$

よって $p = 4, q = 1$ より
$p^2 + q^2 = 17\cdots$( 答 )