第112回数学教育実践研究会資料（2020/1/25　於ニッセイMKビル）
立命館慶祥中学校･高等学校　時岡郁夫

円に外接する三角形の頂点を通る放物線について

１．はじめに

Mathematics Mizuryu（http://ryugen3.sakura.ne.jp/index.html）というサイトの「連続応募問題：11/24」に次の問題が掲載されていたので応募した。

第380回数学的な応募問題

＜解答募集期間：11月24日～12月22日＞

［シンメトリー］

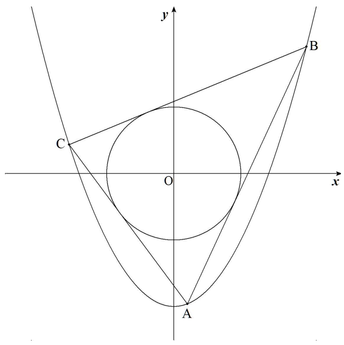
問題１　原点を中心とする半径１の円をＳとする。放物線ｙ＝ｘ２－２上に相異なる３点Ａ，Ｂ，Ｃがあって，直線ＡＢ，直線ＡＣがＳに接しているとき、直線ＢＣもまたＳに接することを証明せよ。

問題２　正三角形ＡＢＣの内部の点Ｐについて、ＰＡ＝８、ＰＢ＝５，ＰＣ＝７とする。このとき正三角形の一辺の長さを求めよ。

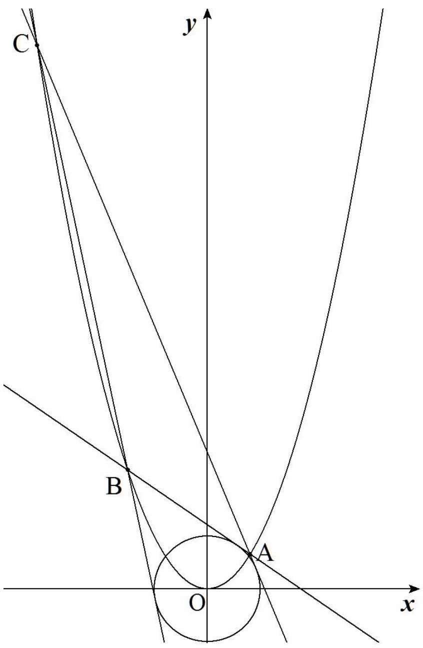
特に，問題１に興味をもったので，次の問題を考えてみた。また，問題２を解いて気が付いたことは後述する。

２．問題1−1

放物線 $y=px^2+q$ $(p\neq 0)$ 上に異なる３点 A，B，C があり，直線 AB，BC，CA が 原点を中心とする半径１の円 に接するとき， p，q の条件を求めよ。

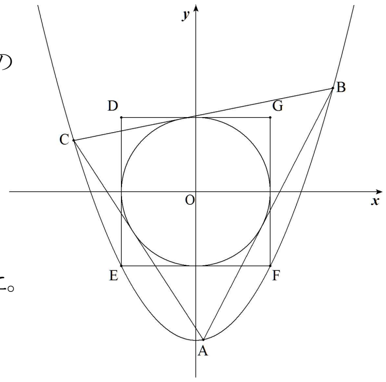


解説　答は， $p+q=\pm 1$ である。
問題１は， $p=1$，$q=-2$ の場合であった。
$p=1$ のときは，他に $q=0$ の場合も考えられる。
右図がその場合である。
さらに，半径が r の場合を考えてみた。



３．問題1−2

放物線 $y=px^2+q$ $(p\neq 0)$ 上に異なる３点Ａ，Ｂ，Ｃがあり，直線AB，BC，CAが原点を中心とする半径 r の円に接するとき，p，q の条件を求めよ。



解説　答は，$pr^2+q=\pm r$ である。

この答をよく見てみると，左辺は，放物線の方程式に，$x=r$，$-r$ を代入したものになっている。

D$(-r,\ r)$，E$(-r,\ -r)$，F$(r,\ -r)$，G$(r,\ r)$ とおくと，条件 $pr^2+q=r$ は，点D，Gを通ることを示し，条件 $pr^2+q=-r$ は，点E，Fを通ることを示している。

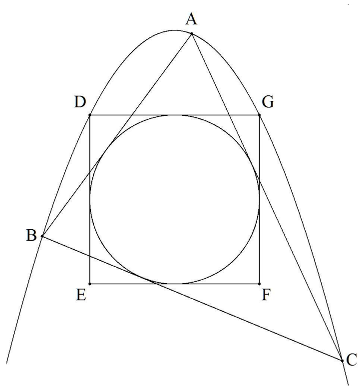
つまり，円に外接する正方形の２つの頂点を通ることを示していることが分かった。

従って，最終的に次の問題を作ることができる。

４．問題1−4

定円に外接する△ABCと正方形DEFGがある。

このとき，３点Ａ，Ｂ，Ｃと正方形の２つの頂点を通る放物線が存在することを証明せよ。



証明　座標平面で考える。

定円を原点中心，半径 r の円とし，正方形の頂点をD$(-r,\ r)$，E$(-r,\ -r)$，F$(r,\ -r)$，G$(r,\ r)$ とする。

また，放物線を $y=px^2+q$ とおいても一般性は失わない。

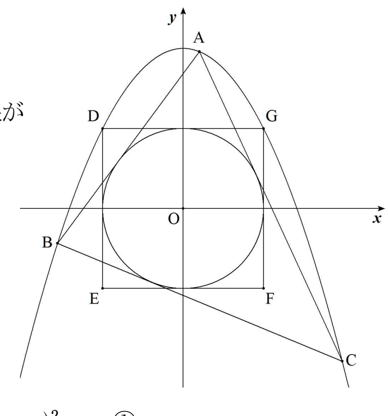
[1]　$p<0$ のとき

上に凸である放物線 $y=px^2+q$ 上の異なる３点を，

A$(a,\ pa^2+q)$，B$(b,\ pb^2+q)$，C$(c,\ pc^2+q)$ とおく。（a，b，c は異なる。）

点Ａの x 座標に着目すると，x 座標が r または $-r$ のときは，y 軸に平行な接線ができるから，題意に適さない。

従って，$a\neq\pm r$ である。（b，c についても同様）



直線ABの方程式は，$y-(pa^2+q)=\dfrac{(pb^2+q)-(pa^2+q)}{b-a}(x-a)$

$y-(pa^2+q)=p(b+a)(x-a)$　∴ $p(a+b)x-y-abp+q=0$

これは原点中心，半径 r の円に接するから，原点と直線ABの距離は r である。

$r=\dfrac{|-abp+q|}{\sqrt{\{p(a+b)\}^2+(-1)^2}}$　　∴ $p^2r^2(a+b)^2+r^2=(abp-q)^2$　…①

直線AC，BCも原点との距離は r あるから，同様に，$p^2r^2(a+c)^2+r^2=(acp-q)^2$　…②

$p^2r^2(b+c)^2+r^2=(bcp-q)^2$　…③　が成り立つ。

①−②より　$p^2r^2(b-c)\{2a+(b+c)\}=ap(b-c)\{a(b+c)p-2q\}$　∴ $b+c=-\dfrac{2a(pr^2+q)}{(r^2-a^2)p}$　…④

次に，①+②より　$p^2r^2\{2a^2+2a(b+c)+b^2+c^2\}+2r^2=a^2p^2(b^2+c^2)-2apq(b+c)+2q^2$

$p^2(r^2-a^2)(b^2+c^2)+2ap(pr^2+q)(b+c)+2a^2p^2r^2+2r^2-2q^2=0$

$p^2(r^2-a^2)\{(b+c)^2-2bc\}+2ap(pr^2+q)(b+c)+2a^2p^2r^2+2r^2-2q^2=0$

$2p^2(r^2-a^2)bc=p^2(r^2-a^2)(b+c)^2+2ap(pr^2+q)(b+c)+2a^2p^2r^2+2r^2-2q^2$

$$2p^2(r^2-a^2)bc=p^2(r^2-a^2)\left\{-\frac{2a(pr^2+q)}{(r^2-a^2)p}\right\}^2+2ap(pr^2+q)\left\{-\frac{2a(pr^2+q)}{(r^2-a^2)p}\right\}+2a^2p^2r^2+2r^2-2q^2$$

$2p^2(r^2-a^2)bc=2a^2p^2r^2+2r^2-2q^2$　$\therefore bc=\dfrac{a^2p^2r^2+r^2-q^2}{(r^2-a^2)p^2}$　…⑤

④，⑤を③に代入すると，$p^2r^2\left\{-\dfrac{2a(pr^2+q)}{(r^2-a^2)p}\right\}^2+r^2=\left\{\dfrac{a^2p^2r^2+r^2-q^2}{(r^2-a^2)p^2}\cdot p-q\right\}^2$

両辺に$(r^2-a^2)^2p^2$を掛け，移項すると，

$4p^2r^2(pr^2+q)^2a^2+p^2r^2(r^2-a^2)^2-\{p(pr^2+q)a^2+r^2-q^2-pqr^2\}^2=0$　…⑥

左辺を a についての多項式とみて

(a^4 の係数) $=p^2r^2-p^2(pr^2+q)^2$

$=-p^2\{(pr^2+q)^2-r^2\}$

(a^2 の係数) $=4p^2r^2(pr^2+q)^2-2p^2r^4-2p(pr^2+q)(r^2-q^2-pqr^2)$

$=4p^2r^2(pr^2+q)^2-2p^2r^4-2p(pr^2+q)\{r^2-q(pr^2+q)\}$

$=4p^2r^2(pr^2+q)^2-2p^2r^4-2pr^2(pr^2+q)+2pq(pr^2+q)^2$

$=2p(2pr^2+q)(pr^2+q)-2pr^2(pr^2+q)-2p^2r^4$

$=2p\{(2pr^2+q)(pr^2+q)^2-r^2(pr^2+q)-pr^4\}$

$=2p\{(2pr^2+q)(pr^2+q)^2-r^2(2pr^2+q)\}$

$=2p(2pr^2+q)\{(pr^2+q)^2-r^2\}$

(定数項) $=p^2r^6-(r^2-q^2-pqr^2)^2$

$=(pr^3+r^2-q^2-pqr^2)(pr^3-r^2+q^2+pqr^2)$

$=\{pr^2(r-q)+(r-q)(r+q)\}\{pr^2(r+q)-(r-q)(r+q)\}$

$=(r-q)(pr^2+r+q)(r+q)(pr^2-r+q)$

$=(r^2-q^2)\{(pr^2+q)^2-r^2\}$

⑥の左辺について，共通因数でくくると，

$\{(pr^2+q)^2-r^2\}\{-p^2a^4+2p(2pr^2+q)a^2+r^2-q^2\}=0$

この等式が，a の値に対して，恒等式となるためには，$(pr^2+q)^2-r^2=0$ であればよい。

$\therefore pr^2+r+q=0$　…⑦，$pr^2-r+q=0$　…⑧

⑦は放物線が，点E$(-r,\ -r)$，F$(r,\ -r)$を通ることを示し，⑧は放物線が点D$(-r,\ r)$，G$(r,\ r)$を通ることを示している。

[2]　$p>0$ のときも同様である。

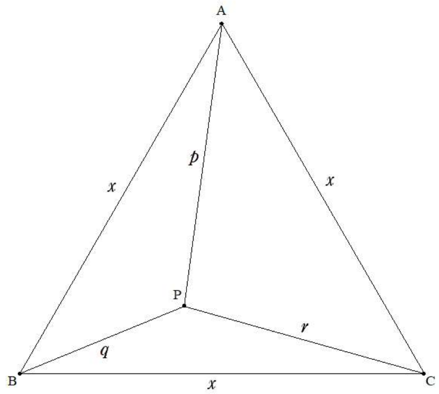
よって，3点A，B，Cを通る放物線は正方形の2つの頂点を通ることが証明されたことになる。　終

(2019/12/2　時岡)

5．　第 380 回の問題 2 を解いて気が付いたこと

問題 2

正三角形 ABC の内部の点 P について，PA＝8，PB＝5，PC＝7 とする。このとき，正三角形の一辺の長さを求めよ。



解答　BC＝CA＝AB＝x，PA＝p，PB＝q，PC＝r，
$\angle$BPC＝α，$\angle$CPA＝β，$\angle$APB＝γ とおく。

$\alpha+\beta+\gamma=2\pi$ より，$\cos(\alpha+\beta)=\cos\gamma$

$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos\gamma$

$(\cos\alpha\cos\beta-\cos\gamma)^2=\sin^2\alpha\sin^2\beta$

$\cos^2\alpha\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos^2\gamma=(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)$

$\therefore \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1=0$　…①

△PBC，△PCA，△PAB に余弦定理を適用して

$\cos\alpha=\dfrac{q^2+r^2-x^2}{2qr}$，$\cos\beta=\dfrac{r^2+p^2-x^2}{2rp}$，$\cos\gamma=\dfrac{p^2+q^2-x^2}{2pq}$

これらを①に代入すると

$$\left(\frac{q^2+r^2-x^2}{2qr}\right)^2+\left(\frac{r^2+p^2-x^2}{2rp}\right)^2+\left(\frac{p^2+q^2-x^2}{2pq}\right)^2-2\cdot\frac{q^2+r^2-x^2}{2qr}\cdot\frac{r^2+p^2-x^2}{2rp}\cdot\frac{p^2+q^2-x^2}{2pq}-1=0$$

両辺に $2^2p^2q^2r^2$ を掛けると，

$$p^2(q^2+r^2-x^2)+q^2(r^2+p^2-x^2)+r^2(p^2+q^2-x^2)-(q^2+r^2-x^2)(r^2+p^2-x^2)(p^2+q^2-x^2)-4p^2q^2r^2=0$$

展開して整理すると，$x^2\{x^4-(p^2+q^2+r^2)x^2+p^4+q^4+r^4-q^2r^2-r^2p^2-p^2q^2\}=0$

$x\fallingdotseq 0$ であるから，$x^2=\dfrac{p^2+q^2+r^2\pm\sqrt{3(2q^2r^2+2r^2p^2+2p^2q^2-p^4-q^4-r^4)}}{2}$

ここで，$p,\ q,\ r$ を 3 辺にもつ三角形の面積を S'，$s=\dfrac{p+q+r}{2}$ とおくと，

ヘロンの公式により，$S'=\sqrt{s(s-p)(s-q)(s-r)}=\dfrac{1}{4}\sqrt{(p+q+r)(-p+q+r)(p-q+r)(p+q-r)}$

根号内を展開して，$(4S')^2=2q^2r^2+2r^2p^2+2p^2q^2-p^4-q^4-r^4$ となるから，

$x^2=\dfrac{p^2+q^2+r^2\pm4\sqrt{3}S'}{2}$　題意に適するのは，$x^2=\dfrac{p^2+q^2+r^2+4\sqrt{3}S'}{2}$　…②

$x>0$ より，$x=\sqrt{\dfrac{p^2+q^2+r^2}{2}+2\sqrt{3}S'}$　(公式)

さて，問題は，$p=8,\ q=5,\ r=7$ のときである。

$s=\dfrac{p+q+r}{2}=10$，$S'=\sqrt{10\cdot2\cdot5\cdot3}=10\sqrt{3}$ より，$x=\sqrt{\dfrac{8^2+5^2+7^2}{2}+2\sqrt{3}\cdot10\sqrt{3}}=\sqrt{129}$　答

(2019/11/28　時岡)

６．気が付いたこと。

あらたに，△LMN を，MN＝PA＝ p，NL＝PB＝ q，LM＝PC＝ r としてつくる。△LMN＝ S'

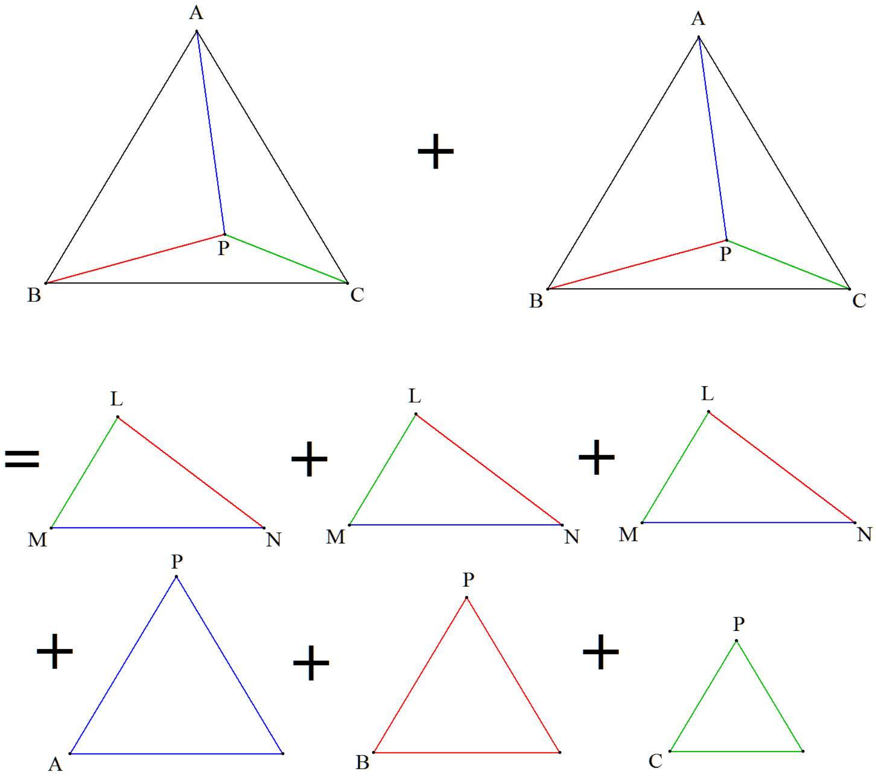
また，AB を１辺とする正三角形の面積を $S(AB)$ で表す。

$x^2=\dfrac{p^2+q^2+r^2+4\sqrt{3}\,S'}{2}$　…②の両辺に $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ を掛けると，

$S(AB)=\dfrac{S(PA)+S(PB)+S(PC)}{2}+\dfrac{3}{2}S'$

両辺に２を掛けると，$2S(AB)=3\triangle LMN+S(PA)+S(PB)+S(PC)$　…③

これを図で示すと，



この等式の初等幾何による証明を考えてみた。

証明　△PBC を B を中心に 60° 回転させ，△QBA をつくる。

同様に，△PCA を C を中心に 60° 回転させ，△RCB をつくり，

△PAB を A を中心に 60° 回転させ，△SAC をつくる。

六角形 AQBRCS は△ABC 2個分の面積となる。

六角形 AQBRCS＝ $2S(AB)$　…③

また，△PBQ について，PB＝QB，∠PBCQ＝60° であるから

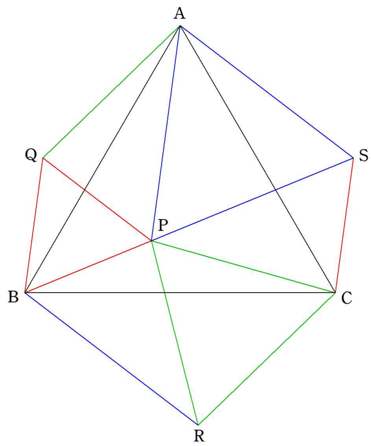
△PBQ は正三角形となる。同様に，△PCR，△PAS も正三角形となる。

また，PA，PB，PC を３辺にもつ三角形の面積を△DEF とおくと，

△QPA≡△PBR≡△CSP＝△DEF であるから，

六角形 AQBRCS＝ $S(PA)+S(PB)+S(PC)+3\triangle DEF$　…④

③，④より，$2S(AB)=S(PA)+S(PB)+S(PC)+3\triangle DEF$　終



(2019/12/11　時岡)