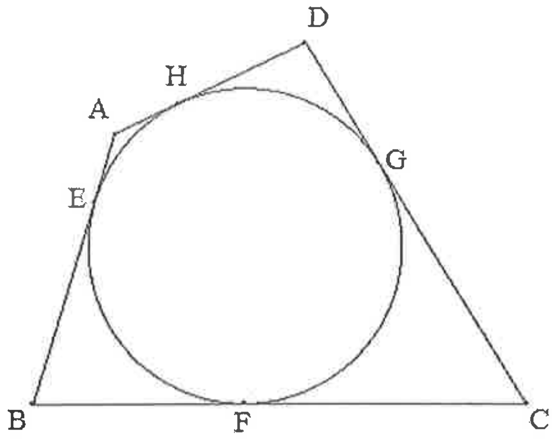
立命館慶祥中学校・高等学校教諭　時岡郁夫
tokioka@spc.ritsumei.ac.jp

円に外接する四角形の面積の公式

1　はじめに

次の問題は中学生に解けるだろうか。

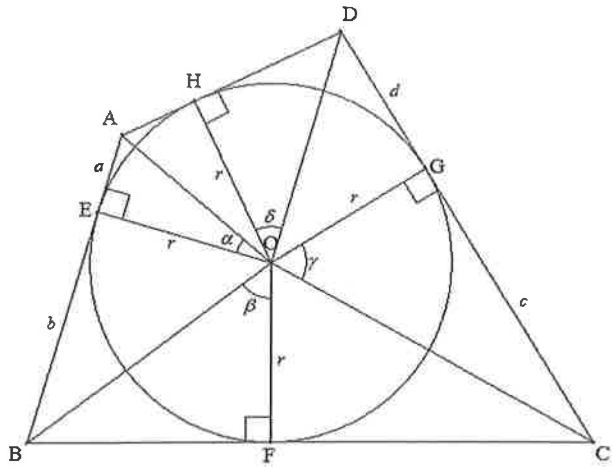
> 四角形 ABCD の内接円と AB，BC，CD，DA との接点をそれぞれ E，F，G，H とする。
> AE＝1，EB＝3，CG＝4，GD＝2 のとき，四角形 ABCD の面積を求めよ。



2　問題の一般化

（解）円の中心を O，半径を r とおく。

$\angle$AOE$=\alpha$，$\angle$BOF$=\beta$，$\angle$COG$=\gamma$，$\angle$DOH$=\delta$ とおくと，



$$\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{r^2+a^2}},\cos\alpha=\frac{r}{\sqrt{r^2+a^2}},$$
$$\sin\beta=\frac{b}{\sqrt{r^2+b^2}},\cos\beta=\frac{r}{\sqrt{r^2+b^2}},\qquad\cdots①$$
$$\sin\gamma=\frac{c}{\sqrt{r^2+c^2}},\cos\gamma=\frac{r}{\sqrt{r^2+c^2}},$$
$$\sin\delta=\frac{d}{\sqrt{r^2+d^2}},\cos\delta=\frac{r}{\sqrt{r^2+d^2}}$$

である。

また，$\alpha+\beta+\gamma+\delta=180°$ であるから

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\gamma+\delta)$$

加法定理より　$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin\gamma\cos\delta+\cos\gamma\sin\delta$

これに①を代入すると

$$\frac{a}{\sqrt{r^2+a^2}}\times\frac{r}{\sqrt{r^2+b^2}}+\frac{r}{\sqrt{r^2+a^2}}\times\frac{b}{\sqrt{r^2+b^2}}=\frac{c}{\sqrt{r^2+c^2}}\times\frac{r}{\sqrt{r^2+d^2}}+\frac{r}{\sqrt{r^2+c^2}}\times\frac{d}{\sqrt{r^2+d^2}}$$

両辺に $\dfrac{\sqrt{r^2+a^2}\sqrt{r^2+b^2}\sqrt{r^2+c^2}\sqrt{r^2+d^2}}{r}$ をかけると

$$(a+b)\sqrt{r^2+c^2}\sqrt{r^2+d^2}=(c+d)\sqrt{r^2+a^2}\sqrt{r^2+b^2}\qquad\cdots②$$

両辺を平方して左辺に移項すると

$$(a+b)^2(r^2+c^2)(r^2+d^2)-(c+d)^2(r^2+a^2)(r^2+b^2)=0$$

r について整理すると

$$\left\{(a+b)^2-(c+d)^2\right\}r^4+\left\{(a+b)^2(c^2+d^2)-(c+d)^2(a^2+b^2)\right\}r^2+\left\{(a+b)^2c^2d^2-(c+d)^2a^2b^2\right\}=0$$

$$\left\{(a+b)+(c+d)\right\}\left\{(a+b)-(c+d)\right\}r^4+\left\{2ab(c^2+d^2)-2cd(a^2+b^2)\right\}r^2$$
$$+\left\{(a+b)cd+(c+d)ab\right\}\left\{(a+b)cd-(c+d)ab\right\}=0$$

r^2 についての２次式とみて，たすきがけを考える

$$\begin{array}{lll} (a+b)+(c+d) & & -ab(c+d)-cd(a+b) \to -ab(a+b)(c+d)-cd(a+b)^2 \\ & & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +ab(c+d)^2+cd(a+b)(c+d) \\ (a+b)-(c+d) & & ab(c+d)-cd(a+b) \to ab(a+b)(c+d)-cd(a+b)^2 \\ & & \qquad\qquad\qquad +\qquad\qquad +ab(c+d)^2-cd(a+b)(c+d) \\ \hline & & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2ab(c^2+d^2)-2cd(a^2+b^2) \end{array}$$

因数分解すると

$$\left[(a+b+c+d)r^2-\{ab(c+d)+cd(a+b)\}\right]\left[(a+b-c-d)r^2+\{ab(c+d)-cd(a+b)\}\right]=0$$

［1］ $a+b=c+d$ のとき

$$r^2=\frac{ab(c+d)+cd(a+b)}{a+b+c+d}$$

［2］ $a+b\neq c+d$ のとき

$$r^2=\frac{ab(c+d)+cd(a+b)}{a+b+c+d},\ -\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{a+b-(c+d)}$$

いずれにしても，$r^2>0$，　$r>0$ より　$r=\sqrt{\dfrac{ab(c+d)+cd(a+b)}{a+b+c+d}}$　…③

よって　四角形ABCDの面積をＳとおくと

Ｓ＝△OAB+△OBC+△OCD+△ODA

$$=\frac{1}{2}r\,\mathrm{AB}+\frac{1}{2}r\,\mathrm{BC}+\frac{1}{2}r\,\mathrm{CD}+\frac{1}{2}r\,\mathrm{DA}=\frac{1}{2}r\,(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CD}+\mathrm{DA})$$

$$=\frac{1}{2}r\{(a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+a)\}=(a+b+c+d)r$$

$$=(a+b+c+d)\sqrt{\frac{ab(c+d)+cd(a+b)}{a+b+c+d}}\qquad \text{（③を代入）}$$

$$=\sqrt{(a+b+c+d)\{(a+b)cd+ab(c+d)\}}=\sqrt{(AB+CD)(ABcd+abCD)}\qquad\cdots④$$

$$=\sqrt{(a+b+c+d)(abc+abd+acd+bcd)}\qquad\cdots⑤$$

円に外接する四角形の面積の公式　$S=\sqrt{(AB+CD)(ABcd+abCD)}$

3　終わりに

この公式は，特に文献を見ないで作成した。どこかに掲載されているだろうか。また，公式はアルファベット順にABCD，ABcd，abCDと現れているので，覚えやすい。

ただ，解答に三角関数を利用しているので，現時点では中学生には無理のように思われる。中学生にもわかる求め方はあるのだろうか。

なお、はじめの問題は，公式Ｓ＝$\sqrt{(AB+CD)(ABcd+abCD)}$ において，

$a=1,b=3,c=4,d=2,AB=1+3=4,CD=4+2=6$ の場合であるから

Ｓ＝$\sqrt{(4+6)(4\times4\times2+1\times3\times6)}=\sqrt{10\times50}=10\sqrt{5}$　…（答）

と求められる。

補足として，⑤の形の面積の公式は a,b,c,d についての対称式であるから，

$a=1,b=3,c=4,d=2$ の長さの順番を変えても面積は変わらない。（③で求められる内接円の半径も変わらない。）

また，今回の計算の副産物として，②より，

円 O に外接する四角形 ABCD について　AB・OC・OD＝CD・OA・OB

という性質が発見できた。この性質を，中学生レベルで求められれば，今回の円に外接する四角形の面積は中学生にも求められることになる。

最後に，蛇足として，次のような問題を考えた。

4 次方程式 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ が 4 つの正の解 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ をもつとき，解と係数の関係から

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=-a, \alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=-c$ である。⑤より，

四角形 ABCD の内接円と AB，BC，CD，DA との接点をそれぞれ E，F，G，H とする。
4 次方程式 $x^4-10x^3+35x^2-49x+21=0$ は 4 つの正の解 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ を持つことが知られている。
α＝AE，β＝EB，γ＝CG，δ＝GD であるとき，四角形 ABCD の面積を求めよ。

（答．$\sqrt{10\times 49}=7\sqrt{10}$）

(2016/12/12)

立命館慶祥中学校・高等学校教諭　時岡郁夫
tokioka@spc.ritsumei.ac.jp

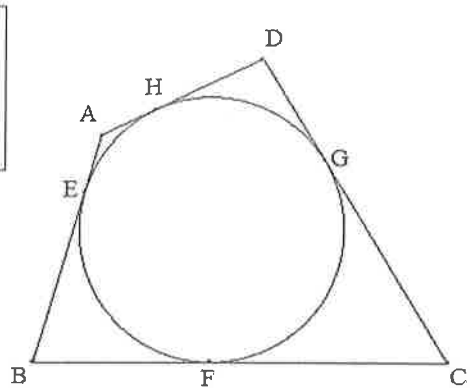
円に外接する n 角形の面積

3　はじめに

前回の「円に外接する四角形の面積の公式」の続編である。これを書くきっかけは2つある。

1つ目は，「次の問題は中学生に解けるだろうか」で，最初のレポートを書き始めた。

> 四角形 ABCD の内接円と AB，BC，CD，DA との接点をそれぞれ E，F，G，H とする。
> AE＝1，EB＝3，CG＝4，GD＝2 のとき，四角形 ABCD の面積を求めよ。



本校の教員2名に見てもらうと，見たことのないパターンとの回答。

前回のレポートを作成した後，本校の中学2年生のT君に出題したら，答は勿論正しく，しかもその求め方は私が考えたものより簡単だったので，紹介したいと思ったから。

2つ目は，そのT君の求め方で円に外接する多角形の面積を，五角形，六角形，七角形，・・・と順に求めていくと，きれいな形で法則が見つかったからである。

4　T君の求め方

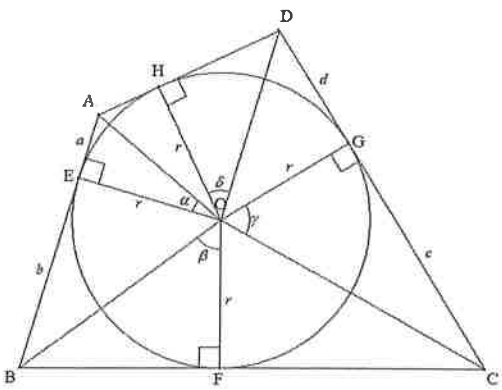
T君のメモを見ると，最初から四角形の4辺を a,b,c,d とおいて，求めていた。

> 四角形 ABCD の内接円と AB，BC，CD，DA との接点をそれぞれ E，F，G，H とする。AE＝a，EB＝b，CG＝c，GD＝d のとき，四角形 ABCD の面積を求めよ。

(解) 円の中心を O，半径を r とおく。

$\angle AOE=\alpha$，$\angle BOF=\beta$，$\angle COG=\gamma$，$\angle DOH=\delta$ とおくと，

$\tan\alpha=\dfrac{a}{r}, \tan\beta=\dfrac{b}{r}, \tan\gamma=\dfrac{c}{r}, \tan\delta=\dfrac{d}{r}$　である。



また，$\alpha+\beta+\gamma+\delta=180°$ であるから

$$\tan(\alpha+\beta)+\tan(\gamma+\delta)=0 \quad \cdots①$$

正接の加法定理より

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{a}{r}+\frac{b}{r}}{1-\frac{a}{r}\times\frac{b}{r}}=\frac{(a+b)r}{r^2-ab}$$

同様に，$\tan(\gamma+\delta)=\dfrac{\tan\gamma+\tan\delta}{1-\tan\gamma\tan\delta}=\dfrac{(c+d)r}{r^2-cd}$

これらを①に代入すると

$$\frac{(a+b)r}{r^2-ab}+\frac{(c+d)r}{r^2-cd}=0$$

両辺に $\dfrac{(r^2-ab)(r^2-cd)}{r}$ をかけると

$$(a+b)(r^2-cd)+(c+d)(r^2-ab)=0$$

r について整理すると

$$(a+b+c+d)r^2-(abc+abd+acd+bcd)=0$$

$$\therefore r^2 = \frac{abc+abd+acd+bcd}{a+b+c+d}$$

$r>0$ より　$r = \sqrt{\dfrac{abc+abd+acd+bcd}{a+b+c+d}}$　…②

よって　四角形 ABCD の面積を S とおくと

S＝△OAB+△OBC+△OCD+△ODA

$$= \frac{1}{2}r\{(a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+a)\} = (a+b+c+d)r$$

$$= (a+b+c+d)\sqrt{\frac{abc+abd+acd+bcd}{a+b+c+d}}$$　（②を代入）

$$= \sqrt{(a+b+c+d)(abc+abd+acd+bcd)}$$　…（答）

5　円に外接する n 角形の面積

n 角形 $A_1A_2\cdots A_n(n\geqq 3)$ の内接円と A_iA_{i+1} との接点を $B_i(i=1,2,\cdots,n-1)$，A_nA_1 との接点を B_n とする。$A_iB_i=a_i(i=1,2,\cdots,n)$ とおくとき，n 角形の面積を求めよ。

（解）円の中心を O，半径を r とおくと，n 角形の面積 S は

S＝$\triangle OA_1A_2 + \triangle OA_2A_3 + \cdots + \triangle OA_nA_1$

$$= \frac{1}{2}(a_1+a_2)r + \frac{1}{2}(a_2+a_3)r + \cdots + \frac{1}{2}(a_n+a_1)r = (a_1+a_2+\cdots+a_n)r = f_1 r$$ となる。

ただし，$f_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i$

【法則】 半径 r は次の方程式を満たす。

［1］　$n=3,4$ のとき，$f_1r^2 - f_3 = 0$
［2］　$n=5,6$ のとき，$f_1r^4 - f_3r^2 + f_5 = 0$
［3］　$n=7,8$ のとき，$f_1r^6 - f_3r^4 + f_5r^2 - f_7 = 0$（以下，同様）

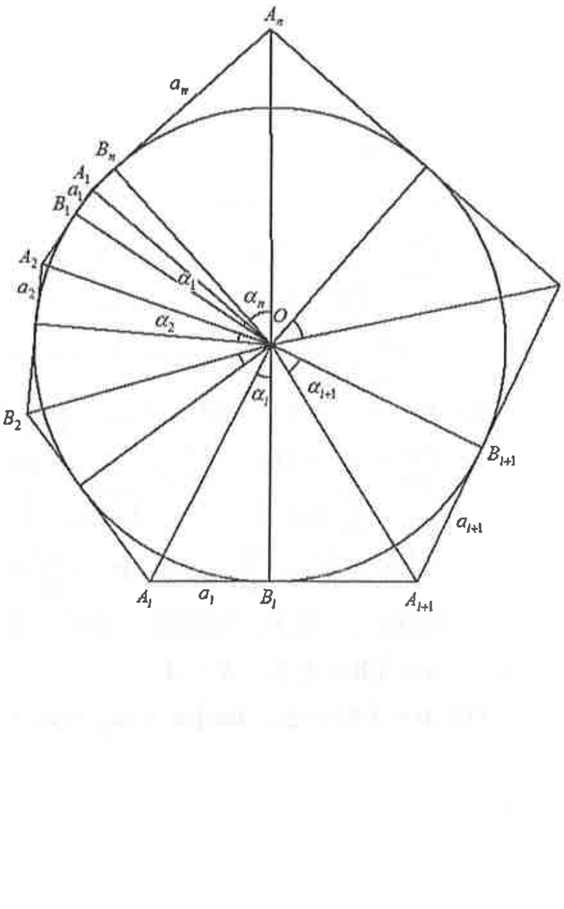
ただし，$f_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i$　（n 項の和），

$f_3 = \sum_{i,j,k\ \text{は異なる}} a_ia_ja_k$　（${}_nC_3$ 項の和），

$f_5 = \sum_{i,j,k,l,m\ \text{は異なる}} a_ia_ja_ka_la_m$　（${}_nC_5$ 項の和），

$f_7 = \sum_{i,j,k,l,m,p,q\ \text{は異なる}} a_ia_ja_ka_la_ma_pa_q$　（${}_nC_7$ 項の和）は，

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ の対称式である。



さて，$\angle A_iOB_i = \alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$ とおくと，$\tan\alpha_i = \dfrac{a_i}{r}$

である。

証明の前に，正接の加法定理を列記しておく。

$$\tan(\alpha_1+\alpha_2)=\frac{\tan\alpha_1+\tan\alpha_2}{1-\tan\alpha_1\tan\alpha_2}=\frac{\dfrac{a_1}{r}+\dfrac{a_2}{r}}{1-\dfrac{a_1}{r}\times\dfrac{a_2}{r}}=\frac{(a_1+a_2)r}{r^2-a_1a_2}=\frac{\left(\sum a_i\right)r}{r^2-\Pi a_i}$$ とおく。

同様に，$\tan(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\dfrac{\sum\tan\alpha_i-\Pi\tan\alpha_i}{1-\sum\tan\alpha_i\tan\alpha_j}=\dfrac{\left(\sum a_i\right)r^2-\Pi a_i}{r^3-\left(\sum a_ia_j\right)r}$

$$\tan(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)=\frac{\sum\tan\alpha_i-\sum\tan\alpha_i\tan\alpha_j\tan\alpha_k}{1-\sum\tan\alpha_i\tan\alpha_j+\Pi\tan\alpha_i}=\frac{\left(\sum a_i\right)r^3-\left(\sum a_ia_ja_k\right)r}{r^4-\left(\sum a_ia_j\right)r^2+\Pi a_i}$$

（法則の証明）$\sum\alpha_i=\pi$ であるから

$\tan(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)+\tan(\alpha_{k+1}+\alpha_{k+2}+\cdots+\alpha_n)=0$ である。

ただし，$k=\begin{cases}\dfrac{n+1}{2}\ (n\text{が奇数のとき})\\ \dfrac{n}{2}\ (n\text{が偶数のとき})\end{cases}$ と定める。

［1］　$n=3,4$ のとき，$k=2$

(1) $n=3$ のとき，$\tan(\alpha_1+\alpha_2)+\tan\alpha_3=0$

$$\frac{\left(\sum a_i\right)r}{r^2-\Pi a_i}+\frac{a_3}{r}=0$$

$$\therefore\left(\sum a_i\right)r^2-\Pi a_i=0\cdots(1,1)$$

(2) $n=4$ のとき，$\tan(\alpha_1+\alpha_2)+\tan(\alpha_3+\alpha_4)=0$

$$\frac{\left(\sum a_i\right)r}{r^2-\Pi a_i}+\frac{\left(\sum a_j\right)r}{r^2-\Pi a_j}=0$$

$r\neq0$ より，$\left(\sum a_i\right)r^2-\sum a_ia_ja_k=0\cdots(1,2)$

$f_1=\sum_{i=1}^{n}a_i$ （n 項の和），$f_3=\sum_{\substack{i,j,k\\ \text{は異なる}}}a_ia_ja_k$ （${}_nC_3$ 項の和）とおくと，

(1,1)，(1,2)は，$f_1r^2-f_3=0$ とまとめられる。

［2］　$n=5,6$ のとき，$k=3$

(1) $n=5$ のとき，$\tan(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+\tan(\alpha_4+\alpha_5)=0$

$$\frac{\left(\sum a_i\right)r^2-\Pi a_i}{r^3-\left(\sum a_ia_j\right)r}+\frac{\left(\sum a_j\right)r}{r^2-\Pi a_j}=0$$

$$\therefore\left(\sum a_i\right)r^4-\left(\sum a_ia_ja_k\right)r^2+\Pi a_i=0\cdots(2,1)$$

(2) $n=6$ のとき，$\tan(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+\tan(\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6)=0$

$$\frac{\left(\sum a_i\right)r^2-\Pi a_i}{r^3-\left(\sum a_ia_j\right)r}+\frac{\left(\sum a_k\right)r^2-\Pi a_k}{r^3-\left(\sum a_ka_l\right)r}=0$$

$$\therefore\left(\sum a_i\right)r^4-\left(\sum a_ia_ja_k\right)r^2+\sum a_ia_ja_ka_la_m=0\cdots(2,2)$$

同様に，(2,1)，(2,2)は，$f_1r^4-f_3r^2+f_5=0$ とまとめられる。

［3］　$n=7,8$ のとき，$k=4$

(1) $n=7$ のとき，$\tan(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)+\tan(\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7)=0$

$$\frac{\left(\sum a_i\right)r^3-\left(\sum a_ia_ja_k\right)r}{r^4-\left(\sum a_ia_j\right)r^2+\Pi a_i}+\frac{\left(\sum a_l\right)r^2-\Pi a_l}{r^3-\left(\sum a_la_m\right)r}=0$$

$$\therefore \left(\sum a_i\right)r^6-\left(\sum a_ia_ja_k\right)r^4+\left(\sum a_ia_ja_ka_la_m\right)r^2-\Pi a_i=0\cdots(3,1)$$

(2) $n=8$のとき, $\tan(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)+\tan(\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7+\alpha_8)=0$

$$\frac{\left(\sum a_i\right)r^3-\left(\sum a_ia_ja_k\right)r}{r^4-\left(\sum a_ia_j\right)r^2+\Pi a_i}+\frac{\left(\sum a_l\right)r^3-\left(\sum a_la_ma_p\right)r}{r^4-\left(\sum a_la_m\right)r^2+\Pi a_l}=0$$

$$\therefore \left(\sum a_i\right)r^6-\left(\sum a_ia_ja_k\right)r^4+\left(\sum a_ia_ja_ka_la_m\right)r^2-\sum a_ia_ja_ka_la_ma_pa_q=0\cdots(3,2)$$

同様に, (3,1), (3,2)は, $f_1r^6-f_3r^4+f_5r^2-f_7=0$とまとめられる。■

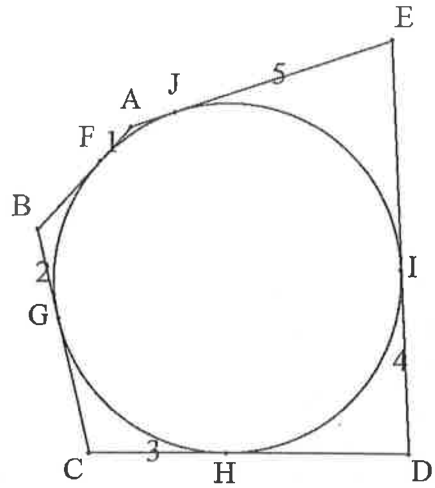
$\boxed{例 1}$ $a=1,b=2,c=3,d=4$のとき（円に外接する四角形の面積：冒頭の問題と同値）

$f_1=1+2+3+4=10$, $f_3=1\cdot2\cdot3+1\cdot2\cdot4+1\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4=50$

rの満たす方程式は　$10r^2-50=0$　　題意に適するのは　$r=\sqrt{5}$

よって　$S=f_1r=10\times\sqrt{5}=10\sqrt{5}$　$\cdots$（答）

$\boxed{例 2}$ $a=1,b=2,c=3,d=4,e=5$のとき（円に外接する五角形の面積）



$f_1=1+2+3+4+5=15$,

$f_3=1\cdot2\cdot3+1\cdot2\cdot4+1\cdot2\cdot5+1\cdot3\cdot4+1\cdot3\cdot5+1\cdot4\cdot5$
$\quad+2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot5+2\cdot4\cdot5+3\cdot4\cdot5=225$,

$f_5=5!=120$であるから, rの満たす方程式は

$15r^4-225r^2+120=0$　$\therefore r^4-15r^2+8=0$

題意に適するのは

$$r=\sqrt{\frac{15+\sqrt{193}}{2}}$$

$(=3.8008184)$

よって

$$S=f_1r=15\times\sqrt{\frac{15+\sqrt{193}}{2}}=\frac{15\sqrt{30+2\sqrt{193}}}{2}\quad\cdots（答）$$

$(=57.012276)$

$\boxed{例 3}$ $a=1,b=2,c=3,d=4,e=5,f=6,g=7$のとき（円に外接する七角形の面積）

$f_1=1+2+3+4+5+6+7=28$,

$f_3=1\cdot2\cdot3+1\cdot2\cdot4+1\cdot2\cdot5+1\cdot2\cdot6+1\cdot2\cdot7+1\cdot3\cdot4+1\cdot3\cdot5+1\cdot3\cdot6+1\cdot3\cdot7$
$\quad+1\cdot4\cdot5+1\cdot4\cdot6+1\cdot4\cdot7+1\cdot5\cdot6+1\cdot5\cdot7+1\cdot6\cdot7+2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot5+2\cdot3\cdot6$
$\quad+2\cdot3\cdot7+2\cdot4\cdot5+2\cdot4\cdot6+2\cdot4\cdot7+2\cdot5\cdot6+2\cdot5\cdot7+2\cdot6\cdot7+3\cdot4\cdot5+3\cdot4\cdot6$
$\quad+3\cdot4\cdot7+3\cdot5\cdot6+3\cdot5\cdot7+3\cdot6\cdot7+4\cdot5\cdot6+4\cdot5\cdot7+4\cdot6\cdot7+5\cdot6\cdot7=1960$,

$f_5=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5+1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6+1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot7+1\cdot2\cdot3\cdot5\cdot6+1\cdot2\cdot3\cdot5\cdot7+1\cdot2\cdot3\cdot6\cdot7$
$\quad+1\cdot2\cdot4\cdot5\cdot6+1\cdot2\cdot4\cdot5\cdot7+1\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7+1\cdot2\cdot5\cdot6\cdot7+1\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6+1\cdot3\cdot4\cdot5\cdot7$
$\quad+1\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7+1\cdot3\cdot5\cdot6\cdot7+1\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7+2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6+2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot7+2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7$
$\quad+2\cdot3\cdot5\cdot6\cdot7+2\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7+3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7=13132$

$f_7=7!=5040$であるから, rの満たす方程式は

$28r^6-1960r^4+13132r^2-5040=0$　$\therefore r^6-70r^4+469r^2-180=0$

残念ながら, カルダノの公式を使って解を表しても意味がないので, 近似値のみ。

題意に適するのは　$r=7.9087127153$

よって　$S=f_1r=28\times7.9087127153=221.443956$　$\cdots$（答）

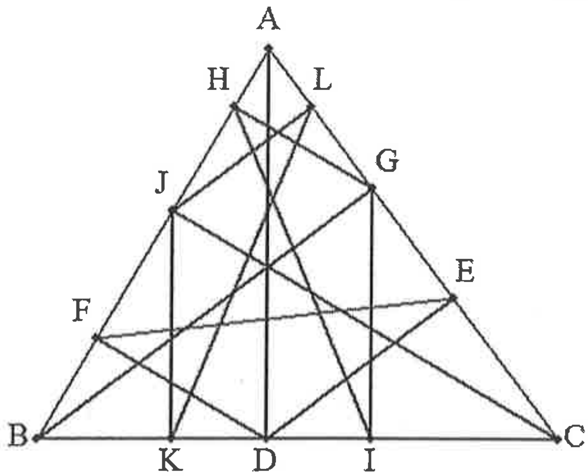
4　終わりに

三角形ABCの内接円とAB，BC，CAとの接点をそれぞれD，E，Fとし，AD＝a，BE＝b，CF＝cとすると，法則［1］から，$f_1=a+b+c, f_3=abc, f_1r^2-f_3=0$より，$r=\sqrt{\dfrac{abc}{a+b+c}}$，三角形ABCの面積Sは，S＝$f_1r=\sqrt{abc(a+b+c)}$と求められる。和算家が知っていたヘロンの公式に相当するものである。

なお，T君のメモには，この結果も書いてあった。T君は現時点で数検準1級を持っているとのこと。かなりの力の持ち主である。

冬休みに入る前にT君に出題した問題を紹介して，今回のレポートを終わりとする。問題は私のオリジナルで，(1)は中学生レベル。

（問題）
△ABCにおいて，頂点AからBCに下ろした垂線の足をD，DからCA，ABに下ろした垂線の足を，それぞれE，Fとする。
同様に，頂点BからCAに下ろした垂線の足をG，GからAB，BCに下ろした垂線の足を，それぞれH，Iとし，頂点CからABに下ろした垂線の足をJ，JからBC，CAに下ろした垂線の足を，それぞれK，Lとする。このとき
(1) EF＝HI＝KLとなることを証明せよ。
(2) △ABCの面積をSとし，GHとJL，DFとJK，DEとGIとの交点をそれぞれP，Q，Rとする。六角形PJQDRGの面積は$4S\cos A\cos B\cos C$となることを証明せよ。



（2016/12/19）