課題学習における黄金比の取扱い

札幌大谷中学校・高等学校　非常勤講師　　中村　均

要　　約

本レポートの目的は，「数学Ⅰ」「数学Ａ」の教科書に提示されている黄金比の課題学習の内容をさらに発展させ，生徒の学習意欲を喚起する題材を提示することにある。

また，基礎的・基本的な知識・技能の習得が十分でない生徒に対しても，黄金比の近似値によって，身の回りの事象と関連付けることが可能な題材を提示する。

キーワード：ユークリッドの『原論』，黄金比，黄金分割，黄金長方形，黄金直角三角形，黄金比の近似式，フィボナッチ数列

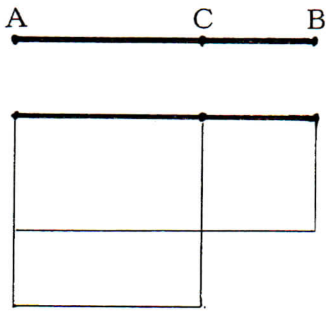
【キーワードの補足】

○ユークリッドの『原論』

「線分を大小２つに分けて，全体の大きい方に対する比が，大きい方の小さい方に対する比に等しくなるようにする」

「線分を大小２つに分けて，小さい方の線分ともとの線分全体とから作られる長方形の面積を，大きい方の線分を１辺とする正方形の面積と等しくする」

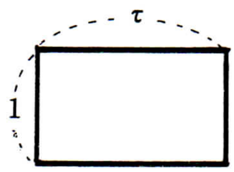
ＡＢ：ＡＣ＝ＡＣ：ＢＣ



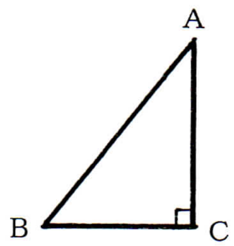
○黄金比　　　$1:\tau$　　$\left(\tau=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

○黄金分割　　　黄金比に分けられた長さの分割

○黄金長方形　　　縦と横の比が黄金比になっている長方形



○黄金直角三角形　　　∠Ｃ＝90°で，ＡＢ：ＡＣ＝ＡＣ：ＢＣとなる 直角三角形



○黄金比の近似式　　(1) $\tau \fallingdotseq \dfrac{8}{5}$　　(2) $\tau \fallingdotseq \left(\dfrac{4}{\pi}\right)^2$

○フィボナッチ数列　　$\{a_n\}$ ： 1，1，2，3，5，8，13，・・・　　$(a_{n+2}=a_{n+1}+a_n)$

1　はじめに

現行の学習指導要領では，既習の内容又はそれらを相互に関連付けた内容を生活と関連付けたり発展させたりするなどして，生徒の関心や意欲を高める課題を設け，生徒の主体的な学習を促し，数学のよさを認識するために，「数学Ⅰ」「数学Ａ」において課題学習が設定されている。

課題学習のテーマは教科書のいくつかの例示があるものの，具体的な授業の展開については，生徒の興味・関心，実体等に応じて現場の創意工夫に委ねられているところである。

本レポートでは，黄金比に焦点を当てて，まず，各教科書で取り扱っている課題学習の内容を分析する。次に，「数学Ⅰ」「数学Ａ」の学習段階におけるフィボナッチ数列の取扱いを提示する。さらに，黄金比の近似式を使ってピラミッドについての話題を提示する。

2　各教科書の黄金比に関する記載内容

各教科書の課題学習，研究，参考，数学探訪等の記載内容及び表紙裏等の写真をまとめたものが次の表である。

項目		数研出版				東京書籍			啓林館						実教出版						第一学習社		
		数I			数A	数I	数A		数I			数A		数活	数I		数A			数活	数I	数A	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
正五角形の辺と対角線の比は黄金比である。		○	○		○	○	○	○	○	○		○	○					○	○	○		○	○
正五角形の交わる２本の対角線は互いに他を黄金分割する。		○			○							○	○							○			
$\tau=2\cos 36^\circ$ $1/\tau=2\cos 72^\circ$		○																					
正五角形の作図					○		○	○				○	○				○		○			○	○
黄金長方形から短い辺を１辺とする正方形を取り除いてできる長方形も黄金長方形である。		○	○	○	○	○		○	○	○				○	○			○		○			
黄金長方形の作図				○	○															○			
黄金長方形と折り紙																				○			
$1:\tau \fallingdotseq 5:8$									○	○	○			○									
ユークリッドの『原論』			○						○	○	○									○			
黄金分割												○	○		○							○	
フィボナッチ数列														○						○			
身の回りの形	カード・名刺					○		○	○	○	○			○				○					
	新書判					○		○										○					
	小さい缶ジュース								○	○	○												
	オーム貝・ばい貝													○						○			
	カラスアゲハ																			○			
	ヒマワリの種の曲線配置																		○	○			
	白銀比との比較		○			○			○	○				○				○					
建造物	パルテノン神殿	○				○		○	○	○	○			○	○	○		○	○	○	○		
	ノートルダム寺院																			○			
	ピラミッド					○																	
芸術作品	ミロのビーナス	○						○						○					○				
	ﾚｵﾅﾙﾄﾞ・ﾀﾞ・ｳﾞｨﾝﾁ 人体図	○												○									
	ﾚｵﾅﾙﾄﾞ・ﾀﾞ・ｳﾞｨﾝﾁ 最後の晩餐																			○			
	富嶽三十六景 神奈川沖波裏							○												○			

〔数研出版〕　1) 数Ｉ310：数学Ｉ　2) 数Ｉ311：高等学校数学Ｉ　3) 数Ｉ312：新編数学Ｉ　4) 数A313：最新数学A

〔東京書籍〕　5) 数Ｉ303：新数学Ｉ　6) 数A301：数学A　7) 数A302：新編数学A

〔啓林館〕　8) 数Ｉ307：詳説数学Ｉ　9) 数Ｉ308：数学Ｉ　10) 数Ｉ309：新編数学Ｉ　11) 数A307：詳説数学A　12) 数A308：数学A　13) 数活302：数学活用

〔実教出版〕　14) 数Ｉ304：数学Ｉ　15) 数Ｉ305：新版数学Ｉ　16) 数A304：数学A　17) 数A305：新版数学A　18) 数A306：高校数学A　19) 数活301：数学活用

〔第一学習社〕　20) 数Ｉ316：新編数学Ｉ　21) 数A315：数学A　22) 数A316：新編数学A

前ページの表から，「数学Ⅰ」「数学A」の教科書の多くが，正五角形や星形五角形（五芒星），黄金長方形の中の相似な図形の相似比から二次方程式 $x^2-x-1=0$ に到達し，$x>0$ という条件から $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ を導いていることがわかる。

しかしながら，このプロセスは，基礎的・基本的な知識・技能の習得が十分でない生徒にとってはハードルが高く，結論に到達する前に息切れをしてしまうのが現状である。

身の回りの図形や歴史的建造物・絵画の図や写真の中から，5：8（1：1.6）の比になっているものを探し出す体験を通して 黄金長方形のイメージをしっかり作った後に，無理数の比 $1:\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ を導くプロセスの方が，基礎的・基本的な知識・技能の習得が十分でない生徒には，自然に受け入れられるのではないか。

さらに，「数学活用」の教科書で扱っているフィボナッチ数列に接することで，一見，無関係に見える事象が数学の世界で結びついているという驚きを体験することもできる。

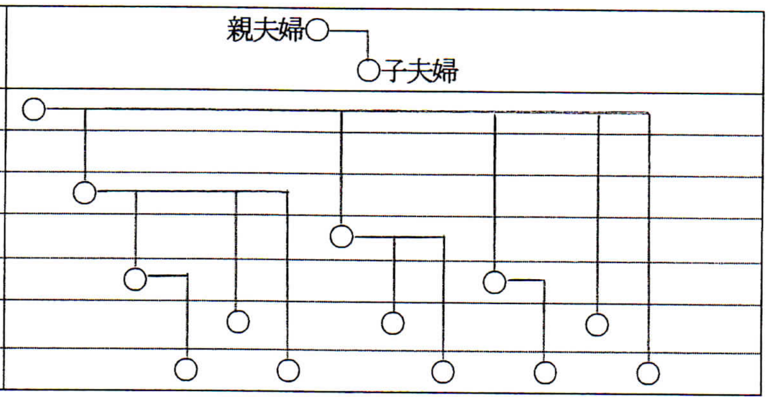
3 フィボナッチ数列と黄金比

フィボナッチの著書『リベル・アバキ』の中の有名な問題を生徒に提示する。

> 同年齢のウサギの夫婦がいる。ウサギは生後２か月で子どもを生むようになる。毎月，雄雌１組ずつ子どもを生み，それが新しいウサギの夫婦になるとき，６か月後には何組のウサギの夫婦ができるか。

生徒に次の表を完成させる。

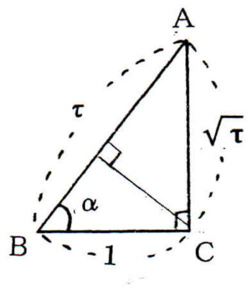
経過した月	夫婦の組の数
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13



1，1，2，3，5，8，13，・・・について，「数学B」の数列や「数学Ⅲ」の極限の話に深入りせず，隣り合う３つの数の関係や隣り合う２つの数の比（後の数／前の数）の性質を生徒に予想させ，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\tau$ のイメージを形づくる。

4 黄金直角三角形の導入

∠C＝90°，AB：AC＝AC：BC である黄金直角三角形ABCについて，三平方の定理より，次の関係を導く。



> AB：AC＝AC：BC＝1：$\sqrt{\tau}$
>
> ∠ABC＝αとすると，$\tan\alpha=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}=1.272\cdots$
>
> $\alpha\fallingdotseq 51.827°$

さらに，次の関係を導く。

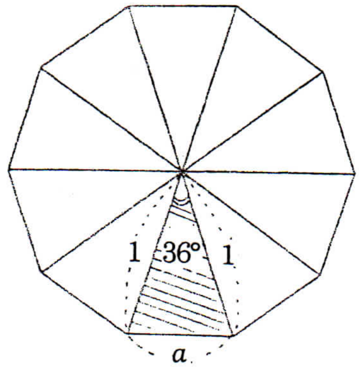
> 黄金直角三角形ABC（∠C＝90°）において，頂点Cから辺ABへ引いた垂線は，辺ABを黄金分割する。

5　円周率と黄金比

右の図のような正十角形の周の長さを求める問題を生徒に提示する。

余弦定理，$\tau = 2\cos 36°$，$1-\tau = -1/\tau$，$10a \fallingdotseq 2\pi$ より，次の近似式を導く。

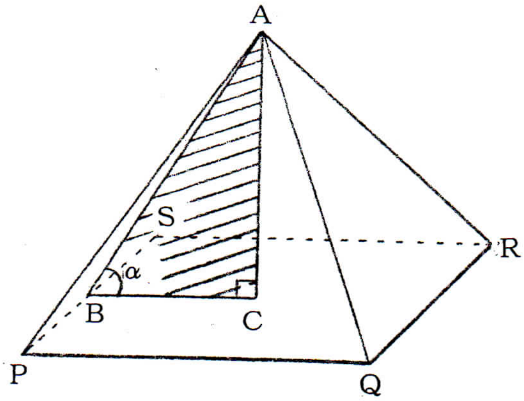
$$\boxed{\tau \fallingdotseq \left(\frac{4}{\pi}\right)^2}$$



6　ピラミッドと黄金比

エジプトのギザにあるクフ王のピラミッドは，１辺が約 230m の正方形を底面とし，高さが約 146m であることを生徒に提示する。

右の図で，頂点Ａから底面ＰＱＲＳに垂線ＡＣを下ろし，ＰＳの中点をＢとして直角三角形ＡＢＣを作る。



∠ＡＢＣ＝α とすると，ＡC=146，ＢＣ=115 だから，

$\tan\alpha = 1.269\cdots$

これは，直角三角形ＡＢＣを黄金直角三角形と見なしてもよいことを示している。このことから，次の関係を導く。

> ピラミッドの高さを１辺とする正方形の面積は，三角形の斜面の１つの面積に等しい。

さらに，黄金比の近似式 $\tau \fallingdotseq \left(\frac{4}{\pi}\right)^2$ により，次の関係を導く。

> ピラミッドの高さは，底面の正方形の周の長さに等しい円周をもつ円の半径に一致する。

7　おわりに

本レポートでは，黄金比の課題学習を発展させる試みの１つを提示した。具体的に授業を展開する際には，生徒が互いに自分の考えを発表したり，討論したりする場面を想定し，評価の観点を組み入れ，生徒の数学的活動が一層充実するような学習指導案の作成が求められている。

参考文献

文部科学省（2009），高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編，実教出版

吉田明史編（2011），高等学校新学習指導要領の展開 数学科編，明治図書

コクセター，銀林浩訳（1965），幾何学入門，明治図書

岩田至康編（1971），幾何学大辞典１，槇書店

数学セミナー臨時増刊（1972），数学１００の発見，日本評論社

デービッド・バーガミニ，藪内清訳（1975），数の世界，タイムライフブック

マイケルイ・ホルト，西田稔訳（1976），芸術における数学，紀伊國屋書店

遠山啓（1979），数楽サロン，ほるぷ出版

Ｊ．Ｐ．ロエール，酒井傳六訳（1973），ピラミッドの謎，法政大学出版局

吉村作治（1979），ピラミッドの謎，講談社

アンドレ・ポシャン，青木伸美訳（1982），ピラミッドの謎はとけた，大陸書房