第 109 回数学教育実践研究会資料　　　（2019/6/1　於北大理学講義棟 5 号館 203）
立命館慶祥中学校・高等学校教諭　時岡郁夫

第 108 回数実研レポートを見て

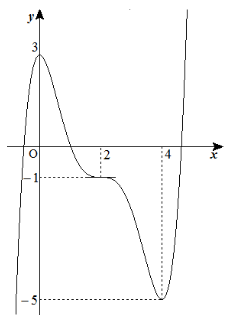
1　はじめに

前回の研究会で，興味をもったいくつかのレポートについて考えてみた。
内容は次の通り。

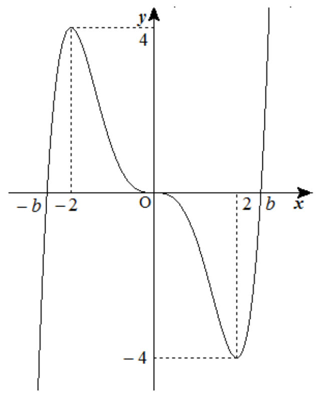
A	「教材は自分の中にある」（安田富久一氏）
B	「とりとめもない数学の話②」（大谷健介氏）
C	「『中学入試はネタの宝庫でないか説』を検証してみた」（福島洋一氏）
D	「ちょっと面倒な等式の証明」（村田洋一氏）

2　A について

n 次関数 $y=f(x)$ は，$x=0$ で極大値 3，$x=4$ で極小値 -5 をとり，点 $(2,-1)$ は変曲点で，$x=2$ における接線の傾きは 0 である。このような $y=f(x)$ を一つ示せ。



（解）極値が変曲点に関して対称になっているから，$y=f(x)$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 1 だけ平行移動したグラフを考える（右図）。



このとき，$x=-2$ で極大値 4，$x=2$ で極小値 -4 となり，原点が変曲点となるから

$y=ax^{2n+1}(x+b)(x-b)=a\left(x^{2n+3}-b^2x^{2n+1}\right)$　・・・①とおける。（n は自然数，$a>0, b>0$）

$$y'=a\left\{(2n+3)x^{2n+2}-b^2(2n+1)x^{2n}\right\}=a(2n+3)x^{2n}\left(x^2-\frac{2n+1}{2n+3}b^2\right)$$

$x=2$ で極値をもつから，$a(2n+3)2^{2n}\left(2^2-\dfrac{2n+1}{2n+3}b^2\right)=0$ より　$\therefore\ b^2=\dfrac{4(2n+3)}{2n+1}$

これを①に代入すると　$y=a\left\{x^{2n+3}-\dfrac{4(2n+3)}{2n+1}x^{2n+1}\right\}$　・・・②

点 $(2,-4)$ を通るから　$-4=a\left\{2^{2n+3}-\dfrac{4(2n+3)}{2n+1}\cdot 2^{2n+1}\right\}$　$\therefore\ a=\dfrac{2n+1}{2^{2n+2}}$

これを②に代入すると，$y=\dfrac{2n+1}{2^{2n+2}}\left\{x^{2n+3}-\dfrac{4(2n+3)}{2n+1}x^{2n+1}\right\}=\dfrac{1}{2^{2n+2}}\left\{(2n+1)x^{2n+3}-4(2n+3)x^{2n+1}\right\}$

最後に，これを x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ平行移動して

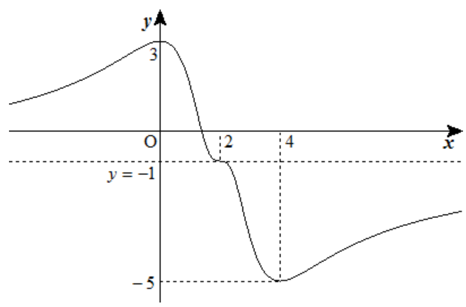
$$y-(-1)=\frac{1}{2^{2n+2}}\left\{(2n+1)(x-2)^{2n+3}-4(2n+3)(x-2)^{2n+1}\right\}$$

$$\therefore\ y=\frac{1}{2^{2n+2}}\left\{(2n+1)(x-2)^{2n+3}-4(2n+3)(x-2)^{2n+1}\right\}-1$$

具体例として，

$n=1$ のとき，$y=\dfrac{1}{16}\left\{3(x-2)^5-20(x-2)^3\right\}-1$　・・・（答）

$n=2$ のときは，$y=\dfrac{1}{64}\left\{5(x-2)^7-28(x-2)^5\right\}-1$



$\boxed{\text{類題}}$　（→趣味の数学問題集 C66）

分数関数 $y=f(x)$ は，$x=0$ で極大値 3，$x=4$ で極小値 -5 をとり，点 $(2,-1)$ は変曲点で，$x=2$ における接線の傾きは 0 である。また，$x\to\pm\infty$ のとき，$y\to-1$ である。このような $y=f(x)$ を一つ示せ。

Bについて

紹介された「170ます計算」で教材を作成した。(→基礎学力講座「数学」34)

基礎学力講座＜数学＞ ★★★ 170ます計算 ★★★ 〔 〕年〔 〕組〔 〕番 氏名〔 〕

【1】170ます計算

1行目に，0から9までの10個の数字を1つずつ順不同に入れる。

2行目に，1桁の同じ数字をすべてのますに入れる。

3行目以降は，上の2行の数字を足した答を記入していく。ただし，答が2桁になった場合は，一の位だけ記入する。

最後の17行目の答はどうなるだろうか。

	1列	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1行										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										
11										
12										
13										
14										
15										
16										
17										

※17行目の答を見ただけで，計算が正しいかどうかわかります。

【2】17行目の答になる理由を考えてみよう。

(2019/2/3)

基礎学力講座＜数学＞ ★★★ 170ます計算 ★★★ 〔 〕年〔 〕組〔 〕番 氏名〔 〕

【1】170ます計算

1行目に，0から9までの10個の数字を1つずつ順不同に入れる。

2行目に，1桁の同じ数字をすべてのますに入れる。

3行目以降は，上の2行の数字を足した答を記入していく。ただし，答が2桁になった場合は，一の位だけ記入する。

最後の17行目の答はどうなるだろうか。

	1列	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1行										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										
11										
12										
13										
14										
15										
16										
17										

※17行目の答を見ただけで，計算が正しいかどうかわかります。

【2】17行目の答になる理由を考えてみよう。

まず，1列目を考える。

1列目のn行目に入る数字を$a_{1,n}$で表し，$a_{1,1}=a$，$a_{1,2}=b$とおく。ただし，

$a\in\{0,1,2,\cdots,9\}$，$b\in\{1,2,\cdots,9\}$である。

$$a_{1,3}=a_{1,1}+a_{1,2}=a+b$$

$$a_{1,4}=a_{1,2}+a_{1,3}=b+(a+b)=a+2b$$

$$a_{1,5}=a_{1,3}+a_{1,4}=(a+b)+(a+2b)=2a+3b$$

$$a_{1,6}=a_{1,4}+a_{1,5}=(a+2b)+(2a+3b)=3a+5b$$

ここまで計算すると，aとbの係数はフィボナッチ数列になっていることが分かる。

行	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
aの係数	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610
bの係数	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987

よって17行目は，$a_{1,17}=610a+987b=7b\pmod{10}$

他の列も同様であるから，17行目は同じ答え$7b\pmod{10}$となる。

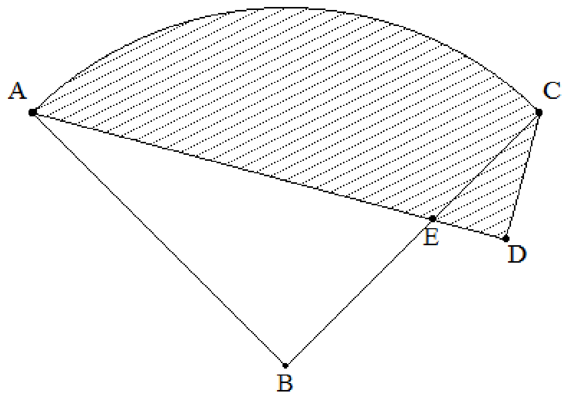
（補足）2行目に記入する数字と17行目の答え一覧。

b	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$7b\pmod{10}$	7	4	1	8	5	2	9	6	3

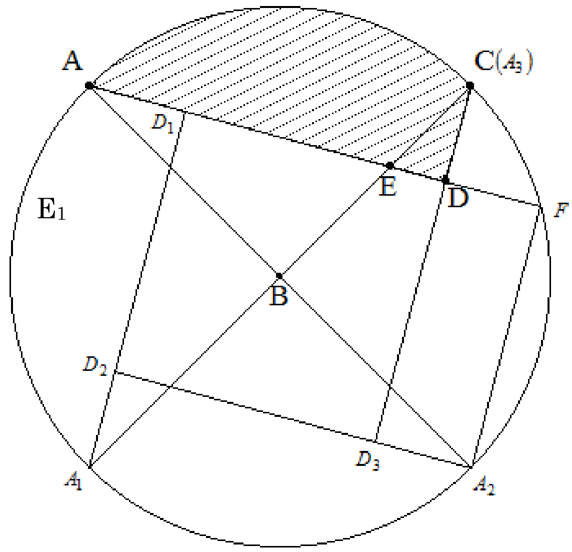
(2019/2/3)

C について　（→趣味の数学問題集 A431）

中心角 90° の扇形 ABC の点 C を頂点として∠BCD＝30° になるように直角三角形 CDE を作る。AD の長さが CD の長さより 20cm 長くなるとき，網掛けの部分の面積を求めよ。ただし，円周率は π とする。



（解）与えられた図形を，B を中心に 90°，180°，270° 回転させた図を描き，図のように記号をつける。



また，AD の延長と円との交点を F とする。
図形の対称性から，四角形 $DD_1D_2D_3$ は正方形となる。
この図から，求める網掛けの部分の面積 S は，円から正方形 $DD_1D_2D_3$ を引いて，4 で割った値である。
仮定より，AD－CD＝20 で
$\triangle AE_1D_1 \equiv \triangle CED$ より，AD_1＝CD であるから，
AD－CD＝（AD_1+D_1D）－AD_1＝D_1D＝20
よって，正方形の 1 辺は 20 である。
また，$\triangle AA_2F$ は$\angle A_2AF$＝30° である直角三角形であるから，
直径 $AA_2=2A_2F$
よって，円の半径 AB＝A_2F ＝D_3D＝20 である。

従って，$S=\dfrac{20^2\pi-20^2}{4}=100\pi-100\,(\mathrm{cm}^2)$　・・・（答）

（2019/1/30　時岡）

D について

問題(2)　次の等式を証明せよ。

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-d)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-d)(c-a)(c-b)}+\frac{d^2}{(d-a)(d-b)(d-c)}=0$$

（証明）左辺を P とおき，通分すると

$$P=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-d)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-d)(c-a)(c-b)}+\frac{d^2}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

$$=\frac{a^2(b-c)(b-d)(c-d)-b^2(a-c)(a-d)(c-d)+c^2(a-b)(a-d)(b-d)-d^2(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)}$$

分母の $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ は，文字を入れ換えると元の式と符号が逆になる式（交代式）である。

分子を $P(a,b,c,d)$ とおき，a,b を入れ換えてみると，

$$P(b,a,c,d)=b^2(a-c)(a-d)(c-d)-a^2(b-c)(b-d)(c-d)+c^2(b-a)(b-d)(a-d)-d^2(b-a)(b-c)(a-c)$$

$$=-a^2(b-c)(b-d)(c-d)+b^2(a-c)(a-d)(c-d)-c^2(a-b)(a-d)(b-d)+d^2(a-b)(a-c)(b-c)=-P(a,b,c,d)$$

よって，分子も交代式である。

4 文字の交代式は，必ず，$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)\times(\text{対称式})$の形で書ける。

$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ は 6 次式で，分子が 5 次式であるから，$P(a,b,c,d)=0$ となる。

従って，$\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-d)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-d)(c-a)(c-b)}+\dfrac{d^2}{(d-a)(d-b)(d-c)}=0$　■

（補足 1）

$$P_4(n)=\frac{a^n}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^n}{(b-c)(b-d)(b-a)}+\frac{c^n}{(c-d)(c-a)(c-b)}+\frac{d^n}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

$$=\frac{a^n(b-c)(b-d)(c-d)-b^n(a-c)(a-d)(c-d)+c^n(a-b)(a-d)(b-d)-d^n(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)}$$

$$=\frac{P_n(a,b,c,d)}{(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)}$$ とおく。

分母は，6 次式（最簡交代式）で，分子の $P_n(a,b,c,d)$ は交代式で，次数は $n+3$ である。

$$P_n(a,b,c,d)=a^n(b-c)(b-d)(c-d)-b^n(a-c)(a-d)(c-d)+c^n(a-b)(a-d)(b-d)-d^n(a-b)(a-c)(b-c)$$

$=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)\times Q_n(a,b,c,d)$ （$Q_n(a,b,c,d)$ は対称式）

[1]　$n=0,1,2$ のとき，分母より分子の次数が低いから，$P_n(a,b,c,d)=0$　よって，$P_4(0)=P_4(1)=P_4(2)=0$

[2]　$n=3$ のとき，分母と分子の次数が等しくなる。

a^3 の係数を比較して，$Q_n(a,b,c,d)=1$ となるから，$P_4(3)=1$

[3]　$n=4$ のとき，$Q_n(a,b,c,d)$ は 1 次の対称式であるから，$Q_n(a,b,c,d)=k(a+b+c+d)$ とおける。

a^4 の係数を比較して，$k=1$ となるから，$P_4(4)=a+b+c+d$

[4]　$n=5$ のとき，$Q_n(a,b,c,d)$ は 2 次の対称式であるから，$Q_n(a,b,c,d)=k\sum^4 a^2+l\sum^6 ab$ とおける。

係数を比較して，$k=l=1$。よって，$P_4(5)=\sum^4 a^2+\sum^6 ab=a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd$　すなわち

$$\frac{a^5}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^5}{(b-c)(b-d)(b-a)}+\frac{c^5}{(c-d)(c-a)(c-b)}+\frac{d^5}{(d-a)(d-b)(d-c)}=a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd$$

（補足 2）

分数式の和の値

分数式の和 $P_3(n)$， $P_4(n)$， $P_5(n)$ を次のように定義する。

$$P_3(n)=\frac{a^n}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^n}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^n}{(c-a)(c-b)}$$

$$P_4(n)=\frac{a^n}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^n}{(b-c)(b-d)(b-a)}+\frac{c^n}{(c-d)(c-a)(c-b)}+\frac{d^n}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

$$P_5(n)=\frac{a^n}{(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)}+\frac{b^n}{(b-c)(b-d)(b-e)(b-a)}+\frac{c^n}{(c-d)(c-e)(c-a)(c-b)}$$
$$+\frac{d^n}{(d-e)(d-a)(d-b)(d-c)}+\frac{e^n}{(e-a)(e-b)(e-c)(e-d)}$$

これらの計算結果を表にまとめた。

なお， $P_3(n)$ の欄の $\sum^{3} a^2b^2$ とは， $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ の 3 項の和を表している。

n	$P_3(n)$	$P_4(n)$	$P_5(n)$
-3	$\dfrac{\sum^{3} a^2b^2+abc(a+b+c)}{a^3b^3c^3}$	$-\dfrac{\sum^{4} a^2b^2c^2+\sum^{6} a^2b^2cd}{a^3b^3c^3d^3}$	$\dfrac{\sum^{5} a^2b^2c^2d^2+\sum^{10} a^2b^2c^2de}{a^3b^3c^3d^3}$
-2	$\dfrac{\sum^{3} ab}{a^2b^2c^2}$	$-\dfrac{\sum^{4} abc}{a^2b^2c^2d^2}$	$\dfrac{\sum^{5} abcd}{a^2b^2c^2d^2e^2}$
-1	$\dfrac{1}{abc}$	$-\dfrac{1}{abcd}$	$\dfrac{1}{abcde}$
0	0	0	0
1	0	0	0
2	1	0	0
3	$a+b+c$	1	0
4	$\sum^{3} a^2+\sum^{3} ab$	$a+b+c+d$	1
5	$\sum^{3} a^3+\sum^{6} a^2b+abc$	$\sum^{4} a^2+\sum^{6} ab$	$a+b+c+d+e$
6	$\sum^{3} a^4+\sum^{6} a^3b+\sum^{3} a^2b^2+\sum^{3} a^2bc$	$\sum^{4} a^3+\sum^{12} a^2b+\sum^{4} abc$	$\sum^{5} a^2+\sum^{10} ab$
7	$\sum^{3} a^5+\sum^{6} a^4b+\sum^{6} a^3b^2+\sum^{3} a^3bc$ $+\sum^{3} a^2b^2c$	$\sum^{4} a^4+\sum^{12} a^3b+\sum^{6} a^2b^2$ $+\sum^{12} a^2bc+abcd$	$\sum^{5} a^3+\sum^{20} a^2b+\sum^{10} abc$

6　終わりに

数実研に参加すると勉強になります。次回の発表（レポート）も楽しみです。