立命館慶祥中学校･高等学校　時岡郁夫

$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}$ の値について（3 辺に関する対称移動）

1．はじめに

タイトルを正確に書くと，「△ABC と点 P について，点 P を BC，CA，AB に関して対称移動した点をそれぞれ D，E，F とするとき，$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}$ の値について」である。

第 104 回の数実研で発表した「△ABC の外接円に内接する種々の△DEF について，$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}$ の値」の続編である。

種々の点 P について，計算し終わってから，（広義）垂足三角形の面積の 4 倍であることに気がついた。

△ABC と点 P について，P から直線 BC，CA，AB に下した垂線の足をそれぞれ L，M，N とする。P が垂心のとき，△LMN を垂足三角形といい，P が垂心以外の点の場合の△LMNを（広義）垂足三角形という。

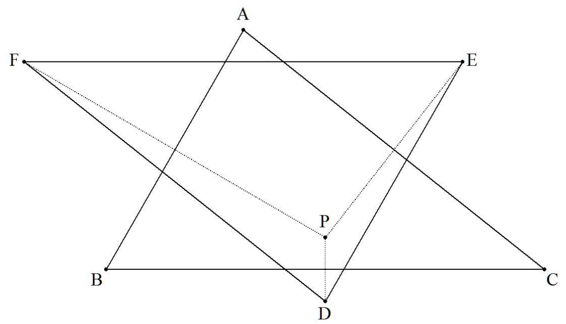
後述の(12)にある外心をO，外接円の半径を R，OP＝ d とすると，$\dfrac{\triangle LMN}{\triangle ABC}=\dfrac{R^2-d^2}{4R^2}$ であるから（参考文献），

$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\dfrac{R^2-d^2}{R^2}$ となる。一見，万能公式のようであるが，五心以外は，OP を計算するのが大変なので，実際は個々の場合を考えることになる。逆に言うと，このこの公式があるから，五心以外の個々の場合についての計算例が見当たらない。

2．本題

点 P を△ABC の BC，CA，AB に関して対称移動した点をそれぞれ D，E，F とする。

点 P が次の場合，$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}$ の値をそれぞれ求めよ。



(1)　外心

(2)　重心

(3)　内心

(4)　垂心

(5)　∠A 内の傍心

(6)　ジェルゴンヌ（Gergonne）点：三角形の内接円と辺の接点と頂点をつなぐ 3 直線は 1 点で交わる。

(7)　ナーゲル（Nagel）点：三角形の傍接円と辺の接点と頂点をつなぐ 3 直線は 1 点で交わる。

(8)　フェルマー（Fermat）点：∠BPC＝∠CPA＝∠APB（3 つの内角はどれも 120° 未満とする。）

(9)　第 1 ブロカール（Brocard）点：∠PAB＝∠PBC＝∠PCA
　（∠PAC＝∠PBA＝∠PCB の場合，第 2 ブロカール点）

(10) ルモワーヌ（Lemoine）点：三角形の角の二等分線に関して中線を折り返した 3 直線は 1 点で交わる。

(11) キーペルト（Kiepert）点：△ABC の外側に各辺を底辺とし，低角 θ の二等辺三角形△A′BC，△B′CA，△C′AB をつくると，AA′，BB′，CC′ は一点で交わる。

(12) P：OP＝ d となる点（O：外心）

3．$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}$ の値一覧

R は外接円の半径，r は内接円の半径，r_1 は∠A内の傍接円の半径，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$，$S=\triangle\mathrm{ABC}$,

(1)　(外心)　1　(∵△DEF≡△ABC)

(2)　(重心)　$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{9R^2}=\dfrac{16s(s-a)(s-b)(s-c)(a^2+b^2+c^2)}{9a^2b^2c^2}$

(3)　(内心)　$\dfrac{2r}{R}=\dfrac{8(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$

(4)　(∠A内の傍心)　$\dfrac{2r_1}{R}=\dfrac{8s(s-b)(s-c)}{abc}$

(5)　(垂心)　$8\cos A\cos B\cos C=\dfrac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{a^2b^2c^2}$

(6)　(Gergonne点)　$\dfrac{4(d-3Rr)S^2}{d^2R^2}$，$d=\dfrac{1}{4}(2bc+2ca+2ab-a^2-b^2-c^2)$

(7)　(Nagel点)　$\dfrac{4(5Rr-d)}{R^2}$，$d=\dfrac{1}{4}(2bc+2ca+2ab-a^2-b^2-c^2)$

(8)　(Fermat点)　$\dfrac{\sqrt{3}S(f-2a^2)(f-2b^2)(f-2c^2)}{a^2b^2c^2\left(f+\dfrac{8}{\sqrt{3}}S\right)}$，$f=a^2+b^2+c^2+\dfrac{4}{\sqrt{3}}S$

(9)　(Brocard点)　$\dfrac{(4S)^2}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$，$(4S)^2=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$

(10)　(Lemoine点)　$\dfrac{3(4S)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}$

(11)　(Kiepert点)　$\dfrac{(-a^2+b^2+c^2+d)(a^2-b^2+c^2+d)(a^2+b^2-c^2+d)\{(a^2+b^2+c^2)d+(4S)^2\}}{R^2\{3d^2+2(a^2+b^2+c^2)d+(4S)^2\}^2}$，$d=\dfrac{4S}{\tan\theta}$

(12)　(O：外心，OP$=d\leqq R$)　$\dfrac{R^2-d^2}{R^2}$

4．具体例

△ABCについて，$a=8$，$b=7$，$c=5$ のときの $\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}$ の値

(1)（外心）1，(2)（重心）$\dfrac{46}{49}$，(3)（内心）$\dfrac{3}{7}$，(4)（∠A内の傍心）$\dfrac{30}{7}$，(5)（垂心）$\dfrac{22}{49}$，

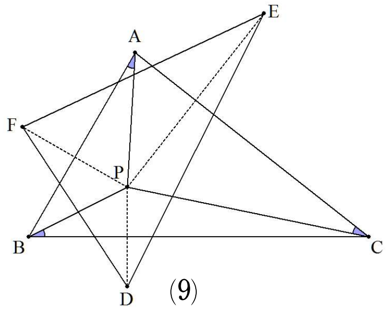
(6)（Gergonne点）$\dfrac{36000}{47089}$，(7)（Nagel点）$\dfrac{48}{49}$，(8)（Fermat点）$\dfrac{1600}{2107}$，

(9)（第1 Brocard点）$\dfrac{1600}{1987}$，

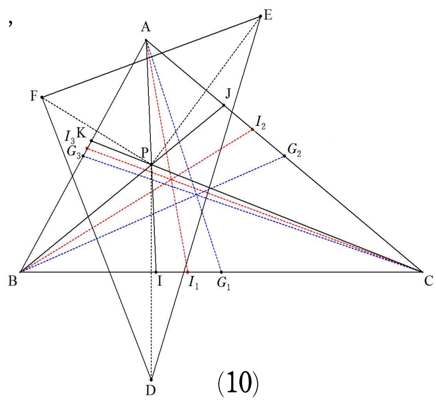
(10)（Lemoine点）$\dfrac{400}{529}$，

(11)（Kiepert点，$\theta=30°$）$\dfrac{7120}{8281}$，

(12)（OP$=2$）$\dfrac{37}{49}$



(9)

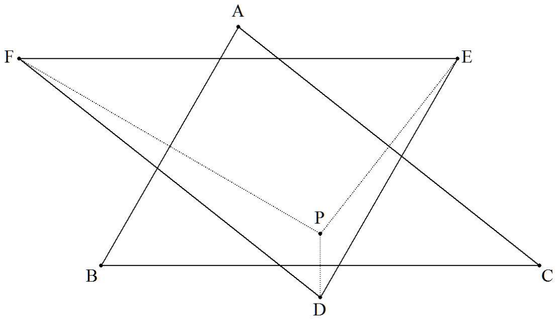


(10)

問題

1．△ABCの外心PをBC，CA，ABに関して対称移動した点をそれぞれD，E，Fとする。

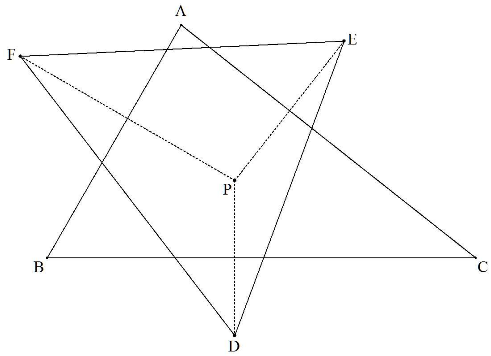
このとき，$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}$の値を求めよ。



2．△ABCの重心PをBC，CA，ABに関して対称移動した点をそれぞれD，E，Fとする。

このとき，$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{9R^2}$ と表されることを証明せよ。

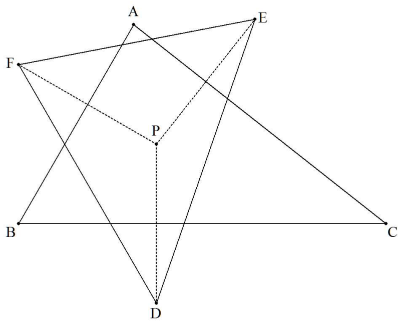
ただし，R は△ABCの外接円の半径とする。



3．△ABCの内心PをBC，CA，ABに関して対称移動した点をそれぞれD，E，Fとする。

このとき，$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\dfrac{2r}{R}$ と表されることを証明せよ。

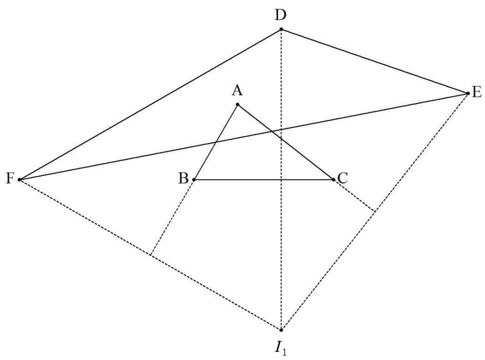
ただし，R，r はそれぞれ△ABCの外接円，内接円の半径とする。



4．△ABCの∠A内の傍心 I_1 をBC，CA，ABに関して対称移動した点をそれぞれD，E，Fとする。

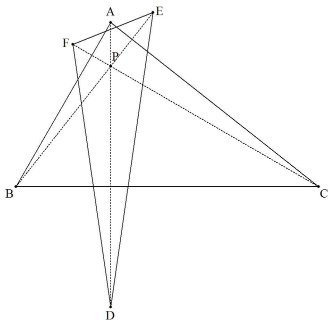
このとき，$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\dfrac{2r_1}{R}$ と表されることを証明せよ。

ただし，R，r_1 はそれぞれ△ABCの外接円，∠A内の傍接円の半径とする。



5．△ABC の垂心 P を BC，CA，AB に関して対称移動した点を
それぞれD，E，F とする。

このとき，$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=8\cos A\cos B\cos C$ と表されることを証明せよ。



6．△ABC の内接円と BC，CA，AB の接点をそれぞれ I，J，K とする。
次を証明せよ。

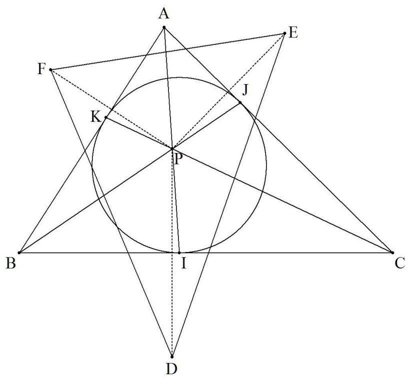
(1) AI，BJ，CK は 1 点 P で交わる。
この点を，ジェルゴンヌ（Gergonne）点という。

(2) 点 P を BC，CA，AB に関して対称移動した点をそれぞれ D，E，F とする。

このとき，$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\dfrac{4(d-3rR)S^2}{d^2R^2}$ と表されることを証明せよ。

ただし，$S=\triangle\mathrm{ABC}$，r，R は，それぞれ△ABC の内接円，外接円の半径，

$d=\dfrac{2bc+2ca+2ab-a^2-b^2-c^2}{4}$ とする。



7．△ABC の 3 つの傍接円と辺 BC，CA，AB との接点をそれぞれ I，J，K とする。

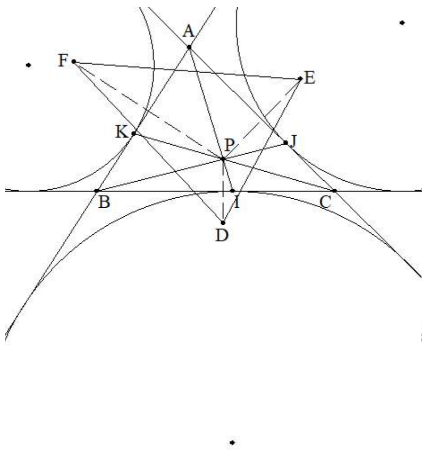
(1) AI，BJ，CK は 1 点 P で交わることを証明せよ。
この点を，ナーゲル（Nagel）点という。

(2) P を BC，CA，AB に関して対称移動した点をそれぞれ D，E，F とする。

このとき，$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\dfrac{4(5Rr-d)}{R^2}$ と表されることを証明せよ。

ただし，r，R は，それぞれ△ABC の内接円，外接円の半径，

$d=\dfrac{2bc+2ca+2ab-a^2-b^2-c^2}{4}$ とする。

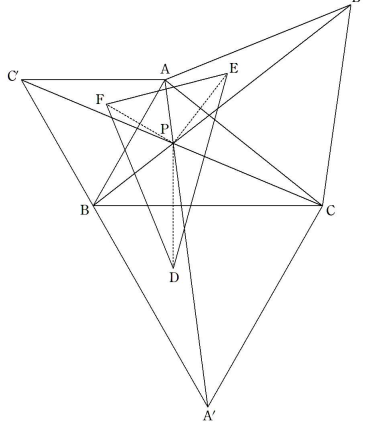


8．△ABC の外側に各辺を 1 辺にもつ正三角形 A′BC，B′CA，C′AB をつくる。

(1) AA′，BB′，CC′ は 1 点 P で交わることを証明せよ。
この点をフェルマー（Fermat）点という。

(2) P を BC，CA，AB に関して対称移動した点をそれぞれ D，E，F とする。

このとき，$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{3}\,S(f-2a^2)(f-2b^2)(f-2c^2)}{a^2b^2c^2\left(f+\dfrac{8}{\sqrt{3}}S\right)}$ と表されることを証明せよ。ただし，$S=\triangle\mathrm{ABC}$，$f=a^2+b^2+c^2+\dfrac{4}{\sqrt{3}}S$ とする。



９．△ABC内に点Pを∠PAB＝∠PBC＝∠PCAとなるようにとる。

(1)　点Pを作図で求めよ。

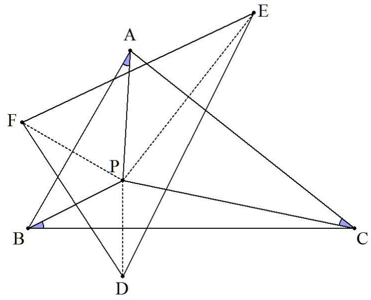
この点を，第1ブロカール（Brocard）点という。

また，∠PAC＝∠PBA＝∠PCBとなる点を第2ブロカール点という。

(2)　点PをBC，CA，ABに関して対称移動した点をそれぞれD，E，Fとする。

このとき，$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\dfrac{(4S)^2}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$ と表されることを証明せよ。

ただし，S＝△ABCとする。



10．△ABCの3つの中線AG_1，BG_2，CG_3をそれぞれ角の二等分線AI_1，BI_2，CI_3に関して折り返した直線をそれぞれAI，BJ，CKとする。

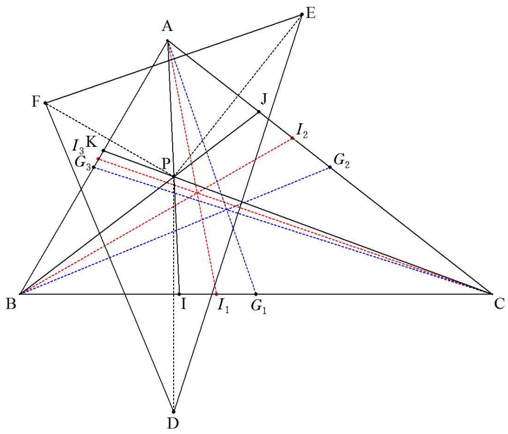
(1)　AI，BJ，CKは1点Pで交わることを証明せよ。

この点をルモワーヌ（Lemoine）点あるいは類似重心という。

(2)　PをBC，CA，ABに関して対称移動した点をそれぞれD，E，Fとす。

このとき，$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\dfrac{3(4S)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}$ と表されることを証明せよ。

ただし，S＝△ABCとする。

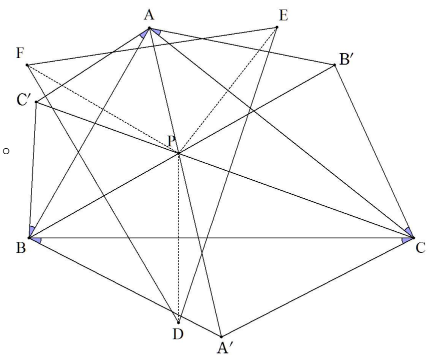


11．△ABCの外側に各辺を底辺とし，低角θの二等辺三角形△A′BC，△B′CA，△C′ABをつくる。

(1)　AA′，BB′，CC′は1点Pで交わることを証明せよ。この点をキーペルト（Kiepert）点という。

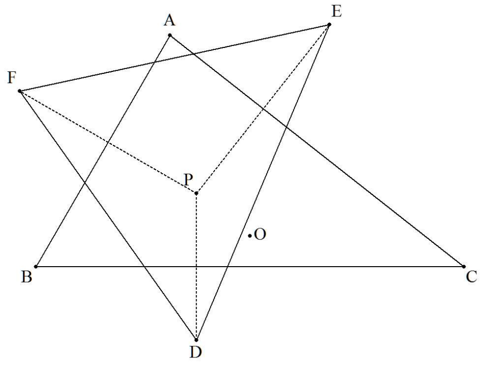
(2)　PをBC，CA，ABに関して対称移動した点をそれぞれD，E，Fとする。

△ABC＝S，$\dfrac{4S}{\tan\theta}=d$ とおくとき，$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}$ の値を求めよ。



12．△ABCの外心をOとし，点Pを△ABCの外接円の内部の点とする。点Pを直線BC，CA，ABに関して対称移動した点を，それぞれD，E，Fとし，OP＝d，△ABCの外接円の半径をRとする。

このとき，$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\dfrac{R^2-d^2}{R^2}$ を証明せよ。



1. 解答例

解答　PD, PE, PF の中点をそれぞれ L, M, N とする。

△DEF∽△LMN で，相似比は 2 : 1 である。

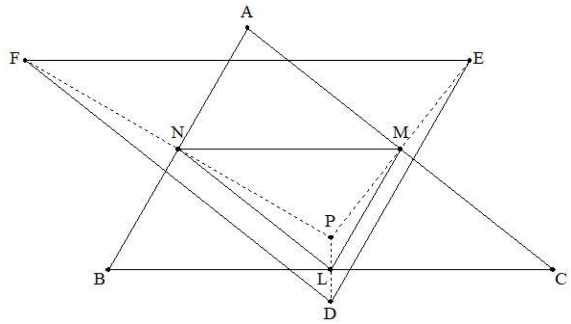
L, M, N はそれぞれ BC, CA, AB の中点でもある。

中点連結定理により，

△ABC∽△LMN で，相似比は 2 : 1 である。

よって，△DEF≡△ABC

よって，$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=1$　答



(2019/9/15　時岡)

2. △ABC$=S$ とおく。

A から BC に下した垂線の足を H_1 とすると，A$H_1=\dfrac{2S}{a}$

PD, PE, PF の中点をそれぞれ L, M, N とする。

P は重心であるから，PL$=\dfrac{1}{3}$A$H_1=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2S}{a}=\dfrac{2S}{3a}$

同様に，PM$=\dfrac{2S}{3b}$，PN$=\dfrac{2S}{3c}$

△DEF∽△LMNで，相似比は 2 : 1 であるから，

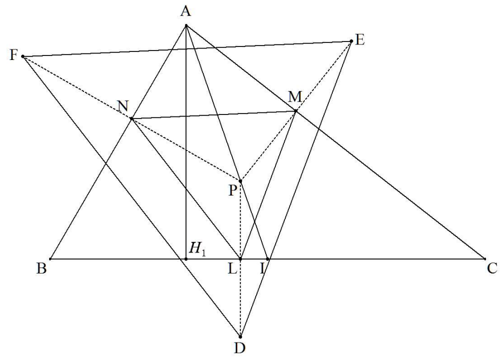
△DEF=4×△LMN=4(△PMN+△PNL+△PLM)

ここで，△PMN$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2S}{3b}\cdot\dfrac{2S}{3c}\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2S}{3b}\cdot\dfrac{2S}{3c}\cdot\dfrac{2S}{bc}=\dfrac{4S^3}{9b^2c^2}$

同様に，△PNL$=\dfrac{4S^3}{9c^2a^2}$，△PLM$=\dfrac{4S^3}{9a^2b^2}$ であるから

△DEF$=4\left(\dfrac{4S^3}{9b^2c^2}+\dfrac{4S^3}{9c^2a^2}+\dfrac{4S^3}{9a^2b^2}\right)=\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{4S}{abc}\right)^2(a^2+b^2+c^2)S=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{9R^2}S$

よって，$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{9R^2}$　終

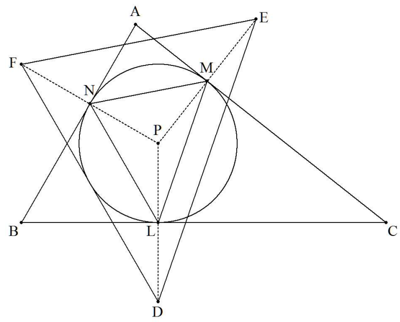


補足　$R=\dfrac{abc}{4S}$，$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$　（$s=\dfrac{a+b+c}{2}$）であるから，辺で表すと

$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\dfrac{16s(s-a)(s-b)(s-c)(a^2+b^2+c^2)}{9a^2b^2c^2}$　答

(2019/9/15　時岡)

３．△ABCの内接円の半径を r，PD，PE，PF の中点をそれぞれ L，M，N とする。



PL＝PM＝ PN＝ r である。

△DEF∽△LMNで，相似比は２：１であるから，

△DEF＝4×△LMN＝4(△PMN＋△PNL＋△PLM)

ここで，△PMN＝$\dfrac{1}{2}r^2\sin A$

同様に，△PNL＝$\dfrac{1}{2}r^2\sin B$ ，△PLM＝$\dfrac{1}{2}r^2\sin C$ であるから

$$\triangle\mathrm{DEF}=4\cdot\frac{1}{2}r^2(\sin A+\sin B+\sin C)=2r^2\left(\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}\right)=\frac{2r^2s}{R}=\frac{2r}{R}S$$

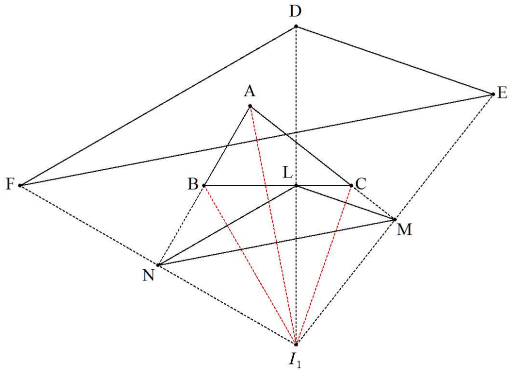
よって，$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\dfrac{2r}{R}$ 終

補足 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ として，辺で表すと

$$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\frac{2\cdot\dfrac{S}{s}}{\dfrac{abc}{4S}}=\frac{8S^2}{abcs}=\frac{8s(s-a)(s-b)(s-c)}{abcs}=\frac{8(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$$ 答

(2019/9/15 時岡)

4．解答　I_1D，I_1E，I_1Fの中点をそれぞれL，M，Nとおく。



△DEF∽△LMNで，相似比が2:1であるから，

△DEF＝4×△LMN＝4×(△I_1ML＋△I_1LN－△I_1MN)

ここで，∠MI_1L＝C，∠LI_1N＝Bである。また，△ABCの∠A内の傍接円の半径をr_1とおくと，I_1L＝I_1M＝I_1N＝r_1であるから

$$\triangle DEF=4\left\{\frac{1}{2}r_1{}^2\sin C+\frac{1}{2}r_1{}^2\sin B-\frac{1}{2}r_1{}^2\sin(B+C)\right\}$$

$$=2r_1{}^2\{\sin B+\sin C-\sin(B+C)\}$$

$$=2r_1{}^2\left(\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}-\frac{a}{2R}\right)=\frac{2r_1{}^2(s-a)}{R}=\frac{2r_1}{R}S$$

よって，$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\dfrac{2r_1}{R}$　終

補足　$s=\dfrac{a+b+c}{2}$ とおくと，$S=r_1(s-a)$，$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$　(ヘロンの公式) であるから，

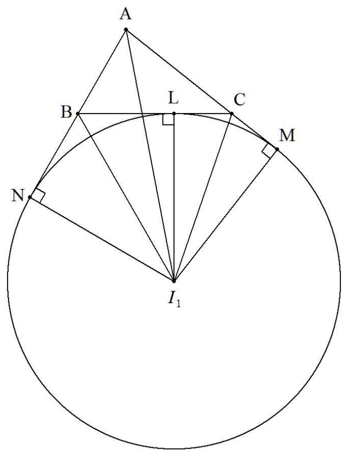
$$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\frac{2r_1}{R}=\frac{\dfrac{2S}{s-a}}{\dfrac{abc}{4S}}=\frac{8S^2}{abc(s-a)}=\frac{8s(s-b)(s-c)}{abc}$$　答

(2019/9/15　時岡)

公式　BC＝a，CA＝b，AB＝cである△ABCの面積をS，∠A内の傍接円の半径をr_1とすると，

$S=r_1(s-a)$ である。ただし，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$

証明　∠A内の傍心をI_1とし，I_1からBC，CA，ABに下した垂線の足をそれぞれL，M，Nとする。



また，便宜上，BL＝a_1，LC＝a_2とおく。$a_1+a_2=a$

AN＋AM＝$(c+a_1)+(a_2+b)=a+b+c=2s$

AN＝AMであるから，AN＝AM＝s，BN＝$s-c$，CM＝$s-b$ である。

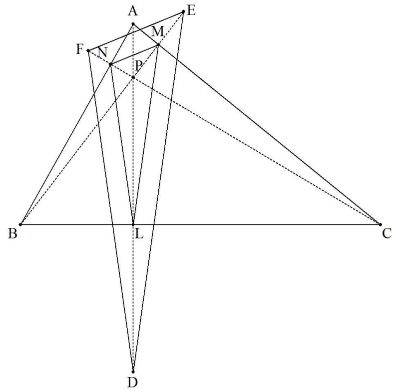
S＝四角形ANI_1M－(四角形BNI_1L＋四角形CLI_1M)

$=r_1s-\{r_1(s-c)+r_1(s-b)\}=r_1(b+c-s)=r_1(s-a)$　終

補足　同様に，∠B，∠C内の傍接円の半径をそれぞれr_2，r_3とおくと，

$S=r_2(s-b)=r_3(s-c)$

5．PD，PE，PF の中点をそれぞれ L，M，N とする。



$\triangle$CPL$\backsim\triangle$CBNより，PL：$a\cos B=b\cos C\ :\ a\sin B$

PL$=\dfrac{a\cos B\cdot b\cos C}{a\sin B}=2R\cos B\cos C$

同様に，PM$=2R\cos C\cos A$，PN$=2R\cos A\cos B$

$\triangle$DEF$\backsim\triangle$LMNで，相似比は 2：1 であるから，

$\triangle$DEF$=4\times\triangle$LMN$=4$($\triangle$PMN$+\triangle$PNL$+\triangle$PLM)

ここで，$\triangle$PMN$=\dfrac{1}{2}\cdot 2R\cos C\cos A\cdot 2R\cos A\cos B\cdot\sin A$

$=R^2\cos A\cos B\cos C\sin 2A$

同様に，$\triangle$PNL$=R^2\cos A\cos B\cos C\sin 2B$，$\triangle$PLM$=R^2\cos A\cos B\cos C\sin 2C$ であるから

$\triangle$DEF$=4R^2\cos A\cos B\cos C(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$

ここで，括弧の中$=2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C=2\sin C\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$

$=2\sin C\cdot(-2)\sin A\sin(-B)=4\sin A\sin B\sin C$ であるから，

$\triangle$DEF$=4R^2\cos A\cos B\cos C\cdot 4\sin A\sin B\sin C=2R^2\sin A\sin B\sin C\cdot 8\cos A\cos B\cos C$

$=S\cdot 8\cos A\cos B\cos C$

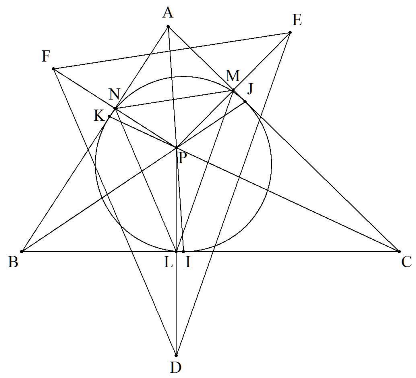
よって，$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=8\cos A\cos B\cos C$ 終

補足 辺で表すと，

$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=8\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{a^2b^2c^2}$ 答

(2019/9/15 時岡)

6．(1) BC$=a$，CA$=b$，AB$=c$，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$ とおく。



AI$=$AK$=s-a$，BK$=$BI$=s-b$，CI$=$CJ$=s-c$ であるから

$\dfrac{AK}{KB}\cdot\dfrac{BI}{IC}\cdot\dfrac{CJ}{JA}=\dfrac{s-a}{s-b}\cdot\dfrac{s-b}{s-c}\cdot\dfrac{s-c}{s-a}=1$ より

チェバの定理の逆により，AI，BJ，CKは1点Pで交わる。

(2) AI$=i$，BJ$=j$，CK$=k$ とおく。

$\angle$AIB$+\angle$AIC$=180^\circ$ であるから，$\cos\angle AIB+\cos\angle AIC=0$

余弦定理より，$\dfrac{i^2+(s-b)^2-c^2}{2i(s-b)}+\dfrac{i^2+(s-c)^2-b^2}{2i(s-c)}=0$

$(s-c)\{i^2+(s-b)^2-c^2\}+(s-b)\{i^2+(s-c)^2-b^2\}=0$

$(2s-b-c)i^2=(s-c)(c+b-s)(s-b+c)+(s-b)(b+c-s)(s-c+b)$

$ai^2=\left(b+c-\dfrac{a+b+c}{2}\right)\{(s-c)(s-b+c)+(s-b)(s+b-c)\}$

$=\dfrac{b+c-a}{2}\{s^2-c^2-b(s-c)+s^2-b^2-c(s-b)\}=(s-a)\{2s^2-b^2-c^2-(b+c)s+2bc\}$

$=(s-a)\{2s^2-(b-c)^2-(2s-a)s\}=(s-a)\{as-(b-c)^2\}$

$\therefore\ i^2=\dfrac{(s-a)\{as-(b-c)^2\}}{a}$ 同様に，$j^2=\dfrac{(s-b)\{bs-(c-a)^2\}}{b}$，$k^2=\dfrac{(s-c)\{cs-(a-b)^2\}}{c}$

メネラウスの定理により $\dfrac{AP}{PI}\cdot\dfrac{IB}{BC}\cdot\dfrac{CM}{MA}=\dfrac{AP}{PI}\cdot\dfrac{s-b}{a}\cdot\dfrac{s-c}{s-a}=1$ であるから，$\dfrac{AP}{PI}=\dfrac{a(s-a)}{(s-b)(s-c)}$

$\therefore$PI$=\dfrac{(s-b)(s-c)}{a(s-a)+(s-b)(s-c)}AI=\dfrac{(s-b)(s-c)}{a(s-a)+(s-b)(s-c)}i$

ここで，$a(s-a)+(s-b)(s-c)=\dfrac{2bc+2ca+2ab-a^2-b^2-c^2}{4}$ は定数であるから，d とおく。

i.e. $d=a(s-a)+(s-b)(s-c)=b(s-b)+(s-c)(s-a)=c(s-c)+(s-a)(s-b)$

$\mathrm{PI}=\dfrac{(s-b)(s-c)i}{d}$ 同様に，$\mathrm{PJ}=\dfrac{(s-c)(s-a)j}{d}$，$\mathrm{PK}=\dfrac{(s-a)(s-b)k}{d}$

PD，PE，PF の中点をそれぞれ L，M，N とする。

$\triangle\mathrm{PBC}=\dfrac{PI}{AI}S=\dfrac{(s-b)(s-c)}{d}S=\dfrac{1}{2}aPL$ より $\therefore \mathrm{PL}=\dfrac{2(s-b)(s-c)}{ad}S$

同様に，$\mathrm{PM}=\dfrac{2(s-c)(s-a)}{bd}S$，$\mathrm{PN}=\dfrac{2(s-a)(s-b)}{cd}S$

△DEF∽△LMNで，相似比は 2 : 1 であるから，△DEF=4×△LMN

ここで，$\triangle\mathrm{PMN}=\dfrac{1}{2}\mathrm{PM}\cdot\mathrm{PN}\sin(180^\circ-A)=\dfrac{1}{2}\mathrm{PM}\cdot\mathrm{PN}\sin A=\dfrac{1}{2}\mathrm{PM}\cdot\mathrm{PN}\dfrac{2S}{bc}=\dfrac{S}{bc}\mathrm{PM}\cdot\mathrm{PN}$

$$=\frac{S}{bc}\cdot\frac{2(s-c)(s-a)}{bd}S\cdot\frac{2(s-a)(s-b)}{cd}S=\frac{4(s-a)^2(s-b)(s-c)}{b^2c^2d^2}S^3$$

$$=\frac{4s(s-a)^2(s-b)(s-c)}{b^2c^2d^2s}S^3=\frac{4(s-a)}{b^2c^2d^2s}S^5$$

同様に，$\triangle\mathrm{PNL}=\dfrac{4(s-b)}{c^2a^2d^2s}S^5$，$\triangle\mathrm{PLM}=\dfrac{4(s-c)}{a^2b^2d^2s}S^5$ であるから，

$\triangle\mathrm{LMN}=\triangle\mathrm{PMN}+\triangle\mathrm{PNL}+\triangle\mathrm{PLM}=\dfrac{4(s-a)}{b^2c^2d^2s}S^5+\dfrac{4(s-b)}{c^2a^2d^2s}S^5+\dfrac{4(s-c)}{a^2b^2d^2s}S^5$

$$=\frac{4S^5}{a^2b^2c^2d^2s}\{a^2(s-a)+b^2(s-b)+c^2(s-c)\}$$

ここで，中括弧の中

$=s(a^2+b^2+c^2)-(a^3+b^3+c^3-3abc+3abc)=s(a^2+b^2+c^2)-2s(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)-3abc$

$=s(-a^2-b^2-c^2+2bc+2ca+2ab)-3abc=s\cdot 4d-3\cdot 4RS=4s\left(d-3\cdot\dfrac{S}{s}\cdot R\right)=4s(d-3rR)$ であるから

$\triangle\mathrm{LMN}=\dfrac{4S^5}{a^2b^2c^2d^2s}\cdot 4s(d-3rR)=\left(\dfrac{4S}{abc}\right)^2\dfrac{(d-3rR)S^3}{d^2}=\dfrac{(d-3rR)S^3}{d^2R^2}$

よって，△DEF=4×△LMN，△ABC= S であるから，$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\dfrac{4\cdot\triangle LMN}{\triangle ABC}=\dfrac{4(d-3rR)S^2}{d^2R^2}$ 終

(2019/9/21 時岡)

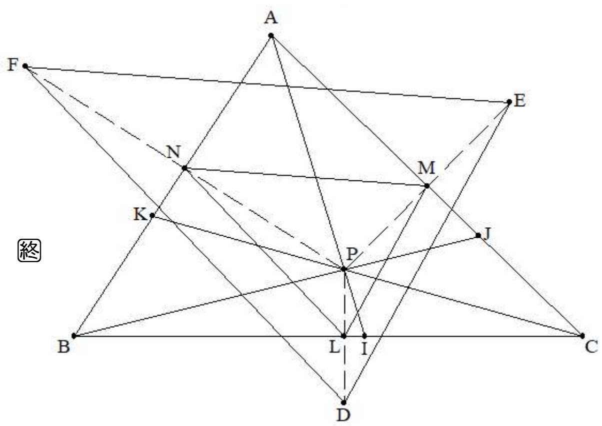
7． (1) I，J，K は傍接円の接点であるから，

KB=CM= $s-a$，IC=AK= $s-b$，MA=BI= $s-c$

である。ただし，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$

$\dfrac{AK}{KB}\cdot\dfrac{BI}{IC}\cdot\dfrac{CJ}{JA}=\dfrac{s-b}{s-a}\cdot\dfrac{s-c}{s-b}\cdot\dfrac{s-a}{s-c}=1$

チェバの定理の逆により，AI，BJ，CKは1点Pで交わる。 終



(2) PD，PE，PF の中点をそれぞれ L，M，N とする。

△DEF∽△LMN で，相似比が 2 : 1 であるから，

△DEF=4×△LMN

△LMN=△PMN+△PNL+△PLM …①である。

メネラウスの定理により

$\dfrac{AP}{PI}\cdot\dfrac{IB}{BC}\cdot\dfrac{CJ}{JA}=\dfrac{AP}{PI}\cdot\dfrac{s-c}{a}\cdot\dfrac{s-a}{s-c}=1$ $\therefore \dfrac{AP}{PI}=\dfrac{a}{s-a}$ より，$\dfrac{PI}{AI}=\dfrac{s-a}{s}$

$\triangle$ABC$=S$ とおくと，$\triangle$PBC$=\dfrac{1}{2}a$ PL$=\dfrac{PI}{AI}S=\dfrac{s-a}{s}S$ より，PL$=\dfrac{2(s-a)}{as}S$

同様に，PM$=\dfrac{2(s-b)}{bs}S$，PN$=\dfrac{2(s-c)}{cs}S$

$\triangle$PMN$=\dfrac{1}{2}$ PM·PN $\sin(180°-A)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2(s-b)}{bs}S\cdot\dfrac{2(s-c)}{cs}S\cdot\dfrac{2S}{bc}=\dfrac{4(s-b)(s-c)}{b^2c^2s^2}S^3$

同様に，$\triangle$PNL$=\dfrac{4(s-c)(s-a)}{c^2a^2s^2}S^3$，$\triangle$PLM$=\dfrac{4(s-a)(s-b)}{a^2b^2s^2}S^3$

これらを①に代入して

$$\triangle\mathrm{LMN}=\frac{4(s-b)(s-c)}{b^2c^2s^2}S^3+\frac{4(s-c)(s-a)}{c^2a^2s^2}S^3+\frac{4(s-a)(s-b)}{a^2b^2s^2}S^3$$

$$=\frac{4S^3}{a^2b^2c^2s^2}\{a^2(s-b)(s-c)+b^2(s-c)(s-a)+b^2(s-a)(s-b)\}$$

{ } の中$=(a^2+b^2+c^2)s^2-\{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\}s+abc(a+b+c)$

$=(a^2+b^2+c^2)s^2-\{(a+b+c)(bc+ca+ab)-3abc\}s+2abcs$

$=(a^2+b^2+c^2)s^2-2(bc+ca+ab)s^2+5abcs=s\{5abc-(2bc+2ca+2ab-a^2-b^2-c^2)s\}$

ここで，$2bc+2ca+2ab-a^2-b^2-c^2=4d$，$abc=4RS$，$r=\dfrac{S}{s}$ であるから

{ } の中$=s(5\cdot4RS-4d\cdot s)=4s^2\left(5R\cdot\dfrac{S}{s}-d\right)=4s^2(5Rr-d)$

$\triangle$LMN$=\dfrac{4S^3}{a^2b^2c^2s^2}\cdot4s^2(5Rr-d)=\left(\dfrac{4S}{abc}\right)^2(5Rr-d)S=\dfrac{5Rr-d}{R^2}S$

よって，$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=4\cdot\dfrac{5Rr-d}{R^2}=\dfrac{4(5Rr-d)}{R^2}$ 終

補足 $d=\dfrac{2bc+2ca+2ab-a^2-b^2-c^2}{4}$ の値について

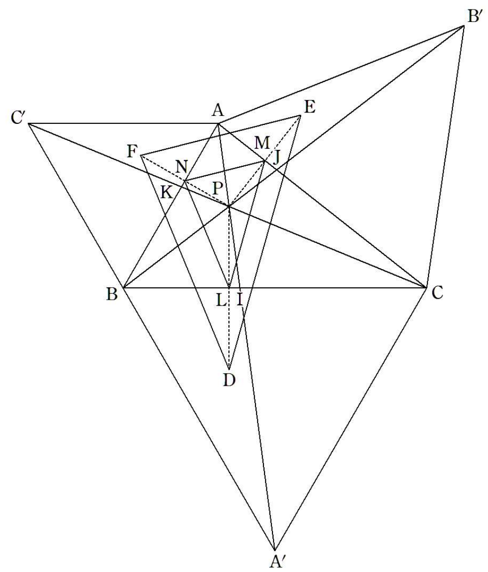
$\triangle$ABC の内接円と BC，CA，AB との接点をそれぞれ I，J，K とすると，AI，BJ，CK は 1 点で交わる。この点をジェルゴンヌ（Gergonne）点という。

この点について，$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}$ の値を計算すると，同様に現れる値である。

$d=a(s-a)+(s-b)(s-c)=b(s-b)+(s-c)(s-a)=c(s-c)+(s-a)(s-b)=bc+ca+ab-s^2$

（2019/9/26 時岡）

８．(1)　AA′とBC，BB′とCA，CC′とABとの交点をそれぞれ，I，J，Kとおく。



正三角形A′BC，B′CA，C′ABの相似比は，$a:b:c$ であるから，

$$\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BI}{IC}\cdot\frac{CJ}{JA}=\frac{\triangle CAC'}{\triangle CBC'}\cdot\frac{\triangle ABA'}{\triangle ACA'}\cdot\frac{\triangle BCB'}{\triangle BAB'}$$

$$=\frac{\triangle CAC'}{\triangle BAB'}\cdot\frac{\triangle ABA'}{\triangle CBC'}\cdot\frac{\triangle BCB'}{\triangle ACA'}=\frac{c\cdot b}{b\cdot c}\cdot\frac{a\cdot c}{c\cdot a}\cdot\frac{b\cdot a}{a\cdot b}=1$$

チェバの定理の逆により，AA′，BB′，CC′は1点Pで交わる。

(2)　AP$=x$，BP$=y$，CP$=z$ とおく。

$$\triangle \mathrm{PBC}=\frac{1}{2}yz\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}yz$$

同様に，$\triangle \mathrm{PCA}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}zx$，$\triangle \mathrm{PAB}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}xy$

これらを，$\triangle \mathrm{PBC}+\triangle \mathrm{PCA}+\triangle \mathrm{PAB}=S$ に代入すると，

$$\frac{\sqrt{3}}{4}yz+\frac{\sqrt{3}}{4}zx+\frac{\sqrt{3}}{4}xy=S$$

$$\therefore\ yz+zx+xy=\frac{4}{\sqrt{3}}S \quad \cdots①$$

△PBCに余弦定理を適用すると，$y^2+z^2-2yz\cos 120^\circ=a^2$　$\therefore\ y^2+yz+z^2=a^2$　…②

同様に，$z^2+zx+x^2=b^2$　…③，$x^2+xy+y^2=c^2$　…④

②+③+④より，$2(x^2+y^2+z^2)+yz+zx+xy=a^2+b^2+c^2$

変形すると，$2(x+y+z)^2-3(yz+zx+xy)=a^2+b^2+c^2$

これに①を代入すると，$2(x+y+z)^2-3\cdot\dfrac{4}{\sqrt{3}}S=a^2+b^2+c^2$

$x+y+z>0$ より，$x+y+z=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S}{2}}=k$　…⑤とおく。

②−③より，$(y-x)(y+x)+z(y-x)=a^2-b^2$　$(y-x)(y+x+z)=a^2-b^2$　$\therefore\ y=x+\dfrac{a^2-b^2}{k}$　…⑥

同様に，②−④より，$(z-x)(z+x)+y(z-x)=a^2-c^2$　$\therefore z=x+\dfrac{a^2-c^2}{k}$　…⑦

⑥，⑦を⑤に代入すると，$x+\left(x+\dfrac{a^2-b^2}{k}\right)+\left(x+\dfrac{a^2-c^2}{k}\right)=k$

$$3x=k-\frac{2a^2-b^2-c^2}{k}=\frac{k^2-2a^2+b^2+c^2}{k}=\frac{\dfrac{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S}{2}-2a^2+b^2+c^2}{k}$$

$$=\frac{-3a^2+3b^2+3c^2+4\sqrt{3}S}{2k}$$

$$\therefore\ x=\frac{-a^2+b^2+c^2+\dfrac{4}{\sqrt{3}}S}{2k}\quad 同様に，\ y=\frac{a^2-b^2+c^2+\dfrac{4}{\sqrt{3}}S}{2k},\quad z=\frac{a^2+b^2-c^2+\dfrac{4}{\sqrt{3}}S}{2k}$$

PD，PE，PFの中点をそれぞれL，M，Nとおく。

$\triangle \mathrm{PBC}=\dfrac{1}{2}a\,\mathrm{PL}=\dfrac{1}{2}yz\sin 120^\circ$ より，$\mathrm{PL}=\dfrac{\sqrt{3}\,yx}{2a}$　同様に，$\mathrm{PM}=\dfrac{\sqrt{3}\,zx}{2b}$，$\mathrm{PN}=\dfrac{\sqrt{3}\,xy}{2c}$

$$\triangle \mathrm{PMN}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}\,zx}{2b}\cdot\frac{\sqrt{3}\,xy}{2c}\sin A=\frac{3x^2yz}{8bc}\cdot\frac{2S}{bc}=\frac{3x^2yzS}{4b^2c^2}$$

同様に，$\triangle \mathrm{PNL}=\dfrac{3xy^2zS}{4c^2a^2}$，$\triangle \mathrm{PLM}=\dfrac{3xyz^2S}{4a^2b^2}$

$\triangle$LMN$=\triangle$PMN$+\triangle$PNL$+\triangle$PLM$=\dfrac{3x^2yzS}{4b^2c^2}+\dfrac{3xy^2zS}{4c^2a^2}+\dfrac{3xyz^2S}{4a^2b^2}=\dfrac{3xyz(a^2x+b^2y+c^2z)}{4a^2b^2c^2}S$

$\triangle$DEF∽$\triangle$LMNで，相似比は2 : 1 であるから，$\triangle$DEF$=4\times\triangle$LMN

$$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=4\times\frac{3xyz(a^2x+b^2y+c^2z)}{4a^2b^2c^2}=\frac{3xyz(a^2x+b^2y+c^2z)}{a^2b^2c^2}$$

ここで，

$$a^2x+b^2y+c^2z=a^2\cdot\frac{-a^2+b^2+c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S}{2k}+b^2\cdot\frac{a^2-b^2+c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S}{2k}+c^2\cdot\frac{a^2+b^2-c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S}{2k}$$

$$=\frac{1}{2k}\left\{a^2(-a^2+b^2+c^2)+b^2(a^2-b^2+c^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)+\frac{4}{\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2)S\right\}$$

$$=\frac{1}{2k}\left\{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4+\frac{4}{\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2)S\right\}$$

$$=\frac{1}{2k}\left\{(4S)^2+\frac{4}{\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2)S\right\}=\frac{4S}{2\sqrt{3}\,k}(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S)=\frac{2S}{\sqrt{3}\,k}\cdot 2k^2\quad(\because ⑤\text{より})=\frac{4kS}{\sqrt{3}}$$

よって，

$$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\frac{3\left(\frac{-a^2+b^2+c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S}{2k}\right)\left(\frac{a^2-b^2+c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S}{2k}\right)\left(\frac{a^2+b^2-c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S}{2k}\right)\cdot\frac{4kS}{\sqrt{3}}}{a^2b^2c^2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}S\left(-a^2+b^2+c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)\left(a^2-b^2+c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)\left(a^2+b^2-c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)}{a^2b^2c^2\cdot 2k^2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}S\left(-a^2+b^2+c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)\left(a^2-b^2+c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)\left(a^2+b^2-c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)}{a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S)}$$

ここで，$a^2+b^2+c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S=f$ とおくと，$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{3}S(f-2a^2)(f-2b^2)(f-2c^2)}{a^2b^2c^2\left(f+\frac{8}{\sqrt{3}}S\right)}$ 終

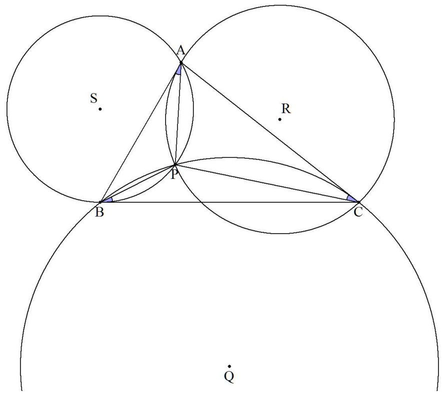
補足 (11) Kiepert点の場合のように求めることもできる。

(2019/9/19 時岡)

9．(1) Cを通り，CAに垂直な直線とBCの垂直二等分線の交点Qを中心，QCを半径とする円を描く。

同様に，Aを通り，ABに垂直な直線とCAの垂直二等分線の交点Rを中心，RAを半径とする円を描く。この2円の交点のうち，C以外の交点が求める点Pである。

なお，Bを通り，BCに垂直な直線とABの垂直二等分線の交点Sを中心，SBを半径とする円は点Pを通る。



証明

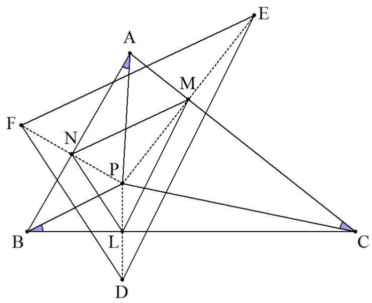
円Qにおいて，接弦定理より，∠PBC＝∠PCA …①

同様に，円Rにおいて，∠PCA＝∠PAB …②

①，②より，∠PAC＝∠PBCであるから，接弦定理の逆により，PはBでBCに接し，点Aを通る円周上の点である。

よって，この点Pのとき，∠PAB＝∠PBC＝∠PCAとなる。 終

(2) $\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA=\omega$，$AP=x$，$BP=y$，$CP=z$ とおく。



$$\triangle PBC=\frac{1}{2}ay\sin\omega=\frac{1}{2}ay\cos\omega\tan\omega=\frac{a^2+y^2-z^2}{4}\tan\omega$$

同様に，$\triangle PCA=\dfrac{b^2+y^2-x^2}{4}\tan\omega$，$\triangle PAB=\dfrac{c^2+x^2-y^2}{4}\tan\omega$

$\triangle PBC+\triangle PCA+\triangle PAB=S$ であるから

$$\frac{a^2+y^2-z^2}{4}\tan\omega+\frac{b^2+y^2-x^2}{4}\tan\omega+\frac{c^2+x^2-y^2}{4}\tan\omega=S$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{4}\tan\omega=S\quad\therefore\tan\omega=\frac{4S}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\sin\omega=\frac{\tan\omega}{\sqrt{1+\tan^2\omega}}=\frac{\dfrac{4S}{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{4S}{a^2+b^2+c^2}\right)^2}}=\frac{4S}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2+2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}}$$

$$=\frac{4S}{\sqrt{4(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)}}=\frac{2S}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}\quad\cdots①$$

PD，PE，PF の中点をそれぞれ L，M，N とする。

$\triangle DEF\backsim\triangle LMN$で，相似比は $2:1$ であるから，$\triangle DEF=4\times\triangle LMN=4(\triangle PMN+\triangle PNL+\triangle PLM)$

$PL=y\sin\omega$，$PM=z\sin\omega$，$PN=x\sin\omega$

$\triangle PAB$に正弦定理を適用すると，$\dfrac{y}{\sin\omega}=\dfrac{c}{\sin B}$ $\therefore y=\dfrac{c\sin\omega}{\sin B}$ 同様に，$z=\dfrac{a\sin\omega}{\sin C}$，$x=\dfrac{b\sin\omega}{\sin A}$

$PL=\dfrac{c\sin^2\omega}{\sin B}$，$PM=\dfrac{a\sin^2\omega}{\sin C}$，$PN=\dfrac{b\sin^2\omega}{\sin A}$

$$\triangle PMN=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sin^2\omega}{\sin C}\cdot\frac{b\sin^2\omega}{\sin A}\cdot\sin A=\frac{ab\sin^4\omega}{2\sin C}=\frac{ab\cdot ab\sin^4\omega}{2\cdot 2S}=\frac{a^2b^2\sin^4\omega}{4S}$$

同様に，$\triangle PBC=\dfrac{b^2c^2\sin^4\omega}{4S}$，$\triangle PCA=\dfrac{c^2a^2\sin^4\omega}{4S}$ である。

$$\triangle LMN=\frac{a^2b^2\sin^4\omega}{4S}+\frac{b^2c^2\sin^4\omega}{4S}+\frac{c^2a^2\sin^4\omega}{4S}=\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{4S}\sin^4\omega$$

①を代入すると

$$\triangle LMN=\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{4S}\left(\frac{2S}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}\right)^4=\frac{4S^3}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$$

よって，

$$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=4\cdot\frac{4S^2}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}=\frac{(4S)^2}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$$ 終

補足　辺で表すと

$$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\frac{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}\leqq 1$$

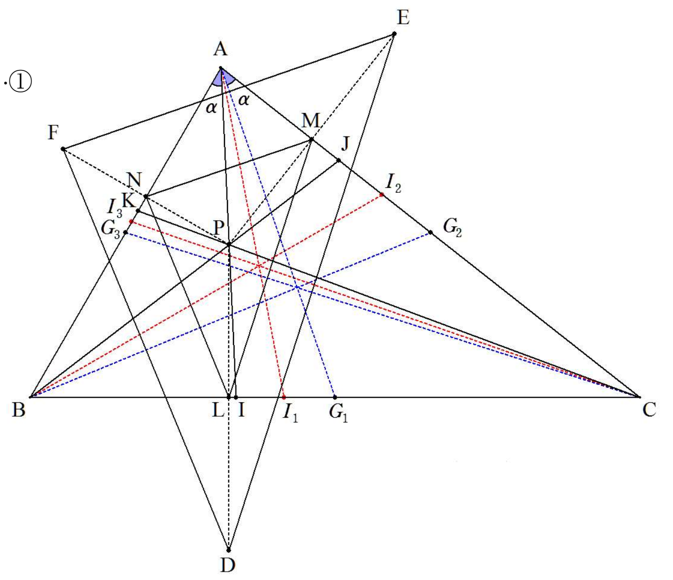
証明　$a^4+b^4+c^4-(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)=\dfrac{1}{2}\{(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2+(a^2-b^2)^2\}\geqq 0$

$\dfrac{a^4+b^4+c^4}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}\geqq 1$ より，$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=2-\dfrac{a^4+b^4+c^4}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}\leqq 2-1=1$ 終

(2019/9/16　時岡)

10. (1)　中線 $AG_1=l$ とおくと，中線定理により，

$$b^2+c^2=2\left\{l^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right\} \quad \therefore l^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4} \quad \cdots ①$$



[1]　$b>c$ の場合

$\angle BAI=\angle CAG_1=\alpha$，$BI=x_1$ $\left(0<x_1<\dfrac{a}{2}\right)$，

$AI=y_1 l$ とおく。

$\triangle ABI$，$\triangle ACG_1$ に正弦定理を適用して，

$$\frac{x_1}{\sin\alpha}=\frac{y_1 l}{\sin B},\quad \frac{\frac{a}{2}}{\sin\alpha}=\frac{l}{\sin C}$$

この2式より $\sin\alpha$ を消去すると，

$$y_1=\frac{2\sin B}{a\sin C}x_1=\frac{2b}{ca}x_1 \quad \cdots ②$$

$\triangle ABI$ に余弦定理を適用すると，

$$(y_1 l)^2=c^2+x_1^2-2cx_1\cos B$$

これに，①，②，$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$ を代入すると，

$$\left(\frac{2b}{ca}x_1\right)^2\cdot\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}=c^2+x_1^2-2cx_1\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

両辺に c^2a^2 をかけ，整理すると，$\{b^2(2b^2+2c^2-a^2)-c^2a^2\}x_1^2+c^2a(c^2+a^2-b^2)x_1-c^4a^2=0$

$$(2b^2-a^2)(b^2+c^2)x_1^2+c^2a(c^2+a^2-b^2)x_1+c^2a(-c^2a)=0$$

$$\begin{array}{lcl} 2b^2-a^2 & c^2a \longrightarrow & ab^2c^2+ac^4 \\ b^2+c^2 & -c^2a \longrightarrow & -2ab^2c^2+a^3c^2 \\ \hline & & c^2a(c^2+a^2-b^2) \end{array}$$

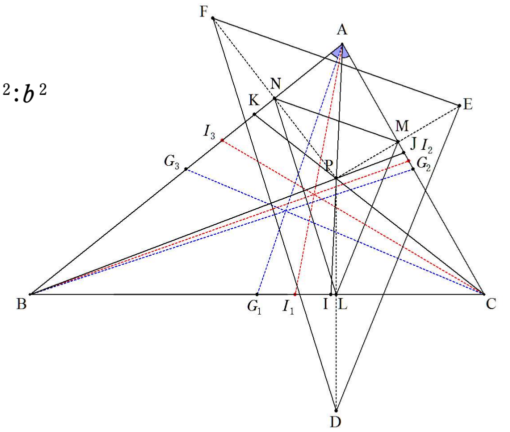
$$\therefore \{(2b^2-a^2)x_1+c^2a\}\{(b^2+c^2)x_1-c^2a\}=0$$

$0<x_1<\dfrac{a}{2}$ より，$x_1=\dfrac{c^2a}{a^2-2b^2}$ は不適。

(∵) (i)　$a^2-2b^2<0$ のとき，$x_1<0$ より，不適。

(ii)　$a^2-2b^2>0$ のとき，$\dfrac{a}{2}-x_1=\dfrac{a}{2}-\dfrac{c^2a}{a^2-2b^2}=\dfrac{a(a^2-2b^2-2c^2)}{2(a^2-2b^2)}=-\dfrac{2al}{a^2-2b^2}<0$ より，不適。

(iii)　$a^2-2b^2=0$ のとき，x_1 は解にならない。



$\therefore x_1=\dfrac{c^2a}{b^2+c^2}=BI$，$IC=a-\dfrac{c^2a}{b^2+c^2}=\dfrac{ab^2}{b^2+c^2}$　$\therefore BI:IC=c^2:b^2$

同様に，$CJ:JA=a^2:c^2$，$AK:KB=b^2:a^2$

よって，$\dfrac{AK}{KB}\cdot\dfrac{BI}{IC}\cdot\dfrac{CJ}{JA}=\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{c^2}{b^2}\cdot\dfrac{a^2}{c^2}=1$ より，

チェバの定理の逆により，AI，BJ，CJ は1点で交わる。　終

[2]　$b<c$ のとき（右図）

$\angle CAI=\angle BAG_1=\alpha$，$CI=x_1$ $\left(0<x_1<\dfrac{a}{2}\right)$，$AI=y_1 l$ とおくと，

[1] と同様の結果が得られる。

(2)　PD，PE，PF の中点をそれぞれ L，M，N とする。

$\triangle DEF \backsim \triangle LMN$ で，相似比は $2:1$ であるから，$\triangle DEF=4\times\triangle LMN=4$（$\triangle PMN+\triangle PNL+\triangle PLM$）

$\triangle$PMN$=\dfrac{1}{2}$ PM･PN $\sin A$，$\triangle$PNL$=\dfrac{1}{2}$ PN･PL $\sin B$，$\triangle$PLM$=\dfrac{1}{2}$ PL･PM $\sin C$ であるから，PL，PM，PN を求める。

メネラウスの定理から，$\dfrac{AP}{PI}\cdot\dfrac{IB}{BC}\cdot\dfrac{CJ}{JA}=\dfrac{AP}{PI}\cdot\dfrac{c^2}{c^2+b^2}\cdot\dfrac{a^2}{c^2}=1$ より，$\dfrac{AP}{PI}=\dfrac{b^2+c^2}{a^2}$

$\therefore \dfrac{PI}{AI}=\dfrac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$

$\triangle$PBC$=\dfrac{1}{2}a$ PL$=\dfrac{PI}{AI}S=\dfrac{a^2}{a^2+b^2+c^2}S$ より，PL$=\dfrac{2a}{a^2+b^2+c^2}S$

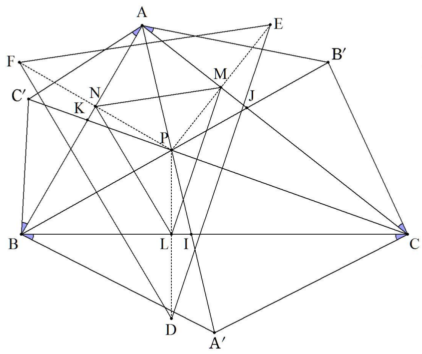
同様に，PM$=\dfrac{2b}{a^2+b^2+c^2}S$，PN$=\dfrac{2c}{a^2+b^2+c^2}S$

$\triangle$PMN$=\dfrac{1}{2}$ PM･PN $\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2b}{a^2+b^2+c^2}S\cdot\dfrac{2c}{a^2+b^2+c^2}S\cdot\dfrac{2S}{bc}=\dfrac{4S^3}{(a^2+b^2+c^2)^2}$

同様に，$\triangle$PNL$=\triangle$PLM$=\dfrac{4S^3}{(a^2+b^2+c^2)^2}$

よって，$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=4\cdot 3\cdot\dfrac{4S^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}=\dfrac{3(4S)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}$ 終　　(2019/9/28　時岡)

11. 解答



(1)　AA′とBC，BB′とCA，CC′とABとの交点をそれぞれ，I，J，K とおく。相似である△A′BC，△B′CA，△C′ABの相似比は，$a:b:c$ であるから，A′B=A′C$=ka$ とおくと，B′C=B′A$=kb$，C′A=C′B$=kc$ となる。

ただし，$k=\dfrac{1}{2\cos\theta}$

$\dfrac{AK}{KB}\cdot\dfrac{BI}{IC}\cdot\dfrac{CJ}{JA}=\dfrac{\triangle CAC'}{\triangle CBC'}\cdot\dfrac{\triangle ABA'}{\triangle ACA'}\cdot\dfrac{\triangle BCB'}{\triangle BAB'}$

$=\dfrac{\triangle CAC'}{\triangle BAB'}\cdot\dfrac{\triangle ABA'}{\triangle CBC'}\cdot\dfrac{\triangle BCB'}{\triangle ACA'}=\dfrac{kc\cdot b}{kb\cdot c}\cdot\dfrac{ka\cdot c}{kc\cdot a}\cdot\dfrac{kb\cdot a}{ka\cdot b}=1$

よって，チェバの定理の逆により，AI，BJ，CK は1点で交わる。

I，J，K はそれぞれ AA′，BB′，CC′ 上の点であるから，AA′，BB′，CC′ は1点 P で交わる。

(2)　PD，PE，PF の中点をそれぞれ L，M，N とおく。

BI : IC=△ABA′ : △ACA′$=\dfrac{1}{2}c\cdot ka\sin(B+\theta)\ :\ \dfrac{1}{2}b\cdot ka\sin(C+\theta)=c\sin(B+\theta)\ :\ b\sin(C+\theta)$ より

BI$=\dfrac{c\sin(B+\theta)}{c\sin(B+\theta)+b\sin(C+\theta)}\cdot a=\dfrac{c(\sin B\cos\theta+\cos B\sin\theta)}{c(\sin B\cos\theta+\cos B\sin\theta)+b(\sin C\cos\theta+\cos C\sin\theta)}\cdot a$

$=\dfrac{c\cos B\sin\theta+c\sin B\cos\theta}{(c\cos B+b\cos C)\sin\theta+(c\sin B+b\cos C)\cos\theta}\cdot a=\dfrac{c\cos B\sin\theta+c\sin B\cos\theta}{a\sin\theta+2c\sin B\cos\theta}\cdot a$

$=\dfrac{c\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\cdot\sin\theta+c\cdot\dfrac{2S}{ca}\cdot\cos\theta}{a\sin\theta+2c\cdot\dfrac{2S}{ca}\cdot\cos\theta}\cdot a=\dfrac{(c^2+a^2-b^2)\sin\theta+4S\cos\theta}{2(a^2\sin\theta+4S\cos\theta)}\cdot a=\dfrac{c^2+a^2-b^2+\dfrac{4S}{\tan\theta}}{2\left(a^2+\dfrac{4S}{\tan\theta}\right)}\cdot a$

$=\dfrac{a^2-b^2+c^2+d}{2(a^2+d)}\cdot a$

ここで，$-a^2+b^2+c^2+d=d_1$，$a^2-b^2+c^2+d=d_2$，$a^2+b^2-c^2+d=d_3$ とおくと，

BI$=\dfrac{ad_2}{2(a^2+d)}$，IC$=a-\dfrac{ad_2}{2(a^2+d)}=\dfrac{a\{2(a^2+d)-(a^2-b^2+c^2+d)\}}{2(a^2+d)}=\dfrac{a(a^2+b^2-c^2+d)}{2(a^2+d)}=\dfrac{ad_3}{2(a^2+d)}$

同様に，CJ$=\dfrac{bd_3}{2(b^2+d)}$，JA$=\dfrac{bd_1}{2(b^2+d)}$，AK$=\dfrac{cd_1}{2(c^2+d)}$，KB$=\dfrac{cd_2}{2(c^2+d)}$

次に，メネラウスの定理により，$\dfrac{AP}{PI}\cdot\dfrac{IB}{BC}\cdot\dfrac{CJ}{JA}=1$　　$\dfrac{AP}{PI}\cdot\dfrac{\dfrac{ad_2}{2(a^2+d)}}{a}\cdot\dfrac{\dfrac{bd_3}{2(b^2+d)}}{\dfrac{bd_1}{2(b^2+d)}}=1$

$\therefore\ \dfrac{AP}{PI}=\dfrac{2(a^2+d)d_1}{d_2d_3}$，　$\dfrac{PI}{AI}=\dfrac{d_2d_3}{2(a^2+d)d_1+d_2d_3}$

ここで，$2(a^2+d)d_1+d_2d_3=2(a^2+d)(-a^2+b^2+c^2+d)+(a^2-b^2+c^2+d)(a^2+b^2-c^2+d)$

$=2(d^2-a^4)+2a^2(b^2+c^2)+2(b^2+c^2)d+(a^2+d)^2-(b^2-c^2)^2$

$=3d^2+2(a^2+b^2+c^2)d+2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$

$=3d^2+2(a^2+b^2+c^2)d+(4S)^2$

これは，a，b，c について対称式であるから定数となる。

$2(a^2+d)d_1+d_2d_3=2(b^2+d)d_2+d_3d_1=2(c^2+d)d_3+d_1d_2=e$ とおくと，$\dfrac{PI}{AI}=\dfrac{d_2d_3}{e}$

△PBC$=\dfrac{PI}{AI}\cdot S=\dfrac{d_2d_3S}{e}=\dfrac{1}{2}a$・PL より，PL$=\dfrac{2d_2d_3S}{ae}$　同様に，PM$=\dfrac{2d_3d_1S}{be}$，PN$=\dfrac{2d_1d_2S}{ce}$

△PMN$=\dfrac{1}{2}$PM・PN$\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2d_3d_1S}{be}\cdot\dfrac{2d_1d_2S}{ce}\cdot\dfrac{2S}{bc}=\dfrac{4d_1{}^2d_2d_3S^3}{b^2c^2e^2}$

同様に，△PNL$=\dfrac{4d_1d_2{}^2d_3S^3}{c^2a^2e^2}$，△PLM$=\dfrac{4d_1d_2d_3{}^2S^3}{a^2b^2e^2}$

△LMN=△PMN+△PNL+△PLM$=\dfrac{4d_1{}^2d_2d_3S^3}{b^2c^2e^2}+\dfrac{4d_1d_2{}^2d_3S^3}{c^2a^2e^2}+\dfrac{4d_1d_2d_3{}^2S^3}{a^2b^2e^2}$

$=\dfrac{4d_1d_2d_3(a^2d_1+b^2d_2+c^2d_3)S^3}{a^2b^2c^2e^2}$

ここで，$a^2d_1+b^2d_2+c^2d_3=a^2(-a^2+b^2+c^2+d)+b^2(a^2-b^2+c^2+d)+c^2(a^2+b^2-c^2+d)$

$=(a^2+b^2+c^2)d+2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$

$=(a^2+b^2+c^2)d+(4S)^2$ であるから

△LMN$=\dfrac{4d_1d_2d_3\{(a^2+b^2+c^2)d+(4S)^2\}S^3}{a^2b^2c^2e^2}$

△DEF∽△LMNで，相似比は2：1であるから，△DEF=4×△LMN

よって，

$$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=4\times\frac{4d_1d_2d_3\{(a^2+b^2+c^2)d+(4S)^2\}S^2}{a^2b^2c^2e^2}$$

$$=\frac{(4S)^2(-a^2+b^2+c^2+d)(a^2-b^2+c^2+d)(a^2+b^2-c^2+d)\{(a^2+b^2+c^2)d+(4S)^2\}}{a^2b^2c^2\{3d^2+2(a^2+b^2+c^2)d+(4S)^2\}^2}$$

$$=\frac{(-a^2+b^2+c^2+d)(a^2-b^2+c^2+d)(a^2+b^2-c^2+d)\{(a^2+b^2+c^2)d+(4S)^2\}}{R^2\{3d^2+2(a^2+b^2+c^2)d+(4S)^2\}^2}$$ 答

補足

(1)　$\theta=60^\circ$ のとき，Kiepert点は8. のFermat点の場合に一致する。上式に，$d=\dfrac{4S}{\tan 60^\circ}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}S$ を代入する。

分子の{ }の中$=(a^2+b^2+c^2)\cdot\dfrac{4S}{\sqrt{3}}+(4S)^2=\dfrac{4S}{\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S)$

分母の{ }の中$=3\cdot\left(\dfrac{4S}{\sqrt{3}}\right)^2+2(a^2+b^2+c^2)\cdot\dfrac{4S}{\sqrt{3}}+(4S)^2=2\cdot\dfrac{4S}{\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S)$

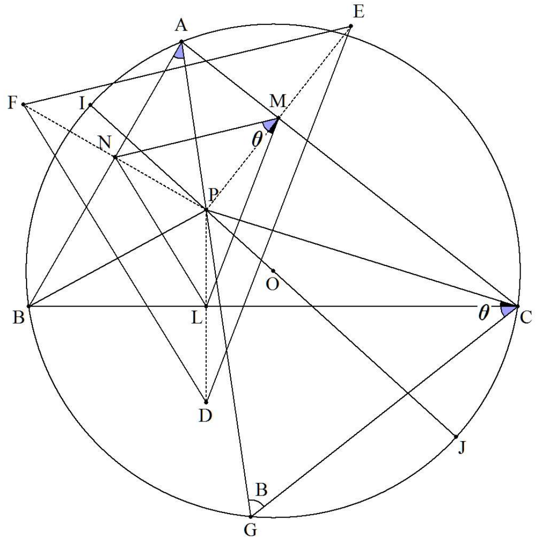
$$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\frac{(4S)^2\left(-a^2+b^2+c^2+\frac{4S}{\sqrt{3}}\right)\left(a^2-b^2+c^2+\frac{4S}{\sqrt{3}}\right)\left(a^2+b^2-c^2+\frac{4S}{\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{4S}{\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S)}{a^2b^2c^2\left\{2\cdot\frac{4S}{\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S)\right\}^2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}S\left(-a^2+b^2+c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)\left(a^2-b^2+c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)\left(a^2+b^2-c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)}{a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S)}$$

これで，8.（Fermat点の場合）の結果と一致することが確かめられた。

（2019/10/5　時岡）

12. △ABCの外接円の半径を R，PD，PE，PFの中点をそれぞれL，M，Nとする。



△DEF∽△LMNで，相似比は2：1であるから，

△DEF=4×△LMN

まず，△LMNの面積を求める。

∠LMN= θ とおく。

四角形ANPMは，∠AMP+∠ANP=90°+90°=180°より円に内接する。

△AMNに正弦定理を適用すると，$\frac{MN}{\sin A}$ =AP（直径）

∴MN=AP $\sin A$

同様に，四角形CMPLは円に内接するから，LM=CP $\sin C$

△LMN= $\frac{1}{2}$ LM•MN $\sin\theta$ ＝ $\frac{1}{2}$ •CP $\sin C$ •AP $\sin A\sin\theta$

＝ $\frac{1}{2}$ AP•CP $\sin\theta\sin A\sin C$　…①

ここで，APの延長と外接円との交点をGとする。

四角形ANPMおよび四角形CMPLは円に内接し，円周角は等しいから

∠GCP=∠GCB+∠BCP=∠GAB+∠LCP=∠PAN+∠LCP=∠PMN+∠LMP=∠LMN= θ

∠CGP=∠CGA=∠CBA=Bであるから，△PGCに正弦定理を適用すると，$\frac{CP}{\sin B}=\frac{PG}{\sin\theta}$

∴ CP $\sin\theta$ =PG $\sin B$　これを①に代入すると，△LMN= $\frac{1}{2}$ AP•PG $\sin B\cdot\sin A\sin C$　…②

また，直線OPと外接円の交点を図のようにI，Jとすると，

方べきの定理より，AP•PG=IP•PJ= $(R-d)(R+d)=R^2-d^2$ であるから，②に代入すると，

$$\triangle LMN=\frac{1}{2}(R^2-d^2)\sin A\sin B\sin C=\frac{1}{2}(R^2-d^2)\sin A\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{c}{2R}=\frac{R^2-d^2}{4R^2}\cdot\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{R^2-d^2}{4R^2}\cdot S$$

…③

よって，$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\frac{4\cdot\triangle LMN}{S}=\frac{R^2-d^2}{R^2}$　終

補足

(1)　点Pが外接円周上にあるとき，OP= R より，△LMN=0

これは，△LMNがつぶれて，3点L，M，Nが一直線上にあることを示している。（シムソン線）

定理　（Simsonの定理）

三角形の外接円周上の任意の1点Pから3辺BC，CA，ABに垂線PD，PE，PFを下せば，3点D，E，Fは1直線上にある。この直線を△ABCに関する点PのSimson線という。

⑵　点Pが内心のとき，　($s=\dfrac{a+b+c}{2}$)

$\triangle\mathrm{LMN}=\triangle\mathrm{IMN}+\triangle\mathrm{INL}+\triangle\mathrm{ILM}=\dfrac{1}{2}r^2\{\sin(180°-A)+\sin(180°-B)+\sin(180°-C)\}$

$$=\frac{1}{2}r^2\left(\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}\right)=\frac{r\cdot rs}{2R}=\frac{r}{2R}\cdot S$$

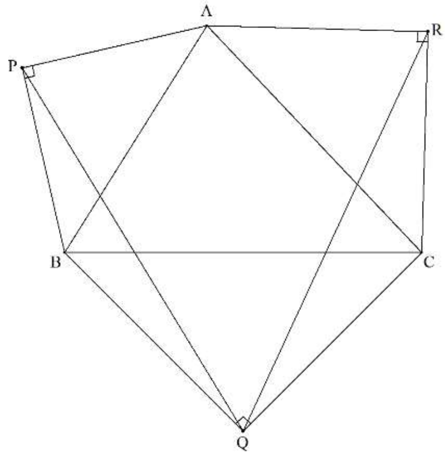
③より，$\dfrac{r}{2R}\cdot S=\dfrac{R^2-d^2}{4R^2}\cdot S$　　$d^2=R^2-2Rr$　　$\therefore IO^2=R^2-2Rr$　(オイラー•チャップルの定理)

【12.の参考文献】数学ひとり旅　数学＝不思議発見　石谷茂著　現代数学社　1998年10月31日1刷発行

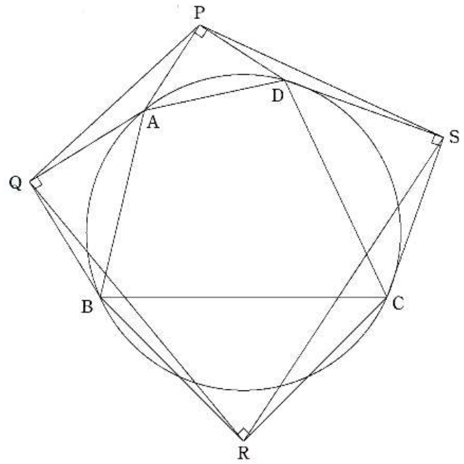
(2019/10/9　時岡)

（追加）三角形，四角形のある面積に関する性質

１．△ABC の外側に各辺を底辺とする直角二等辺三角形
PBA，QCB，RAC をつくる。
四角形 APQR－△ ABC の値は定数となる。



２．円に内接する四角形 ABCD の外側に各辺を底辺とする
直角二等辺三角形 PAD，QBA，RCB，SDC をつくる。
四角形 PQRS－四角形 ABCD の値は定数となる。



（2019/11/16　時岡）