アポロニウスの円

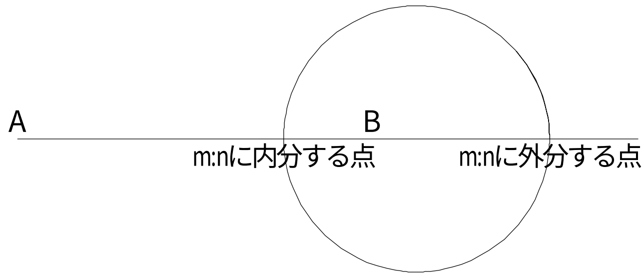
定義を少し広げる試み

愛知県立高浜高等学校　　山崎博司

■ 1．はじめに

「数研通信」HNo .33L に次のようなことが載っていた。

「２つの定点Ａ，Ｂからの距離の比が ｍ：ｎである点の軌跡がアポロニウスの円であるが、その中心は線分ＡＢをm^2：n^2 に外分する点である。」



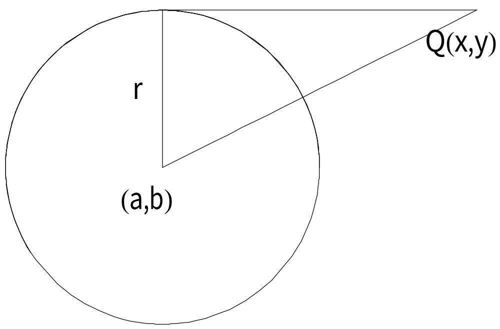
証明は、アポロニウスの円が図のように線分ＡＢを ｍ：ｎに内分する点と外分する点を直径の両端とすることから、中心の座標（それらの中点 L を計算すればよい。（神奈川県湘南高校　石濱文武先生）

このことの別証を示したいと思う。

■ 2．内容

予備知識として次の２つの（1），（2）を確認しておく。

（1）　点 $\mathrm{H}x, y\mathrm{L}$ が円外のとき、$f\,\mathrm{H}x, y\mathrm{L} = \mathrm{H}x - a\mathrm{L}^2 + \mathrm{H}y - b\mathrm{L}^2 - r^2$ は $\mathrm{H}x, y\mathrm{L}$ から円 $f\,\mathrm{H}x, y\mathrm{L} = 0$ にひいた接線の長さの２乗を表す。



（２）　２つの円

$$f\,Hx,\ yL = Hx - a_1L^2 + Hy - b_1L^2 - r_1{}^2 = 0$$

$$g\,Hx,\ yL = Hx - a_2L^2 + Hy - b_2L^2 - r_2{}^2 = 0$$

に対して、 方程式

$$s\,f\,Hx,\ yL + t\,g\,Hx,\ yL = 0$$

は円 Hまたは１点、 虚円L を表し、 その中心は線分 ABをt : sにわける点である。 ただし、 $f\,Hx,\ yL = 0$, $g\,Hx,\ yL = 0$ の中心をそれぞれA, Bとする。 とくに $st < 0$ のときは必ず円になる。

（「方程式 $s\,f\,Hx,\ yL + t\,g\,Hx,\ yL = 0$ の表す図形」 参照）

さて、 ２点 A $Ha_1,\ b_1L$, B $Ha_2,\ b_2L$ を中心とする２つの円

$$f\,Hx,\ yL = Hx - a_1L^2 + Hy - b_1L^2 - r_1{}^2 = 0$$

$$g\,Hx,\ yL = Hx - a_2L^2 + Hy - b_2L^2 - r_2{}^2 = 0$$

を考える。 これら２つの円までの接線の長さの比がm : n になる点 の軌跡の方程式は

$$\frac{f\,Hx,\ yL}{m^2} = \frac{g\,Hx,\ yL}{n^2}$$

である。 だから

$$n^2\,f\,Hx,\ yL - m^2\,g\,Hx,\ yL = 0$$

となる。

これは円を表し、 その中心は線分ＡＢを$H-m^2L : n^2$ に分ける点、 つまり $m^2 : n^2$ に外分する点である。

ここで２つの円 $f\,Hx,\ yL = 0$, $g\,Hx,\ yL = 0$ の半径を限りなく０に近づければ、 できあがり。

[まとめ]

上の方程式

$$n^2\ f\ Hx,\ yL - m^2\ g\ Hx,\ yL = 0$$

つまり

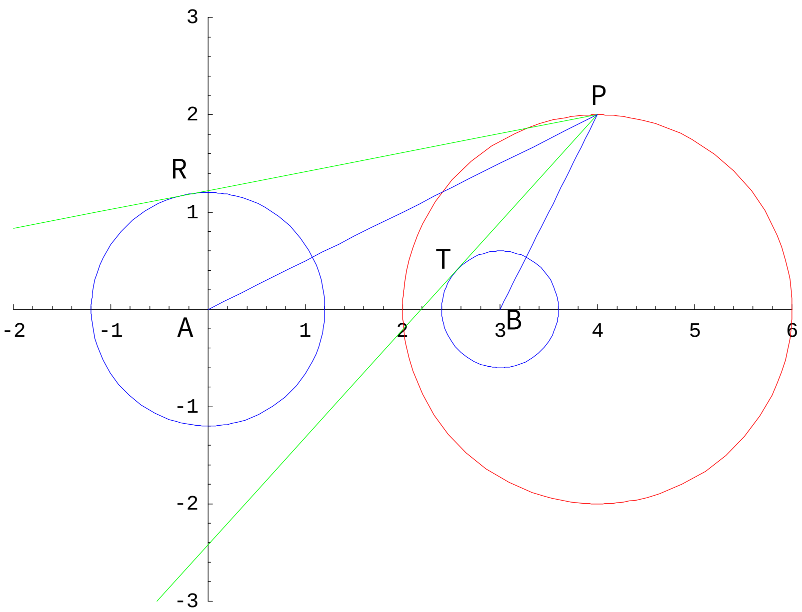
$$n^2\ 8Hx - a_1L^2 + Hy - b_1L^2 - r_1{}^2< - m^2\ 8Hx - a_2L^2 + Hy - b_2L^2 - r_2{}^2< = 0$$

は、もとの２つの円までの接線の長さの比が $m : n$ になる点の軌跡であり、円を表す。そしてその中心は線分ＡＢを $m^2 : n^2$ に外分する点である。

とくに

$$r_1 = m\,k,\ r_2 = n\,k,\ Hk \in \tilde{N}L$$

のとき、アポロニウスの円に一致する。（つまり２定点Ａ，Ｂからの距離の比が $m : n$ である点の軌跡になっている。）



H∵L 上の図で、 $r_1 = m\,k,\ r_2 = n\,k$ であるとき △PRA と △PTB は相似である。だから

$$\frac{PA}{PB} = \frac{PR}{PT} = \frac{m}{n}$$

Ì