立命館慶祥中学校・高等学校教諭　時岡郁夫

三角形，四角形の内接円と外接円の半径と中心間の距離について

1　はじめに

2018 年 12 月，中央大学教授の藤田岳彦先生から，次の結果をご教示していただいた。A4 一枚の手書きのメモには，(1)は結果のみ，(2)は結果と簡潔な証明が記されていた。

半径 r の内接円と半径 R の外接円との中心間の距離を d とすると

(1)　三角形のとき　$\dfrac{1}{R-d}+\dfrac{1}{R+d}=\dfrac{1}{r}$

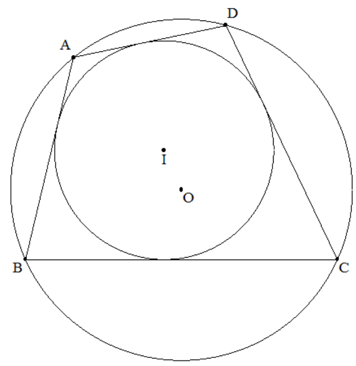
(2)　四角形のとき　$\dfrac{1}{(R-d)^2}+\dfrac{1}{(R+d)^2}=\dfrac{1}{r^2}$

とても美しい結果である。 (1)については知らなかった。(2)については幾何学大辞典第 1 巻の P.265 （岩田至康編）に 3 通りの証明が掲載されているが，高校生には藤田先生の証明が分かりやすいと思うので，次に紹介したい。

2　(2)の証明

四角形 ABCD の内接円，外接円の中心(半径)をそれぞれ I(r)，O(R)とし，

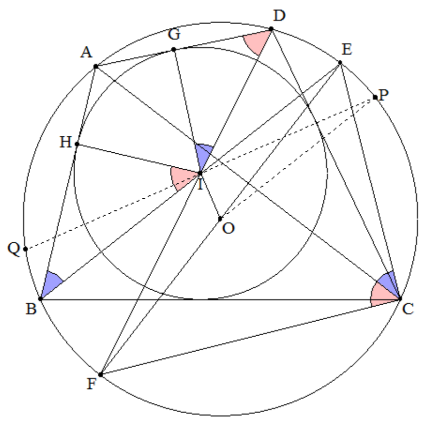
IO＝d とすると，$\dfrac{1}{(R-d)^2}+\dfrac{1}{(R+d)^2}=\dfrac{1}{r^2}$



（証明）BI，DI と外接円との交点をそれぞれ E，F とすると，3 点 E，O，F は同一直線上にある。

（∵）∠ECF＝∠ECA+∠ACF＝∠EBA+∠ADF（円周角）

$=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{B}+\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{D}=90^\circ$　より　EF は直径となるから。



中線定理より

$IE^2+IF^2=2\left(IO^2+R^2\right)=2\left(R^2+d^2\right)$　・・・①

また，方べきの定理より

$DI\cdot IF=BI\cdot IE=R^2-IO^2=R^2-d^2$　・・・②

（∵）I を通り，IO に垂直な外接円の弦を PQ とすると，

$DI\cdot IF=PI\cdot IQ=PI^2=PO^2-IO^2=R^2-d^2$（方べきの値）となる。

②より　$IF^2+IE^2=\left(\dfrac{R^2-d^2}{DI}\right)^2+\left(\dfrac{R^2-d^2}{BI}\right)^2=\left(R^2-d^2\right)^2\left(\dfrac{1}{DI^2}+\dfrac{1}{BI^2}\right)$　・・・③

ここで，IG=IH＝r である。また，I から DA，AB に下ろした垂線の足をそれぞれ G，H とし，DG=u，HB=v とおくと，△IDG∽△BIH であるから，$u:r=r:v$ より $uv=r^2$ である。

このとき，$DI^2=u^2+r^2=u^2+uv=u(u+v)$，$BI^2=v^2+r^2=v^2+uv=v(u+v)$であるから

$$\therefore \frac{1}{DI^2}+\frac{1}{BI^2}=\frac{1}{u(u+v)}+\frac{1}{v(u+v)}=\frac{1}{uv}=\frac{1}{r^2} \quad \cdots ④$$

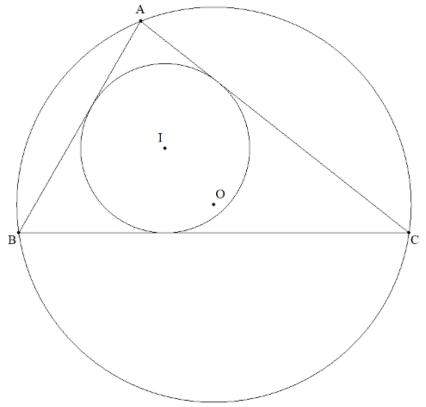
①，③，④より　$2\left(R^2+d^2\right)=\left(R^2-d^2\right)^2\cdot\frac{1}{r^2}$

$$\frac{1}{r^2}=\frac{2\left(R^2+d^2\right)}{\left(R^2-d^2\right)^2}=\frac{(R+d)^2+(R-d)^2}{(R+d)^2(R-d)^2}=\frac{1}{(R-d)^2}+\frac{1}{(R+d)^2} \quad \therefore \frac{1}{(R-d)^2}+\frac{1}{(R+d)^2}=\frac{1}{r^2} \quad ■$$

3　(1)の証明

三角形 ABC の内接円，外接円の中心(半径)をそれぞれ I(r)，O(R)とし，

IO＝d とすると，$\frac{1}{R-d}+\frac{1}{R+d}=\frac{1}{r}$



（証明 1）I を通り，OI に垂直な弦を PQ とすると，△OPI は∠PIO＝90°の直角三角形であるから，

三平方の定理より　$PI^2=R^2-d^2$　…①

方べきの定理より　$AI\cdot ID=PI\cdot IQ=PI^2$　…②

①，②より　$AI\cdot ID=R^2-d^2$　…③

次に，AI と外接円の交点を D，AB と内接円の接点を E とする。

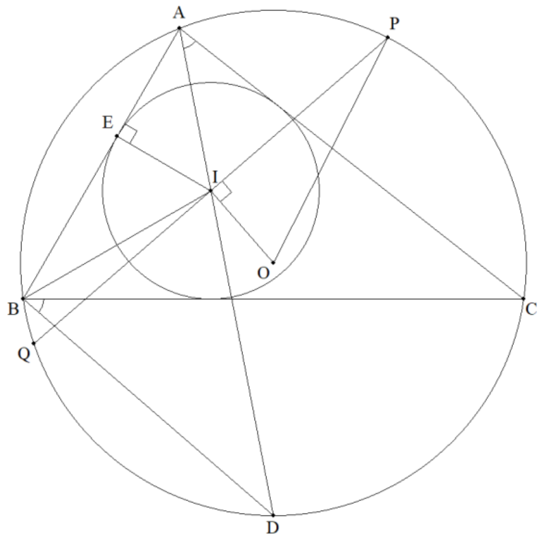
△DIB について

∠DIB＝∠IAB＋∠IBA＝$\frac{1}{2}$∠A＋$\frac{1}{2}$∠B

∠DBI＝∠DBC＋∠CBI＝∠DAC＋∠CBI＝$\frac{1}{2}$∠A＋$\frac{1}{2}$∠B

よって，∠DIB＝∠DBI より△DIB は二等辺三角形であるから，

ID＝BD　…④



△AIE は直角三角形であるから　$\sin\frac{A}{2}=\frac{r}{AI}$　…⑤

△ABD に正弦定理を適用すると　$2R=\frac{BD}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{ID}{\frac{r}{AI}}$(④，⑤より)$=\frac{AI\cdot ID}{r}$

分母を払うと　$AI\cdot ID=2rR$　…⑥

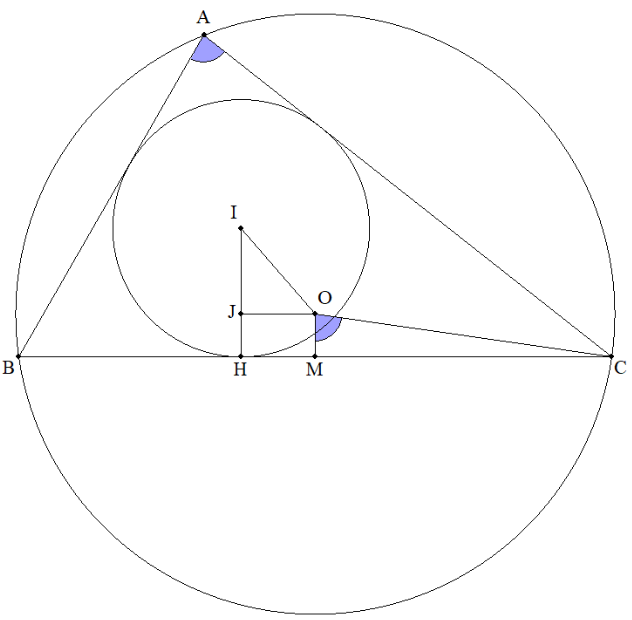
②，⑥より　$2rR=R^2-d^2$　(*1)

変形すると　$r\{(R+d)+(R-d)\}=(R+d)(R-d)$

両辺を$r(R+d)(R-d)$で割ると　$\frac{1}{R-d}+\frac{1}{R+d}=\frac{1}{r}$　■

（証明 2）I，O から BC に下した垂線の足をそれぞれ H，M とし，O から IH に下した垂線の足を J とする。
∠COM＝A，OC＝R より
OM＝$R\cos A$ であるから，IJ＝$r-R\cos A$，

HM＝$BM-BH=\dfrac{a}{2}-(s-b)=\dfrac{b-c}{2}$



△AIJ は直角三角形であるから

$$\left(r-R\cos A\right)^2+\left(\frac{b-c}{2}\right)^2=d^2 \quad \cdots ①$$

左辺＝$r^2-2rR\cos A+R^2\cos^2 A+\left(\dfrac{b-c}{2}\right)^2$

$$=r^2-2rR+2rR(1-\cos A)+R^2\left(1-\sin^2 A\right)+\left(\frac{b-c}{2}\right)^2$$

$$=R^2-2rR+r^2+2rR\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)-\left(R\sin A\right)^2+\left(\frac{b-c}{2}\right)^2$$

$$=R^2-2rR+\left(\frac{S}{s}\right)^2+2rR\cdot\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}-\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b-c}{2}\right)^2$$

$$=R^2-2rR+\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}+2rR\cdot\frac{4(s-b)(s-c)}{2bc}-(s-b)(s-c)=R^2-2rR+(s-b)(s-c)\left(\frac{s-a}{s}+\frac{4rR}{bc}-1\right)$$

$$=R^2-2rR+(s-b)(s-c)\left(\frac{4rR}{bc}-\frac{a}{s}\right)=R^2-2rR+(s-b)(s-c)\cdot\frac{4R}{bcs}\left(rs-\frac{abc}{4R}\right)=R^2-2rR+(s-b)(s-c)\cdot\frac{4R}{bcs}(S-S)$$

$$=R^2-2rR$$

よって①は，　$R^2-2rR=d^2$

移項すると　$R^2-d^2=2rR$

変形すると　$(R+d)(R-d)=r\{(R+d)+-d\}$

両辺を $r(R+d)(R-d)$ で割ると　$\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{R-d}+\dfrac{1}{R+d}$

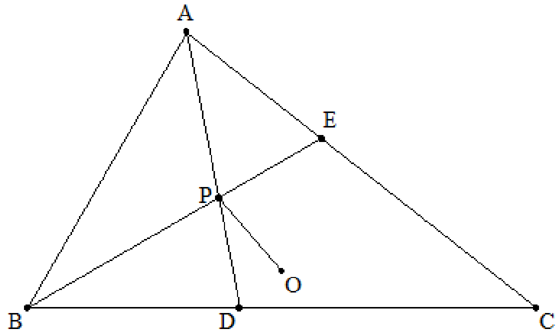
よって　$\dfrac{1}{R-d}+\dfrac{1}{R+d}=\dfrac{1}{r}$　■

4　三角形内の任意の点と外心との距離の公式

△ABC の外接円の中心を O，半径を R とする。△ABC 内に任意に点 P をとり，AP と BC の交点を D，BP と CA の交点を E とする。

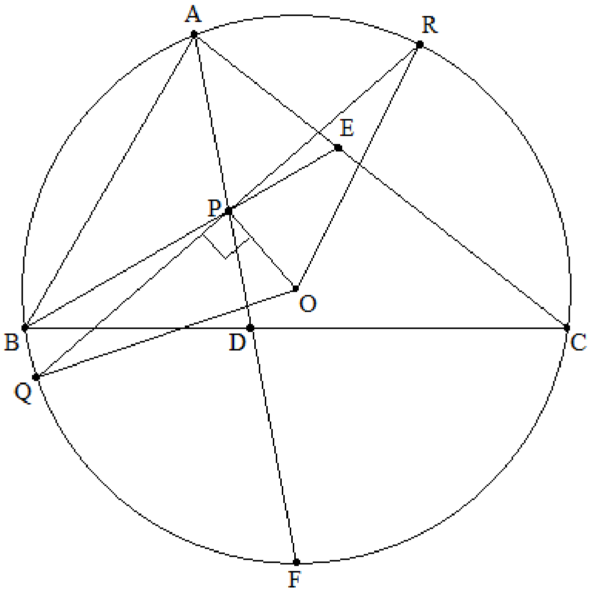
BD＝a_1，DC＝a_2，CE＝b_1，EA＝b_2，OP＝d とおくと，

$$d^2 = R^2 - \frac{a_1b_2\left(a_2b_2a^2 + a_1b_1b^2 + a_2b_1c^2\right)}{\left(ab_2 + a_1b_1\right)^2}$$



（証明）AD の延長と外接円との交点を F，点 P を通り，OP に垂直な外接円の弦を図のように QR とする。

QP＝PR である。



△OPQ は直角三角形であるから三平方の定理より

$PQ^2 = R^2 - d^2$　・・・①

方べきの定理より　$AP \cdot PF = QP \cdot PR = PQ^2$　・・・②

①，②より　$AP \cdot PF = R^2 - d^2$　・・・③

AD＝l とおく。

スチュアートの定理より（*2）　$a\left(l^2 + a_1a_2\right) = a_1b^2 + a_2c^2$

$\therefore l^2 = \dfrac{a_1b^2 + a_2c^2 - a_1a_2a}{a}$　・・・④

メネラウスの定理より

$\dfrac{AP}{PD} \cdot \dfrac{DB}{BC} \cdot \dfrac{CE}{EA} = 1$，　$\dfrac{AP}{PD} \cdot \dfrac{a_1}{a} \cdot \dfrac{b_1}{b_2} = 1$，　$\therefore \dfrac{AP}{PD} = \dfrac{ab_2}{a_1b_1}$

AP＝$\dfrac{ab_2}{ab_2 + a_1b_1} l$，PD＝$\dfrac{a_1b_1}{ab_2 + a_1b_1} l$　・・・⑤

方べきの定理より　$AD \cdot DF = BD \cdot DC$，　$l \cdot DF = a_1a_2$，　$\therefore DF = \dfrac{a_1a_2}{l}$　・・・⑥

⑤，⑥より　PF＝PD＋DF＝$\dfrac{a_1b_1}{ab_2 + a_1b_1} l + \dfrac{a_1a_2}{l} = \dfrac{a_1\left\{b_1l^2 + a_2\left(ab_2 + a_1b_1\right)\right\}}{\left(ab_2 + a_1b_1\right)l}$

ここで，④より，分子の中括弧の中＝$b_1 \cdot \dfrac{a_1b^2 + a_2c^2 - a_1a_2a}{a} + a_2\left(ab_2 + a_1b_1\right) = \dfrac{a_2b_2a^2 + a_1b_1b^2 + a_2b_1c^2}{a}$ であるから

PF＝$\dfrac{a_1 \cdot \dfrac{a_2b_2a^2 + a_1b_1b^2 + a_2b_1c^2}{a}}{\left(ab_2 + a_1b_1\right)l} = \dfrac{a_1\left(a_2b_2a^2 + a_1b_1b^2 + a_2b_1c^2\right)}{a\left(ab_2 + a_1b_1\right)l}$

これと⑤を③に代入すると　$\dfrac{ab_2}{ab_2 + a_1b_1} l \cdot \dfrac{a_1\left(a_2b_2a^2 + a_1b_1b^2 + a_2b_1c^2\right)}{a\left(ab_2 + a_1b_1\right)l} = R^2 - d^2$

$$\therefore d^2 = R^2 - \frac{a_1b_2\left(a_2b_2a^2 + a_1b_1b^2 + a_2b_1c^2\right)}{\left(ab_2 + a_1b_1\right)^2}$$　■

5　(1)の証明 3

P が内心のとき，$a_1=\dfrac{ca}{b+c}$，　$a_2=\dfrac{ab}{b+c}$，$b_1=\dfrac{ab}{c+a}$，$b_2=\dfrac{bc}{c+a}$ を公式

$d^2=R^2-\dfrac{a_1b_2\left(a_2b_2a^2+a_1b_1b^2+a_2b_1c^2\right)}{\left(ab_2+a_1b_1\right)^2}$ に代入して，

$$d^2=R^2-\frac{\dfrac{ca}{b+c}\cdot\dfrac{bc}{c+a}\left(\dfrac{ab}{b+c}\cdot\dfrac{bc}{c+a}\cdot a^2+\dfrac{ca}{b+c}\cdot\dfrac{ab}{c+a}\cdot b^2+\dfrac{ab}{b+c}\cdot\dfrac{ab}{c+a}\cdot c^2\right)}{\left(a\cdot\dfrac{bc}{c+a}+\dfrac{ca}{b+c}\cdot\dfrac{ab}{c+a}\right)^2}$$

$$=R^2-\frac{abc}{a+b+c}=R^2-\frac{abc}{2s}=R^2-2\cdot\frac{S}{s}\cdot\frac{abc}{4S}=R^2-2rR$$

移項すると　$2rR=R^2-d^2$

変形すると　$r\{(R+d)+(R-d)\}=(R+d)(R-d)$

両辺を $r(R+d)(R-d)$ で割ると　$\dfrac{1}{R-d}+\dfrac{1}{R+d}=\dfrac{1}{r}$　■

（補足）

（1）　P が重心のとき，$a_1=a_2=\dfrac{a}{2}$，　$b_1=b_2=\dfrac{b}{2}$ であるから，公式 $d^2=R^2-\dfrac{a_1b_2\left(a_2b_2a^2+a_1b_1b^2+a_2b_1c^2\right)}{\left(ab_2+a_1b_1\right)^2}$ に代入して，

$$d^2=R^2-\frac{\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{b}{2}\left(\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{b}{2}\cdot a^2+\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{b}{2}\cdot b^2+\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{b}{2}\cdot c^2\right)}{\left(a\cdot\dfrac{b}{2}+\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{b}{2}\right)^2}=R^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{9}$$

（2）　P が垂心のとき，$a_1=c\cos B$，　$a_2=b\cos C$，$b_1=a\cos C$，$b_2=c\cos A$ を公式に代入し，簡単にすると $d=R\sqrt{1-8\cos A\cos B\cos C}$

（*2）余弦定理を用いても l^2 は求められる。

△ABD において

$$l^2=c^2+{a_1}^2-2ca_1\cos B=c^2+{a_1}^2-2ca_1\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{a_1b^2+(a-a_1)c^2+(a_1-a)a_1a}{a}=\frac{a_1b^2+a_2c^2-a_1a_2a}{a}$$

6　終わりに

(1)の証明について，オイラー・チャップルの定理（$IO^2=R^2-2Rr$）を用いると，簡単。証明 1 では，オイラー・チャップルの定理の証明も含めた証明（*1）となっている。

証明 2 は，三平方の定理を利用しての証明，証明 3 は，公式を作成しての証明で，筆者が考えました。

(2)は，Fuss の定理と幾何学大辞典第 1 巻の P.265 （岩田至康編）に記載がありました。

また，(1)，(2)の等式から，次の不等式が容易に証明できます。

(1)　$R\geqq 2r$

(2)　$R\geqq\sqrt{2}r$

（証明）

(1)　$\dfrac{1}{R-d}+\dfrac{1}{R+d}=\dfrac{1}{r}$ より，$d^2=R^2-2rR=R(R-2r)\geqq 0$ であるから，$\therefore R\geqq 2r$ ■

(2)　$\dfrac{1}{(R-d)^2}+\dfrac{1}{(R+d)^2}=\dfrac{1}{r^2}$ より，$\dfrac{2\left(R^2+d^2\right)}{\left(R^2-d^2\right)^2}=\dfrac{1}{r^2}$　　$r^2=\dfrac{\left(R^2-d^2\right)^2}{2\left(R^2+d^2\right)}\leqq\dfrac{\left(R^2\right)^2}{2R^2}=\dfrac{R^2}{2}$ （等号は $d=0$）

$r>0, R>0$ であるから　$R\geqq\sqrt{2}r$ ■

【参考文献】

[1]　藤田岳彦氏の A4 メモ（2018/12/26）より