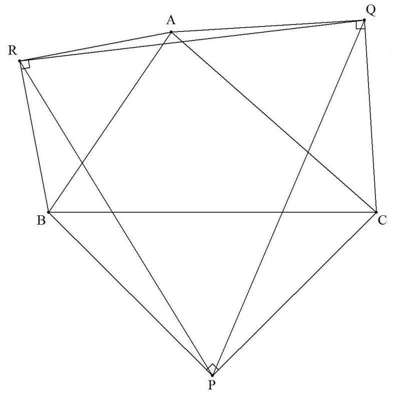
第112回数学教育実践研究会資料（2020/1/25　於ニッセイMKビル）

立命館慶祥中学校･高等学校　時岡郁夫

三角形，四角形のある面積に関する性質について

1

△ABCの外側に各辺を底辺とする直角二等辺三角形PCB，QAC，RBA
をつくる。
四角形ARPQ－△ABCの値は定数となる。

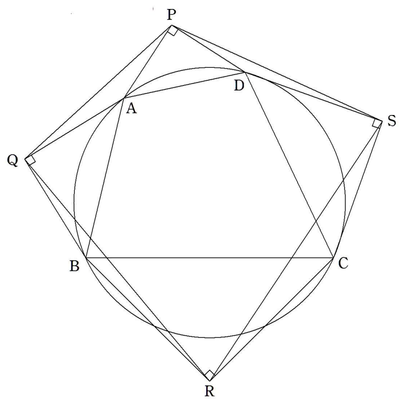


方針　BC＝a，CA＝b，AB＝cとおき，

四角形ARPQ－△ABC＝$\dfrac{b^2+c^2}{4}$ を示す。

2

円に内接する四角形ABCDの外側に各辺を底辺とする直角二等辺三角形
PAD，QBA，RCB，SDCをつくる。
四角形PQRS－四角形ABCDの値は定数となる。



方針　AB＝a，BC＝b，CD＝c，DA＝dとおき，

四角形PQRS－四角形ABCD＝$\dfrac{(ac+bd)\{(ab+cd)^2+(ad+bc)^2\}}{4(ab+cd)(ad+bc)}$ を示す。

補助定理

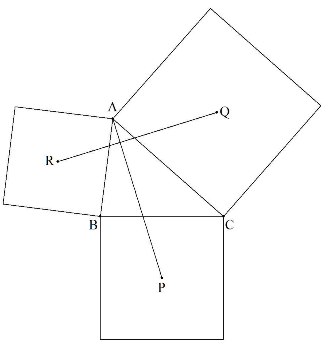
（1）

△ABCの各辺を1辺とする正方形を三角形の外側につくり，それぞれの正方形の中心を図のようにP，Q，Rとする。
このとき，AP=QR，AP⊥QRである。

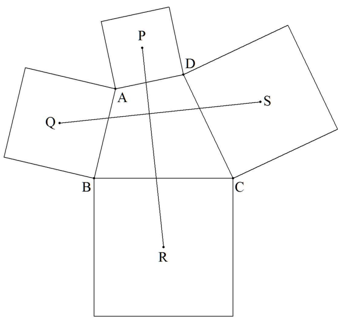
（2）

四角形ABCDの各辺を1辺とする正方形を四角形の外側につくり，それぞれの正方形の中心を図のように
P，Q，R，Sとする。このとき，PR＝QS，PR⊥QSである。

（1）



（2）



証明

（1）

ABを1辺にもつ正方形をAHIBとする。

△ARQと△AHCにおいて，△RAHは直角二等辺三角形より，

AR : AH＝$1:\sqrt{2}$　同様に，AQ : AC＝$1:\sqrt{2}$

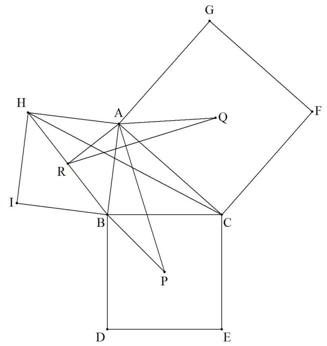
∠RAQ＝45°＋∠A＋45°＝90°＋∠A＝∠HAC

よって，2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから，

△ARQ∽△AHC（相似比$1:\sqrt{2}$）である。

HC＝$\sqrt{2}$ QR　…①

また，∠RAH＝45°であるから，QRとHCのなす角は45°　…②



同様に，△BPA∽△BCH（相似比$1:\sqrt{2}$）であるから，HC＝$\sqrt{2}$ AP　…③

また，∠PBC＝45°であるから，APとHCのなす角は45°　…④

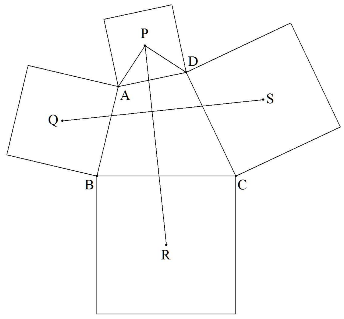
よって，①，③より，**AP＝QR**

APとQRは平行でなく，②，④より，APとQRのなす角は，45°＋45°＝90°　**∴AP⊥QR**　終

（2）

複素平面上で点A，B，…，Sを複素数 a，b，…，s で表す。

点Pは点Aを中心にADを$\frac{1}{\sqrt{2}}$倍した点を，点Aを中心に$\frac{\pi}{4}$だけ回転させた点であるから，



$$p=a+(d-a)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=a+(d-a)\cdot\frac{1+i}{2}=\frac{1-i}{2}a+\frac{1+i}{2}d$$

$$=\frac{1-i}{2}(a+id)$$

点Q，R，Sについても同様に，$q=\frac{1-i}{2}(b+ia)$，$r=\frac{1-i}{2}(c+ib)$，$s=\frac{1-i}{2}(d+ic)$

$$r-p=\frac{1-i}{2}(c+ib)-\frac{1-i}{2}(a+id)=\frac{1-i}{2}(c+ib-a-id)$$

$$s-q=\frac{1-i}{2}(d+ic)-\frac{1-i}{2}(b+ia)=\frac{1-i}{2}(d+ic-b-ia)=\frac{1-i}{2}\cdot i(c+ib-a-id)=i(r-p)$$

$$\therefore r-p=-i(s-q)$$

これは，PR＝QS，PR⊥QSを示している。　終

補足

（1）は，四角形の場合と同様に，複素数を用いて証明できる。（省略）

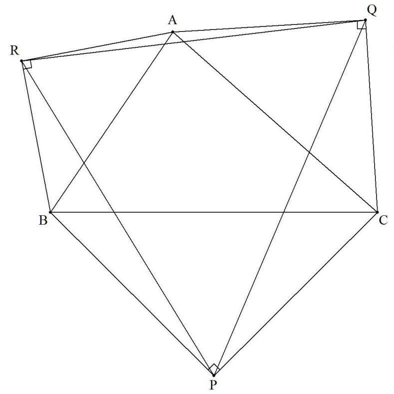
（1）は，（2）の場合で，D→Aとすると，P→Aとなるから，AR＝QS，AR⊥QSとなる。

三角形の場合の記号に対応させると，AP＝QR，AP⊥QRとなる。

(2019/1/11　時岡)

$\boxed{1}$

△ABC の外側に各辺を底辺とする直角二等辺三角形
PCB，QAC，RBA をつくる。
四角形 ARPQ－△ABC の値は定数となる。



$\boxed{\text{証明}}$　補助定理（1）より，AP＝QR，AP⊥QRであるから，余弦定理により

$$\text{四角形ARPQ}=\frac{1}{2}\text{QR}^2=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2-2\cdot\frac{b}{\sqrt{2}}\cdot\frac{c}{\sqrt{2}}\cos(A+90^\circ)\right\}=\frac{b^2+c^2}{4}+\frac{1}{2}bc\sin A$$

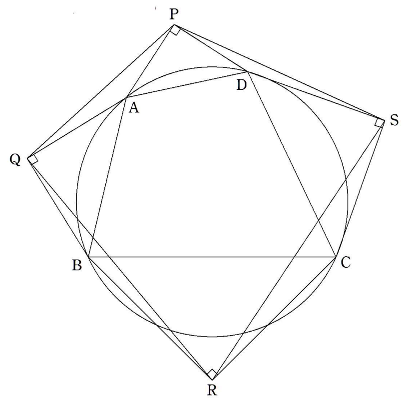
$$=\frac{b^2+c^2}{4}+\triangle\text{ABC}$$

よって，$\text{四角形ARPQ}-\triangle\text{ABC}=\dfrac{b^2+c^2}{4}$ （定数）である。 $\boxed{\text{終}}$

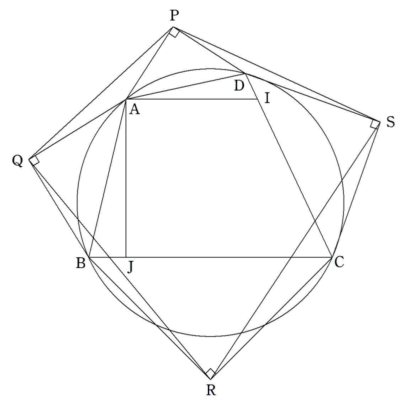
（2019/11/21　時岡）

$\boxed{2}$

円に内接する四角形 ABCD の外側に各辺を底辺とする直角二等辺三角形
PAD，QBA，RCB，SDC をつくる。
四角形 PQRS －四角形ABCDの値は定数となる。



$\boxed{\text{証明}}$　AB＝a，BC＝b，CD＝c，DA＝d，四角形 ABCD＝S とおき，
CD 上に点 I を AI // BC となるようにとり，A から BC に下した垂線の足を
J とする。



$\text{AP}=\text{AD}\cos 45^\circ=\dfrac{d}{\sqrt{2}}$

∠IAP＝∠IAD＋45°＝{A－(∠BAJ＋90°)}＋45°＝[A－{(90°－B)＋90°}] ＋45°
＝A＋B－135°

補助定理（2）より，PR⊥QS，PR＝QSであるから，四角形 PQRS＝$\dfrac{1}{2}\text{PR}^2$

$$\overrightarrow{\text{RP}}=\overrightarrow{\text{RB}}+\overrightarrow{\text{BA}}+\overrightarrow{\text{AP}}$$

$$=\left(-\frac{b}{2},\ \frac{b}{2}\right)+(a\cos B,\ a\sin B)+\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\cos(A+B-135^\circ),\ \frac{d}{\sqrt{2}}\sin(A+B-135^\circ)\right)=(x_0,\ y_0)$$ とおく。

ここで,

$\cos(A+B-135^\circ)=\cos(A+B)\cos135^\circ+\sin(A+B)\sin135^\circ$

$=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos A\cos B-\sin A\sin B)+\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin A\cos B+\cos A\sin B)$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\cos A\cos B+\sin A\sin B+\sin A\cos B+\cos A\sin B)$

$\sin(A+B-135^\circ)=\sin(A+B)\cos135^\circ-\cos(A+B)\sin135^\circ$

$=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin A\cos B+\cos A\sin B)-\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos A\cos B-\sin A\sin B)$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\cos A\cos B+\sin A\sin B-\sin A\cos B-\cos A\sin B)$

ここで, $\cos A=c_1$, $\sin A=s_1$, $\cos B=c_2$, $\sin B=s_2$ とおくと,

$x_0=-\dfrac{b}{2}+a\cos B+\dfrac{d}{2}(-\cos A\cos B+\sin A\sin B+\sin A\cos B+\cos A\sin B)$

$=-\dfrac{b}{2}+ac_2+\dfrac{d}{2}(-c_1c_2+s_1s_2+s_1c_2+c_1s_2)$

$y_0=\dfrac{b}{2}+a\sin B+\dfrac{d}{2}(-\cos A\cos B+\sin A\sin B-\sin A\cos B-\cos A\sin B)$

$=\dfrac{b}{2}+as_2+\dfrac{d}{2}(-c_1c_2+s_1s_2-s_1c_2-c_1s_2)$

四角形 PQRS$=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{RP}}|^2=\dfrac{1}{2}({x_0}^2+{y_0}^2)$

$=\left\{-\dfrac{b}{2}+ac_2+\dfrac{d}{2}(-c_1c_2+s_1s_2+s_1c_2+c_1s_2)\right\}^2+\left\{\dfrac{b}{2}+as_2+\dfrac{d}{2}(-c_1c_2+s_1s_2-s_1c_2-c_1s_2)\right\}^2$

展開して,変形すると

四角形 PQRS$=\dfrac{1}{4}\left[b^2-2b(-as_2+ac_2+ds_1c_2+dc_1s_2)+\{2a^2+2ad(s_1-c_1)+d^2({s_1}^2+{c_1}^2)\}({s_2}^2+{c_2}^2)\right]$

ここで, ${s_1}^2+{c_1}^2={s_2}^2+{c_2}^2=1$ であるから

四角形 PQRS$=\dfrac{1}{4}\left[b^2-2b(-as_2+ac_2+ds_1c_2+dc_1s_2)+\{2a^2+2ad(s_1-c_1)+d^2\cdot1\}\cdot1\right]$

$=\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{1}{4}b^2+\dfrac{1}{4}d^2+\dfrac{1}{2}ab(s_2-c_2)+\dfrac{1}{2}ad(s_1-c_1)-\dfrac{1}{2}bd(s_1c_2+c_1s_2)$

最後に,四角形 ABCD$=S$ おくと, $c_1=\cos A=\dfrac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}$, $s_1=\sin A=\dfrac{2S}{ad+bc}$,

$c_2=\cos B=\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$, $s_2=\sin B=\dfrac{2S}{ab+cd}$ であるから,代入して整理すると

四角形 PQRS$=\dfrac{(ac+bd)\{(ab+cd)^2+(ad+bc)^2\}}{4(ab+cd)(ad+bc)}+S$

よって, 四角形 PQRS $-$ 四角形ABCD$=\dfrac{(ac+bd)\{(ab+cd)^2+(ad+bc)^2\}}{4(ab+cd)(ad+bc)}$ (定数) 終

補足 $d=0$ とすると, $\boxed{1}$ の結果が得られる。

(2019/11/16 時岡)