立命館慶祥中学校・高等学校教諭　時岡郁夫

2 つの放物線と直線について

1　はじめに

タイトルを正確に表すと，「軸が y 軸に平行な 2 つの放物線の方程式から 2 次の項を消去した 1 次方程式（直線）は 2 つの放物線の何を表しているのか。」ということである。

この問題を考えるきっかけは，2 つの円の方程式から 2 次の項を消去した 1 次方程式（直線）は，根軸（2 つの円に引いた接線の長さが等しい点の軌跡）を表していることが知られている。

同様に，軸が y 軸に平行な 2 つの放物線の方程式から 2 次の項を消去した 1 次方程式（直線）は何を表しているのか疑問に思ったので考えてみた。

2　本題

2 つの放物線 $y=a_1x^2+b_1x+c_1$ ･･･①と $y=a_2x^2+b_2x+c_2$ ･･･②から x^2 の項を消去すると直線の方程式

$\dfrac{b_1x+c_1-y}{a_1}=\dfrac{b_2x+c_2-y}{a_2}$ ･･･③が得られる。

次の場合に，③は①と②の何を表すか。

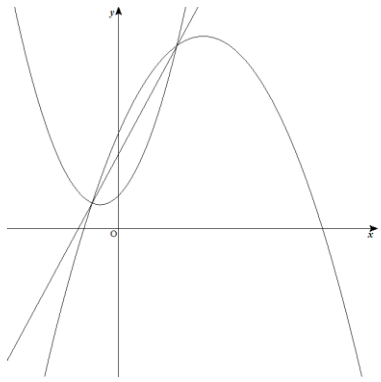
(1) ①と②が異なる 2 つの共有点をもつ。

(2) ①と②が 1 つだけ共有点をもつ。

(3) ①と②が共有点をもたない。

（解）

(1) 異なる 2 つの共有点を通る直線を表す。



（∵）①，②を変形すると，$a_1x^2+b_1x+c_1-y=0$ ･･･①′

$a_2x^2+b_2x+c_2-y=0$ ･･･②′

①′，②′の共有点を通るグラフの方程式は，

$(a_1x^2+b_1x+c_1-y)+k(a_2x^2+b_2x+c_2-y)=0$ ･･･★と表される。

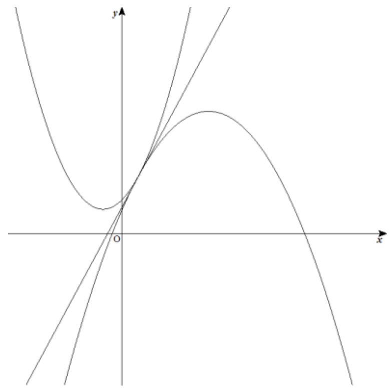
x^2 の係数が 0 になるように k の値を定めると，$a_1+a_2k=0$ より $k=-\dfrac{a_1}{a_2}$

このとき，★は　$(a_1x^2+b_1x+c_1-y)-\dfrac{a_1}{a_2}(a_2x^2+b_2x+c_2-y)=0$

$\therefore \dfrac{b_1x+c_1-y}{a_1}=\dfrac{b_2x+c_2-y}{a_2}$ となる。■

(2) 接する場合と x^2 の係数が等しい場合があるから，場合分けをする。

[1]　$a_1\neq a_2$ のとき



(1)で，2 つの共有点の座標を $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$　$(x_1<x_2)$ とおくと，この 2 点を通る直線は $\dfrac{b_1x+c_1-y}{a_1}=\dfrac{b_2x+c_2-y}{a_2}$ である。x_2 を x_1 にしだいに近づけると，点 B は点 A に近づき，2 点 A，B を通る直線は点 A における接線に近づく。

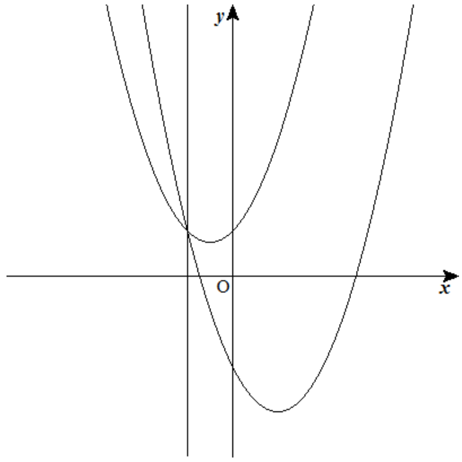
よって，$\dfrac{b_1x+c_1-y}{a_1}=\dfrac{b_2x+c_2-y}{a_2}$ は①と②の共有点における共通接線の方程式を表す。

[2]　$a_1=a_2$ のとき

①－②を計算すると　$(b_1-b_2)x+c_1-c_2=0$

共有点を1つもつので，$b_1 \neq b_2$ として，$x=-\dfrac{c_1-c_2}{b_1-b_2}$

これは共有点を通る y 軸に平行な直線を表す。



(3)　$l_1: b_1x+c_1-y=0$ は，①の $x=0$ における接線を表す。

同様に，$l_2: b_2x+c_2-y=0$ は，②の $x=0$ における接線を表す。

いま，点 $\mathrm{P}(x,y)$ と l_1, l_2 の距離をそれぞれ d_1, d_2 とおくと，$d_1=\dfrac{|b_1x+c_1-y|}{\sqrt{b_1{}^2+1}}, d_2=\dfrac{|b_2x+c_2-y|}{\sqrt{b_2{}^2+1}}\cdots$④である。

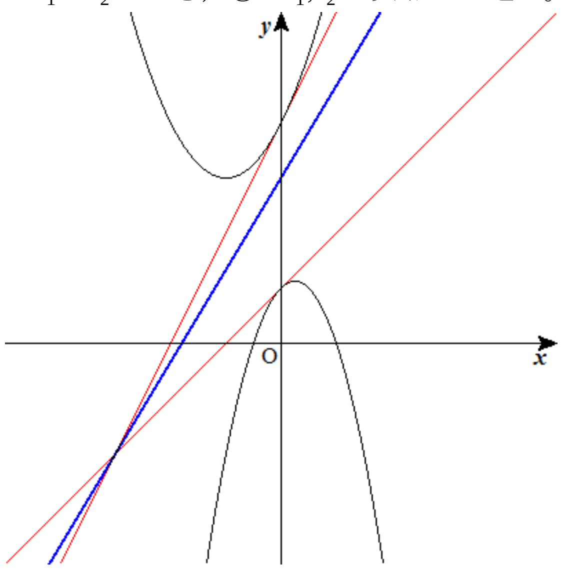
③の両辺の絶対値をとると，$\dfrac{|b_1x+c_1-y|}{|a_1|}=\dfrac{|b_2x+c_2-y|}{|a_2|}$

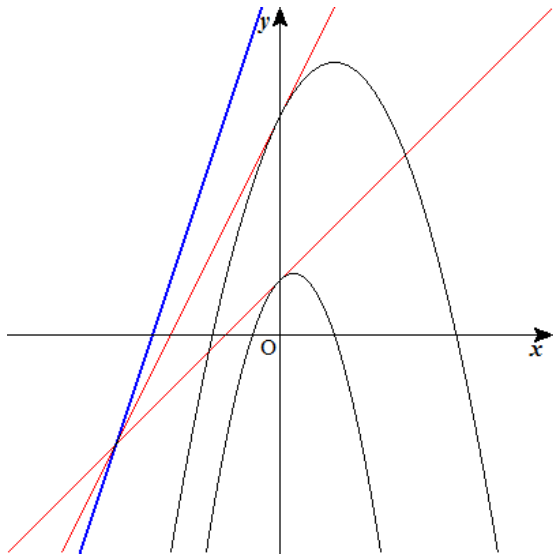
これと④より，$\dfrac{d_1\sqrt{b_1{}^2+1}}{|a_1|}=\dfrac{d_2\sqrt{b_2{}^2+1}}{|a_2|}$　$\dfrac{d_1}{d_2}=\dfrac{\dfrac{|a_1|}{\sqrt{b_1{}^2+1}}}{\dfrac{|a_2|}{\sqrt{b_2{}^2+1}}}$　$\therefore d_1:d_2=\dfrac{|a_1|}{\sqrt{b_1{}^2+1}}:\dfrac{|a_2|}{\sqrt{b_2{}^2+1}}$

よって，③は点Pから，接線 l_1, l_2 までの距離の比が $\dfrac{|a_1|}{\sqrt{b_1{}^2+1}}:\dfrac{|a_2|}{\sqrt{b_2{}^2+1}}$ である軌跡の方程式を表す。

もう少し詳しく調べてみる。

[1]　$b_1 \neq b_2$ のとき，③は l_1, l_2 の交点Pを通る。





Pの座標は $\left(-\dfrac{c_1-c_2}{b_1-b_2}, \dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{b_1-b_2}\right)$

次に③と y 軸との交点 $\mathrm{Q}(0,y)$ を求める。

Qから l_1, l_2 に下ろした垂線の長さの比が $d_1:d_2=\dfrac{|a_1|}{\sqrt{b_1{}^2+1}}:\dfrac{|a_2|}{\sqrt{b_2{}^2+1}}$ であるから

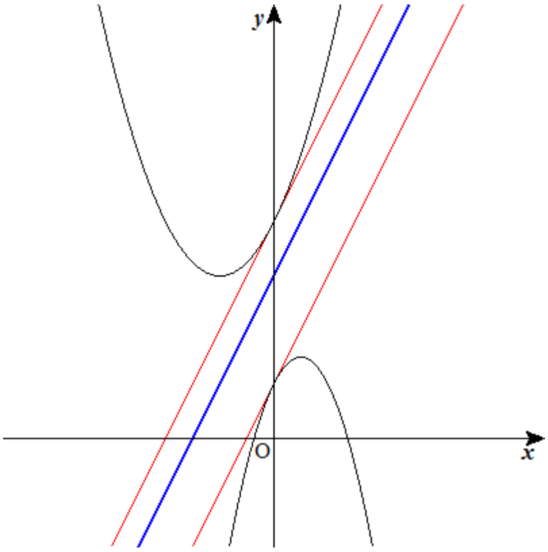
$$\frac{|c_1-y|}{\sqrt{b_1{}^2+1}}:\frac{|c_2-y|}{\sqrt{b_2{}^2+1}}=\frac{|a_1|}{\sqrt{b_1{}^2+1}}:\frac{|a_2|}{\sqrt{b_2{}^2+1}} \qquad |a_2||c_1-y|=|a_1||c_2-y| \qquad a_2(c_1-y)=\pm a_1(c_2-y)$$

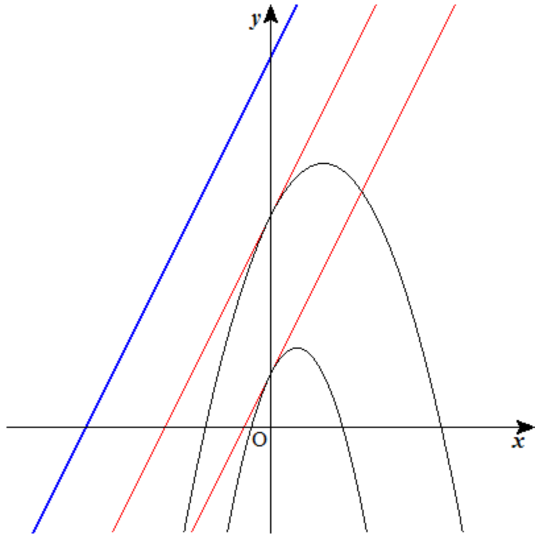
$(a_1-a_2)y=a_1c_2-a_2c_1$　または　$(a_1+a_2)y=a_1c_2+a_2c_1$

$a_1\neq a_2$ であるから，$y=\dfrac{-a_2c_1+a_1c_2}{a_1-a_2}$　$\therefore \mathrm{Q}\left(0,\dfrac{-a_2c_1+a_1c_2}{a_1-a_2}\right)$　※　$\left(0,\dfrac{a_1c_2+a_2c_1}{a_1+a_2}\right)$の方は、不適。

なお，$C_1(0,c_1),C_2(0,c_2)$とおくと，Q はC_1C_2 を $a_1:a_2$ に外分する点となっている。
（a_1,a_2 が異符号のときは内分，同符号のときは外分となる。）

[2]　$b_1=b_2$ のとき，③はl_1,l_2 と平行。





このとき，$d_1:d_2=\dfrac{|a_1|}{\sqrt{b_1{}^2+1}}:\dfrac{|a_2|}{\sqrt{b_2{}^2+1}}=|a_1|:|a_2|$

C_1C_2 を $a_1:a_2$ に内分する点を Q とすると，軌跡は Q を通り l_1,l_2 に平行な直線となる。
（a_1,a_2 が異符号のときは内分，同符号のときは外分となる。）

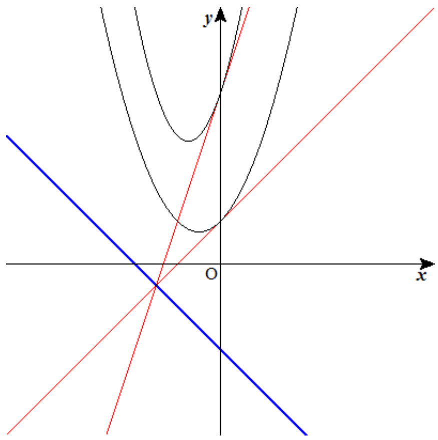
3　終わりに

意外と時間がかかった。2 つの放物線が共有点をもたないとき，2 次の項を消去して得られる直線について，もう少し簡潔な意味づけがあるかもしれない。ぜひ，ご紹介いただきたい。

（作問例）

2 つの放物線 $y=2x^2+3x+4\cdots$①，$y=x^2+x+1\cdots$②について，$x=0$ における①，②の接線を l_1,l_2，①，②と y 軸との交点を C_1,C_2 とする。l_1,l_2 の交点 P と C_1C_2 を $2:1$ に外分する点 Q を通る直線の方程式を求めよ。

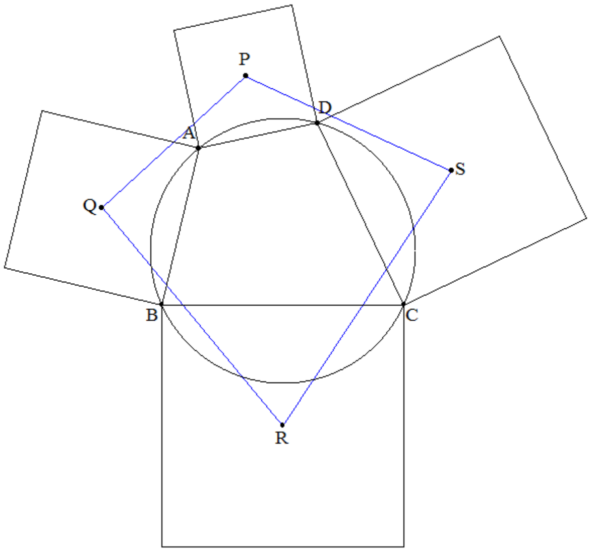
（解）2 式から x^2 を消去して，$y=-x-2\cdots$（答）



【参考文献】　特になし

新春に作成した問題（2019/1/14）

円に内接する四角形ABCDの各辺を1辺とする正方形を四角形の外側につくり，各正方形の対角線の交点を図のようにそれぞれP，Q，R，Sとする。AB＝4，BC＝6，CD＝5，DA＝3のとき，四角形PQRSの面積を求めよ。



（次回の予告）次の美しい結果の証明について

(1) △ABCの内接円，外接円の中心（半径）をそれぞれ$I(r), O(R)$，IO＝dとすると，

$$\frac{1}{R-d}+\frac{1}{R+d}=\frac{1}{r}$$

(2) 四角形ABCDが内接円，外接円をもち，その中心（半径）をそれぞれ$I(r), O(R)$，IO＝dとすると，

$$\frac{1}{(R-d)^2}+\frac{1}{(R+d)^2}=\frac{1}{r^2}$$