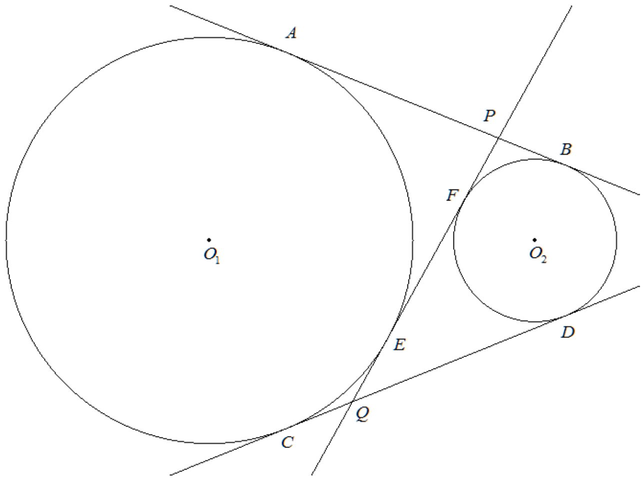
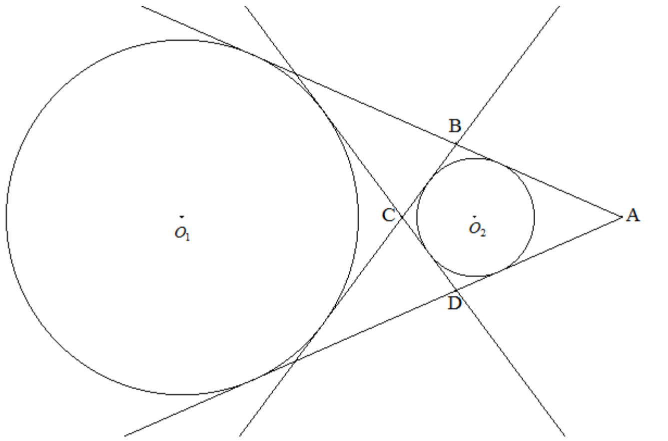
第 107 回数学教育実践研究会資料　　(2018/12/1　於アスティ 45 ビル 10 階)
立命館慶祥中学校・高等学校教諭　時岡郁夫

# 2 円と接線に関する問題

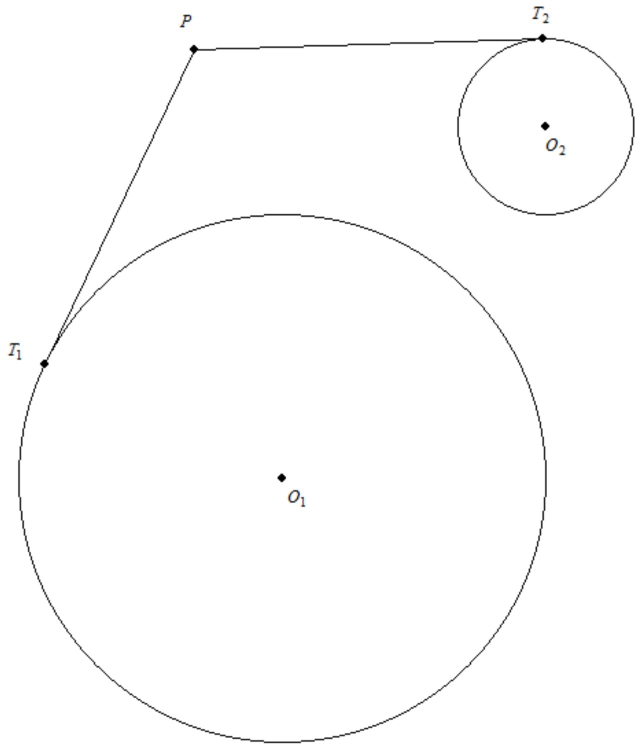
$\boxed{1}$　2 円 $O_1, O_2$ の半径をそれぞれ $r_1, r_2$，中心間の距離を $d(>r_1+r_2)$ とする。2 円 $O_1, O_2$ の共通外接線 AB と共通内接線 EF の交点を P とする。PB を求めよ。



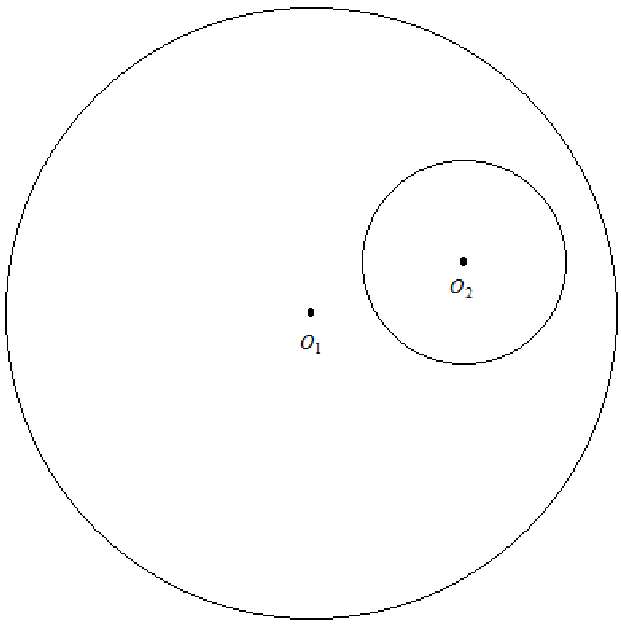

$\boxed{2}$　2 円 $O_1, O_2$ の半径をそれぞれ $r_1, r_2(r_1>r_2)$，中心間の距離を $d(>r_1+r_2)$ とする。2 本の共通外接線と 2 本の共通内接線で囲まれた凸四角形 ABCD の面積を求めよ。




$\boxed{3}$　2 円に引いた接線の長さが等しい点の軌跡を求めよ。




$\boxed{4}$　一方が他方の内部にある 2 円が与えられたとき，2 円に引いた接線の長さが等しい点の軌跡を作図せよ。




（解）

(1)　2 円の共通外接線および共通内接線の長さはそれぞれ，AB＝$\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}$，EF＝$\sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}$ である。

PB=PF＝$p$，QC＝QE＝$q$ とおくと，

AB＝AP＋$p$＝EP＋$p$＝EF＋$2p$…①

CD＝CQ＋QD＝$q$＋QF＝$2q$＋EF…②

AB=CD であるから，①，②より　$p=q$　…③

このとき，①より PB＝$p=\dfrac{AB-CD}{2}=\dfrac{\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}-\sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}}{2}$ …（答）

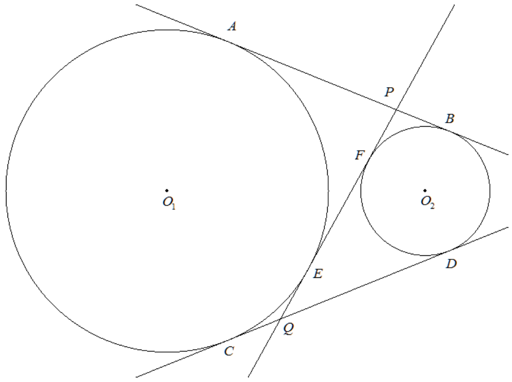
（例）$r_1=\dfrac{17}{2}, r_2=\dfrac{7}{2}, d=13$ のとき，PB＝$\dfrac{\sqrt{13^2-\left(\dfrac{17}{2}-\dfrac{7}{2}\right)^2}-\sqrt{13^2-\left(\dfrac{17}{2}+\dfrac{7}{2}\right)^2}}{2}=\dfrac{7}{2}$…（答）

③より，次の定理が得られる。

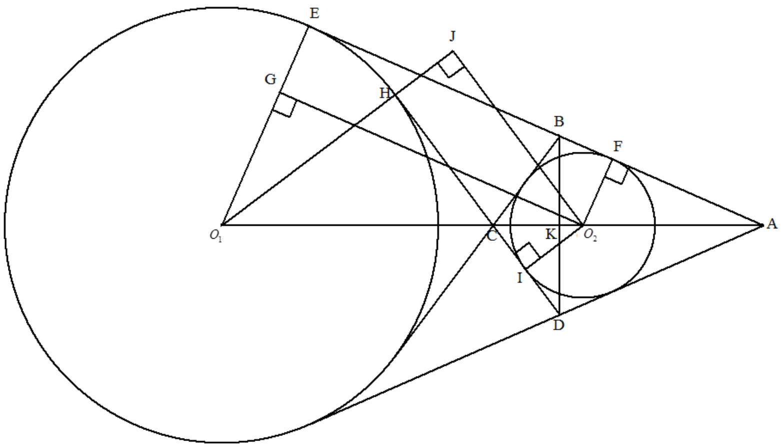
（定理）　2円 $O_1, O_2$ の2つの共通外接線と1つの共通内接線の交点をそれぞれ P，Q とする。

[1]　P から円 $O_1$ に引いた接線の長さと Q から円 $O_2$ に引いた接線の長さは等しい。

[2]　Q から円 $O_1$ に引いた接線の長さと P から円 $O_2$ に引いた接線の長さは等しい。




⑵　図のように，外共通接線 AB と2円 $O_1, O_2$ との接点をそれぞれ E，F，$O_2$ から $O_1E$ に下した垂線の足を G，内共通接線 CD と2円 $O_1, O_2$ との接点をそれぞれ H，I，$O_2$ から $O_1H$ の延長に下した垂線の足を J とする。また，BD と CA の交点を K,




$\angle GO_1O_2=\angle FO_2A=\angle ABD=\alpha,$
$\angle JO_1O_2=\angle IO_2C=\angle CBD=\beta$

とする。

直角三角形 $GO_1O_2$ の3辺は，$O_1O_2=d, O_1G=r_1-r_2, O_2G=\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}$ である。

$\triangle GO_1O_2 \backsim \triangle FO_2A$ で，$O_2F=r_2$ であるから，$(r_1-r_2):r_2=d:O_2A$ より，$O_2A=\dfrac{r_2d}{r_1-r_2}$　…①

直角三角形 $JO_1O_2$ の3辺は，$O_1O_2=d, O_1J=r_1+r_2, O_2J=\sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}$ である。

$\triangle JO_1O_2 \backsim \triangle IO_2C$ で，$O_2I=r_2$ であるから，$(r_1+r_2):r_2=d:O_2C$ より，$O_2C=\dfrac{r_2d}{r_1+r_2}$　…②

①，②より CA＝$\dfrac{r_2d}{r_1-r_2}+\dfrac{r_2d}{r_1+r_2}=\dfrac{2r_1r_2d}{(r_1-r_2)(r_1+r_2)}$　…③

次に，$\angle KBA=\alpha, \angle KBC=\beta$ であるから，KA=BK$\tan\alpha$，CK=BK$\tan\beta$ より CA=BK$(\tan\alpha+\tan\beta)$ $\cdots$④

③，④より BK=$\dfrac{2r_1r_2d}{(r_1-r_2)(r_1+r_2)}\times\dfrac{1}{\tan\alpha+\tan\beta}$

四角形ABCD の面積をSとおくと

S＝$\dfrac{1}{2}$CA×BD＝CA×BK＝$\dfrac{2r_1r_2d}{(r_1-r_2)(r_1+r_2)}\times\left\{\dfrac{2r_1r_2d}{(r_1-r_2)(r_1+r_2)}\times\dfrac{1}{\tan\alpha+\tan\beta}\right\}$

ここで，

$$\frac{1}{\tan\alpha+\tan\beta}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\tan^2\alpha-\tan^2\beta}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{(1+\tan^2\alpha)-(1+\tan^2\beta)}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\dfrac{1}{\cos^2\beta}}=(\tan\alpha-\tan\beta)\times\frac{\cos^2\alpha\cos^2\beta}{\cos^2\beta-\cos^2\alpha}$$

この式に，$\cos\alpha=\dfrac{r_1-r_2}{d}, \cos\beta=\dfrac{r_1+r_2}{d}$ を代入すると

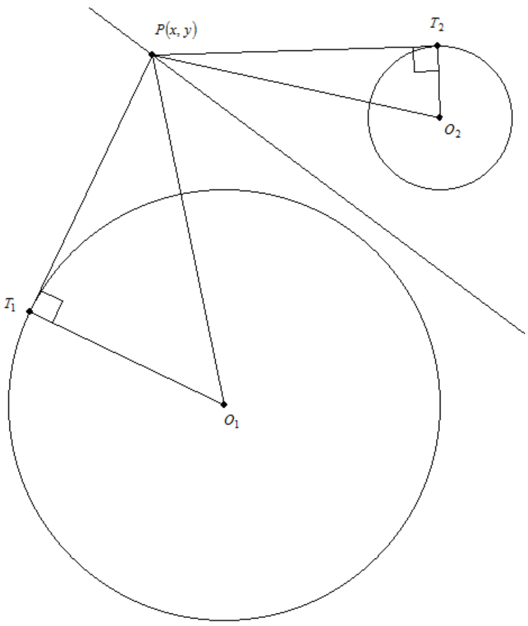
$$\frac{1}{\tan\alpha+\tan\beta}=(\tan\alpha-\tan\beta)\times\frac{\left(\dfrac{r_1-r_2}{d}\right)^2\left(\dfrac{r_1+r_2}{d}\right)^2}{\left(\dfrac{r_1+r_2}{d}\right)^2-\left(\dfrac{r_1-r_2}{d}\right)^2}=(\tan\alpha-\tan\beta)\times\frac{(r_1-r_2)^2(r_1+r_2)^2}{4r_1r_2d^2}$$ であるから

S＝$\dfrac{2r_1r_2d}{(r_1-r_2)(r_1+r_2)}\times\left\{\dfrac{2r_1r_2d}{(r_1-r_2)(r_1+r_2)}\times(\tan\alpha-\tan\beta)\times\dfrac{(r_1-r_2)^2(r_1+r_2)^2}{4r_1r_2d^2}\right\}=r_1r_2(\tan\alpha-\tan\beta)$ $\cdots$★

よって，S＝$r_1r_2\left(\dfrac{\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}}{r_1-r_2}-\dfrac{\sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}}{r_1+r_2}\right)\cdots$（答）

（★の形が覚えやすい。$\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}}{r_1-r_2}, \tan\beta=\dfrac{\sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}}{r_1+r_2}$）

（補足）2円が外接するとき共通内接線は1本しか引けない。このとき，2本の共通外接線と1本の共通内接線で囲まれる図形は三角形となり，その面積は，★で$\beta=0$とおけば求められる。




(3) 点Pの座標を$(x,y)$とおき，2円$O_1, O_2$を次のように定義する。

円$O_1$：中心$(x_1,y_1)$，半径$r_1$　$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2-r_1{}^2=0\cdots$①

円$O_2$：中心$(x_2,y_2)$，半径$r_2$　$(x-x_2)^2+(y-y_2)^2-r_2{}^2=0\cdots$②

とおく。

点Pから2円に引いた接線の接点をそれぞれ$T_1,T_2$とすると，

仮定より，$PT_1=PT_2$

$O_1P=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}, O_2P=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$ であるから

$PT_1{}^2-PT_2{}^2=0$

$\left(O_1P^2-r_1{}^2\right)-\left(O_2P^2-r_2{}^2\right)=0$ （三平方の定理より）

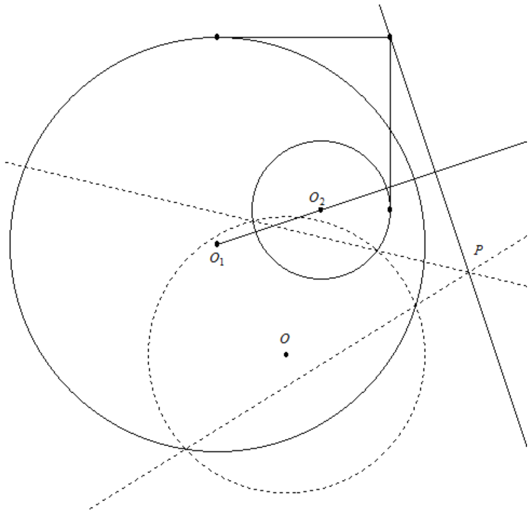
$\left\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2-r_1{}^2\right\}-\left\{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2-r_2{}^2\right\}=0 \quad \cdots③$

$2(x_2-x_1)x+2(y_2-y_1)y+x_1{}^2-x_2{}^2+y_1{}^2-y_2{}^2-r_1{}^2+r_2{}^2=0 \quad \cdots④$

よって，軌跡の方程式は，直線④である。･･･（答）
※この直線を２円の根軸という。また，③は①－②を計算して２次の項を消去する計算である。したがって，２円が交わるときは，共通弦の方程式となる。

(4)　（次の，根軸に関する定理を利用する。）

２円$O_1, O_2$と交わる円$O$を描き（右図では点線），$O$と$O_1$，$O$と$O_2$の根軸の交点Ｐを通り，与えられた２円の中心を結ぶ直線$O_1O_2$に垂直になるように直線を描けばよい。




|（定理）　３円の２円ずつの根軸は１点で交わる。|
|---|

（証明）３円の方程式を

$x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0\cdots①$，$x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2=0\cdots②$，$x^2+y^2+a_3x+b_3y+c_3=0\cdots③$　とおく。

①と②の根軸：$(a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+c_1-c_2=0\cdots④$　，②と③の根軸：$(a_2-a_3)x+(b_2-b_3)y+c_2-c_3=0\cdots⑤$

①と③の根軸：$(a_1-a_3)x+(b_1-b_3)y+c_1-c_3=0\cdots⑥$　である。

④＋⑤を計算すると⑥が得られる。これは，④と⑤の交点が⑥上にあることを示している。
よって，３円の２円ずつの根軸は１点で交わる。■

【未解決】
交わる２円が与えられたとき，その交点を通る直線（共通弦，根軸）の方程式は与えられた２式から２次の項を消去すれば求められる。この計算方法は，交わる２つの放物線にも適用できる。
では，共有点をもたない２つの放物線について，２次の項を消去して得られる１次方程式（直線）は何を意味しているのであろうか？