第112回数学教育実践研究会資料（2020/1/25　於ニッセイMKビル）
立命館慶祥中学校•高等学校　時岡郁夫

3次関数の接線と三角形の面積について

1．はじめに

次の問題は，2009年度，大阪大の入試問題である。

> 曲線C：$y=x^3-kx$（kは実数）を考える。C上に点A$(a,\ a^3-ka)$（$a\neq 0$）をとる。
> 次の問いに答えよ。
> (1)　点AにおけるCの接線をℓ_1とする。ℓ_1とCのA以外の交点をBとする。
> Bのx座標を求めよ。
> (2)　(1)で求めた点BにおけるCの接線をℓ_2とする。ℓ_1とℓ_2が直交するとき，aとkが満たす条件を求めよ。
> (3)　(2)において，ℓ_1とℓ_2が直交するaが存在するようなkの値の範囲を求めよ。

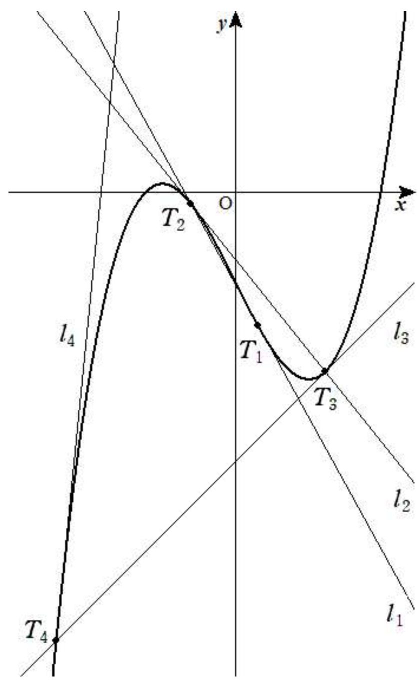
2．この問題を参考に，次の問題を作問した。

3次曲線$y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ …①と点$T_1\ (t,\ f(t))$について，
①上のT_1における接線をl_1，l_1と①のT_1以外の交点T_2における接線をl_2，
l_2と①のT_2以外の交点T_3における接線をl_3，このように，T_4，l_4，…を
定義していく。次の値を求めよ。

(1)　$\triangle T_nT_{n+1}T_{n+2}=S_n$とおくとき，$\dfrac{S_{n+1}}{S_n}$の値

(2)　接線l_n，l_{n+1}，l_{n+2}で囲まれる三角形の面積をL_nとおくとき，

$\dfrac{L_{n+1}}{L_n}$の値



結論は，どちらも16であった。
以下，計算例である。

(1)　$y'=3ax^2+2bx+c$

T_1における接線は，$y-(at^3+bt^2+ct+d)=(3at^2+2bt+c)(x-t)$

$\therefore y=(3at^2+2bt+c)x-2at^3-bt^2+d$　$\cdots l_1$

$ax^3+bx^2+cx+d=(3at^2+2bt+c)x-2at^3-bt^2+d$とおくと，$(x-t)^2(ax+2at+b)=0$

T_2のx座標は，$x=-2t-\dfrac{b}{a}$

点T_nのx座標をx_nとおくと，x_nは漸化式$x_{n+1}=-2x_n-\dfrac{b}{a}$を満たす。$x_1=t$であるから，

$\therefore x_n=(-2)^{n-1}\left(t+\dfrac{b}{3a}\right)-\dfrac{b}{3a}$

次に，3点P$(p,\ f(p))$，Q$(q,\ f(q))$，R$(r,\ f(r))$を頂点にもつ△PQRの面積を計算する。

$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}|(p-r)\{f(q)-f(r)\}-(q-r)\{f(p)-f(r)\}|$

ここで,

$f(q)-f(r)=(aq^3+bq^2+cq+d)-(ar^3+br^2+cr+d)=(q-r)\{a(q^2+qr+r^2)+b(q+r)+c\}$ であるから,

$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}|(p-r)(q-r)\{a(q^2+qr+r^2)+b(q+r)+c\}-(q-r)(p-r)\{a(p^2+pr+r^2)+b(p+r)+c\}|$

$=\dfrac{1}{2}|(p-r)(q-r)\{a(q^2-p^2)+ar(q-p)+b(q-p)\}|=\dfrac{1}{2}|(p-q)(q-r)(r-p)\{a(p+q+r)+b\}|$

$p=x_n$, $q=x_{n+1}$, $r=x_{n+2}$ とおくと,

$p-q=\left\{(-2)^{n-1}\left(t+\dfrac{b}{3a}\right)-\dfrac{b}{3a}\right\}-\left\{(-2)^{n}\left(t+\dfrac{b}{3a}\right)-\dfrac{b}{3a}\right\}=3(-2)^{n-1}\left(t+\dfrac{b}{3a}\right)$

$q-r=\left\{(-2)^{n}\left(t+\dfrac{b}{3a}\right)-\dfrac{b}{3a}\right\}-\left\{(-2)^{n+1}\left(t+\dfrac{b}{3a}\right)-\dfrac{b}{3a}\right\}=3(-2)^{n}\left(t+\dfrac{b}{3a}\right)$

$r-p=\left\{(-2)^{n+1}\left(t+\dfrac{b}{3a}\right)-\dfrac{b}{3a}\right\}-\left\{(-2)^{n-1}\left(t+\dfrac{b}{3a}\right)-\dfrac{b}{3a}\right\}=3(-2)^{n-1}\left(t+\dfrac{b}{3a}\right)$

$p+q+r=\left\{(-2)^{n-1}\left(t+\dfrac{b}{3a}\right)-\dfrac{b}{3a}\right\}+\left\{(-2)^{n}\left(t+\dfrac{b}{3a}\right)-\dfrac{b}{3a}\right\}+\left\{(-2)^{n+1}\left(t+\dfrac{b}{3a}\right)-\dfrac{b}{3a}\right\}$

$=3(-2)^{n-1}\left(t+\dfrac{b}{3a}\right)-\dfrac{b}{a}$ であるから, $a(p+q+r)+b=3a(-2)^{n-1}\left(t+\dfrac{b}{3a}\right)$

よって,

$S_n=\triangle T_nT_{n+1}T_{n+2}=\dfrac{1}{2}\left|3(-2)^{n-1}\left(t+\dfrac{b}{3a}\right)\cdot 3(-2)^{n}\left(t+\dfrac{b}{3a}\right)\cdot 3(-2)^{n-1}\left(t+\dfrac{b}{3a}\right)\cdot 3a(-2)^{n-1}\left(t+\dfrac{b}{3a}\right)\right|$

$=|a|\left\{3\cdot 2^{n-1}\left(t+\dfrac{b}{3a}\right)\right\}^4=81\cdot 2^{4n-4}|a|\left(t+\dfrac{b}{3a}\right)^4$ であるから, $\dfrac{S_{n+1}}{S_n}=2^4=16$ 答

(2) l_1 : $y=(3at^2+2bt+c)x-2at^3-bt^2+d$ であるから, $x_n=(-2)^{n-1}\left(t+\dfrac{b}{3a}\right)-\dfrac{b}{3a}$ として,

l_n : $y=(3a{x_n}^2+2bx_n+c)x-2a{x_n}^3-b{x_n}^2+d$

l_{n+1} : $y=(3a{x_{n+1}}^2+2bx_{n+1}+c)x-2a{x_{n+1}}^3-b{x_{n+1}}^2+d$

l_{n+2} : $y=(3a{x_{n+2}}^2+2bx_{n+2}+c)x-2a{x_{n+2}}^3-b{x_{n+2}}^2+d$

である。

ここで, $A_n=3a{x_n}^2+2bx_n+c$, $C_n=-2a{x_n}^3-b{x_n}^2+d$ とおくと,

l_n : $A_nx-y+C_n=0$, l_{n+1} : $A_{n+1}x-y+C_{n+1}=0$, l_{n+2} : $A_{n+2}x-y+C_{n+2}=0$ と表される。

この3直線で囲まれる三角形の面積 L_n は, $L_n=\dfrac{\{A_n(C_{n+1}-C_{n+2})+A_{n+1}(C_{n+2}-C_n)+A_{n+2}(C_n-C_{n+1})\}^2}{2|(A_{n+2}-A_{n+1})(A_n-A_{n+2})(A_{n+1}-A_n)|}$ (*)

$x_n=(-2)^{n-1}\left(t+\dfrac{b}{3a}\right)-\dfrac{b}{3a}=k-\dfrac{b}{3a}$ とおく。ただし, $k=(-2)^{n-1}\left(t+\dfrac{b}{3a}\right)$

$x_{n+1}=-2x_n-\dfrac{b}{a}=-2\left(k-\dfrac{b}{3a}\right)-\dfrac{b}{a}=-2k-\dfrac{b}{3a}$

$x_{n+2}=-2x_{n+1}-\dfrac{b}{a}=-2\left(-2k-\dfrac{b}{3a}\right)-\dfrac{b}{a}=4k-\dfrac{b}{3a}$ である。このとき,

$A_n=3a\left(k-\dfrac{b}{3a}\right)^2+2b\left(k-\dfrac{b}{3a}\right)+c=3ak^2-\dfrac{b^2}{3a}+c$

$A_{n+1}=3a\left(-2k-\dfrac{b}{3a}\right)^2+2b\left(-2k-\dfrac{b}{3a}\right)+c=12ak^2-\dfrac{b^2}{3a}+c$

$A_{n+2}=3a\left(4k-\dfrac{b}{3a}\right)^2+2b\left(4k-\dfrac{b}{3a}\right)+c=48ak^2-\dfrac{b^2}{3a}+c$

$$C_n=-2a\left(k-\frac{b}{3a}\right)^3-b\left(k-\frac{b}{3a}\right)^2+d=-2ak^3+bk^2-\frac{b^3}{27a^2}+d$$

$$C_{n+1}=-2a\left(-2k-\frac{b}{3a}\right)^3-b\left(-2k-\frac{b}{3a}\right)^2+d=16ak^3+4bk^2-\frac{b^3}{27a^2}+d$$

$$C_{n+2}=-2a\left(4k-\frac{b}{3a}\right)^3-b\left(4k-\frac{b}{3a}\right)^2+d=-128ak^3+16bk^2-\frac{b^3}{27a^2}+d$$ であるから，（$*$）に代入すると，

$$L_n=\frac{2^6\cdot 3^{10}a^4k^{10}}{2^3\cdot 3^6\cdot 5|a|^3k^6}=\frac{2^3\cdot 3^4}{5}|a|k^4=\frac{2^3\cdot 3^4}{5}|a|\left\{(-2)^{n-1}\left(t+\frac{b}{3a}\right)\right\}^4=\frac{81\cdot 2^{4n-1}}{5}|a|\left(t+\frac{b}{3a}\right)^4$$

$L_{n+1}=\dfrac{81\cdot 2^{4n+3}}{5}|a|\left(t+\dfrac{b}{3a}\right)^4$ より，$\dfrac{L_{n+1}}{L_n}=2^4=16$ 答

補足　（$*$）互いに平行でない3直線 $a_1x+b_1y+c_1=0$ ， $a_2x+b_2y+c_2=0$ ， $a_3x+b_3y+c_3=0$ によってつくられる三角形の面積 S は，

$$S=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2}{2\left|\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right|}=\frac{\{(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3\}^2}{2|(a_2b_3-a_3b_2)(a_3b_1-a_1b_3)(a_1b_2-a_2b_1)|}$$

※　証明は，時岡郁夫のHPのこだわり数学75（2015/1/14）にある。

(2019/10/27　時岡)