$\triangle$ABCと五心以外の点Pについて，$\overrightarrow{AP}$を計算する

時岡郁夫

1．はじめに

BC$=a$，CA$=b$，AB$=c$である$\triangle$ABCの重心，垂心，内心，外心，$\angle$A内の傍心をそれぞれG，H，I，O，I_1とし，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$，$\triangle$ABC$=S$とおく。このとき，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$とおくと，

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3},\ \overrightarrow{AH}=\frac{b^2+c^2-a^2}{(4S)^2}\left\{(a^2+b^2-c^2)\vec{b}+(c^2+a^2-b^2)\vec{c}\right\},\ \overrightarrow{AI}=\frac{b\vec{b}+c\vec{c}}{a+b+c},$$

$$\overrightarrow{AO}=\frac{b^2(c^2+a^2-b^2)\vec{b}+c^2(a^2+b^2-c^2)\vec{c}}{(4S)^2},\ \overrightarrow{AI_1}=\frac{b\vec{b}+c\vec{c}}{b+c-a}$$ となることが知られている。（参考文献[1]）

ただし，$(4S)^2=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$である。

今回は，次に示す公式を用いて，五心以外の点Pについて，$\overrightarrow{AP}$を計算する。

○　ジェルゴンヌ（*Gergonne*）点：三角形の内接円と辺の接点と頂点をつなぐ3直線の交点。

○　ナーゲル（*Nagel*）点：三角形の傍接円と辺の接点と頂点をつなぐ3直線の交点。

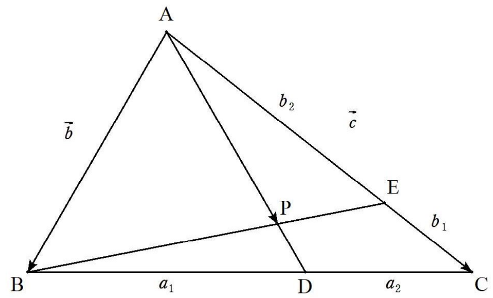
○　フェルマー（*Fermat*）点：3頂点からの距離の和が最小になる点。$\angle$BPC$=\angle$CPA$=\angle$APB（3つの内角はどれも120°未満とする。）

○　ブロカール（*Brocard*）点（第1：$\angle$PAB$=\angle$PBC$=\angle$PCAのとき，第2：$\angle$PAC$=\angle$PBA$=\angle$PCBのとき）

○　ルモワーヌ（*Lemoine*）点（類似重心）：三角形の角の二等分線に関して中線を折り返した3直線の交点。

○　キーペルト（*Kiepert*）点：$\triangle$ABCの外側に各辺を底辺とし，相似な二等辺三角形$\triangle$A′BC，$\triangle$B′CA，$\triangle$C′ABをつくるとき，AA′，BB′，CC′の交点。二等辺三角形を$\triangle$ABCの外側につくったときの低角をθ，内側につくったときのの低角を$-\theta$とし，$d=4S\cot\theta$とする。$\theta=60^\circ$のとき，フェルマー点となる。

2．公式



$\triangle$ABCと点Pについて，

APとBCの交点をD，BPとCAの交点をE，

BD：DC$=a_1:a_2$，CE：EA$=b_1:b_2$，

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$とおくと，

公式　$$\overrightarrow{AP}=\frac{b_2}{a_1b_1+(a_1+a_2)b_2}\left(a_2\vec{b}+a_1\vec{c}\right)$$

証明　$\overrightarrow{AD}=\dfrac{a_2\vec{b}+a_1\vec{c}}{a_1+a_2}$である。

メネラウスの定理により，$\dfrac{AP}{PD}\cdot\dfrac{a_1}{a_1+a_2}\cdot\dfrac{b_1}{b_2}=1$より，$\dfrac{AP}{PD}=\dfrac{(a_1+a_2)b_2}{a_1b_1}$

$$\therefore\ \overrightarrow{AP}=\frac{(a_1+a_2)b_2}{a_1b_1+(a_1+a_2)b_2}\overrightarrow{AD}=\frac{(a_1+a_2)b_2}{a_1b_1+(a_1+a_2)b_2}\cdot\frac{a_2\vec{b}+a_1\vec{c}}{a_1+a_2}=\frac{b_2}{a_1b_1+(a_1+a_2)b_2}\left(a_2\vec{b}+a_1\vec{c}\right)$$ **終**

3．点Pが五心以外の点のとき

⑴　点PがGergonne（ジェルゴンヌ）点のとき

三角形の内接円と辺の接点と頂点をつなぐ3直線の交点。

解答　$a_1=s-b$，$a_2=b_1=s-c$，$b_2=s-a$を公式に代入すると，

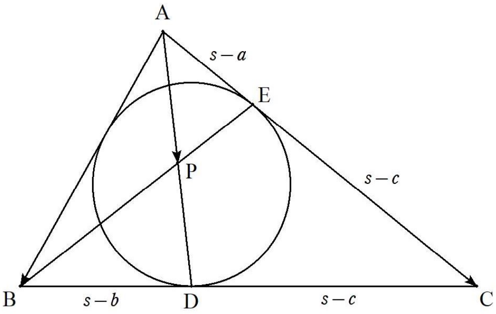
$$\overrightarrow{AP}=\frac{s-a}{(s-b)(s-c)+a(s-a)}\left\{(s-c)\vec{b}+(s-b)\vec{c}\right\}$$

ここで，

$$a(s-a)+(s-b)(s-c)=a\cdot\frac{a+b+c}{2}+\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}=\frac{2bc+2ca+2ab-a^2-b^2-c^2}{4}$$

$=\dfrac{4bc+4ca+4ab-(a+b+c)^2}{4}=bc+ca+ab-s^2$ であるから，

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{s-a}{bc+ca+ab-s^2}\left\{(s-c)\vec{b}+(s-b)\vec{c}\right\}$　答



⑵　点 P が Nagel（ナーゲル）点のとき

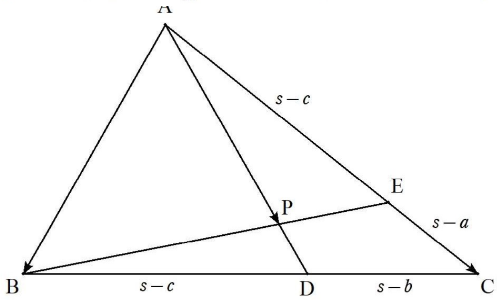
三角形の傍接円と辺の接点と頂点をつなぐ 3 直線の交点。

解答　$a_1=b_2=s-c$，$a_2=s-b$，$b_1=s-a$

を公式に代入すると，

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{s-c}{(s-c)(s-a)+a(s-c)}\left\{(s-b)\vec{b}+(s-c)\vec{c}\right\}$

$=\dfrac{(s-b)\vec{b}+(s-c)\vec{c}}{s}$　答



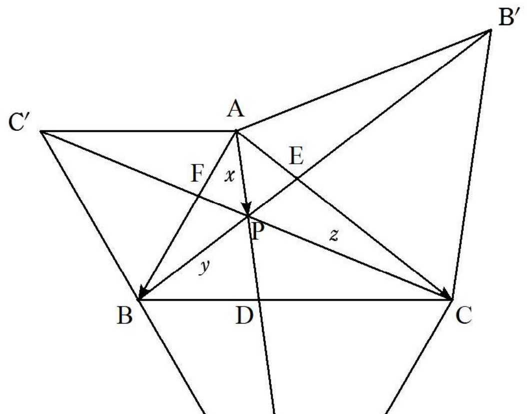
⑶　点 P が Fermat（フェルマー）点のとき

3 頂点からの距離の和が最小になる点。∠BPC＝∠CPA＝∠APB（3 つの内角はどれも 120° 未満とする。）

解答

△ABC の外側に正三角形 A′CB，B′AC，C′BA をつくる。このとき，AA′，BB′，CC′は 1 点 P で交わり，∠BPC＝∠CPA＝∠APB＝120° となる。（証明略）

AP＝x，BP＝y，CP＝z（$x>0$，$y>0$，$z>0$）とおく。



△PBC＋△PCA＋△PAB＝△ABC より，

$\dfrac{1}{2}(yz+zx+xy)\sin 120^\circ=S$

$\therefore\ yz+zx+xy=\dfrac{4}{\sqrt{3}}S$　…①

次に，BD：DC＝$y:z$，CE：EA＝$z:x$ であるから，公式により，

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{x(z\vec{b}+y\vec{c})}{yz+(y+z)x}=\dfrac{x(z\vec{b}+y\vec{c})}{yz+zx+xy}$

①を代入すると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{x(z\vec{b}+y\vec{c})}{\dfrac{4}{\sqrt{3}}S}=\dfrac{\sqrt{3}\,x(z\vec{b}+y\vec{c})}{4S}$　…②

△PBC に余弦定理を適用すると，$y^2+z^2-2yz\cos 120^\circ=a^2$　$\therefore\ y^2+yz+z^2=a^2$　…③

同様に，△PCA，△PAB から，$z^2+zx+x^2=b^2$　…④，$x^2+xy+y^2=c^2$　…⑤

③+④+⑤より，$2(x^2+y^2+z^2)+(yz+zx+xy)=a^2+b^2+c^2$

変形すると，$2(x+y+z)^2=a^2+b^2+c^2+3(yz+zx+xy)$

これに②を代入して，$x+y+z=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}\,S}{2}}=k$　…⑥とおく。

③−④より，$(y-x)(x+y+z)=a^2-b^2$　$\therefore\ y=x+\dfrac{a^2-b^2}{k}$　…⑦

③−⑤より，$(z-x)(x+y+z)=a^2-c^2 \quad \therefore z=x+\dfrac{a^2-c^2}{k}$ …⑧

⑦，⑧を⑥に代入すると，$x+x+\dfrac{a^2-b^2}{k}+x+\dfrac{a^2-c^2}{k}=k$

$3x=k+\dfrac{b^2+c^2-2a^2}{k} \quad \therefore x=\dfrac{k^2+b^2+c^2-2a^2}{3k}$

左辺の分子に⑥を代入すると，$x=\dfrac{\dfrac{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S}{2}+b^2+c^2-2a^2}{3k}=\dfrac{b^2+c^2-a^2+\dfrac{4}{\sqrt{3}}S}{2k}$

同様に，$y=\dfrac{c^2+a^2-b^2+\dfrac{4}{\sqrt{3}}S}{2k}$，$z=\dfrac{a^2+b^2-c^2+\dfrac{4}{\sqrt{3}}S}{2k}$ となる。

これら３式を②に代入して，

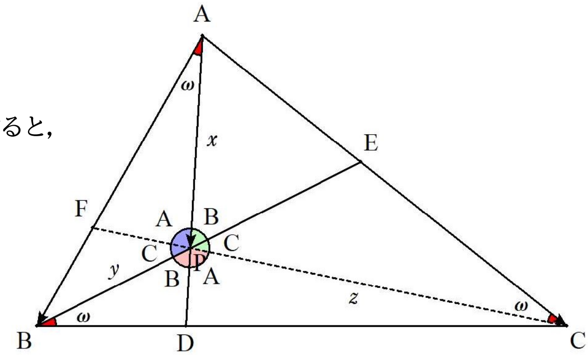
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2+\dfrac{4}{\sqrt{3}}S}{2k}}{4S}\left\{\frac{a^2+b^2-c^2+\dfrac{4}{\sqrt{3}}S}{2k}\vec{b}+\frac{c^2+a^2-b^2+\dfrac{4}{\sqrt{3}}S}{2k}\vec{c}\right\}$$

さらに⑥を代入して，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{\sqrt{3}}{8S}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2+\dfrac{4}{\sqrt{3}}S}{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S}\left\{\left(a^2+b^2-c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)\vec{b}+\left(c^2+a^2-b^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)\vec{c}\right\}$$ 答

(4)　点Ｐが第１Brocard（ブロカール）点のとき

∠PAB＝∠PBC＝∠PCA＝ω



解答　AP＝x，BP＝y，CP＝z とおく。

∠APC＝B+C＝180°－A より，△PCA に正弦定理を適用すると，

$\dfrac{x}{\sin\omega}=\dfrac{b}{\sin(180^\circ-A)}$ より，

$x=\dfrac{b\sin\omega}{\sin A}=\dfrac{b\sin\omega}{\dfrac{2S}{bc}}=\dfrac{b^2c\sin\omega}{2S}$ …①

同様に，∠BPA＝C+A＝180°－B より，

△PAB に正弦定理を適用すると，

$\dfrac{y}{\sin\omega}=\dfrac{c}{\sin(180^\circ-B)}$ より，$y=\dfrac{c\sin\omega}{\sin B}=\dfrac{c\sin\omega}{\dfrac{2S}{ca}}=\dfrac{c^2a\sin\omega}{2S}$ …②

△PAB に余弦定理を適用すると，$\cos(180^\circ-B)=-\cos B=\dfrac{x^2+y^2-c^2}{2xy}=-\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

分母を払って移項すると，$ca(x^2+y^2-c^2)+(c^2+a^2-b^2)xy=0$

これに，①，②を代入すると，

$$ca\left\{\left(\frac{b^2c\sin\omega}{2S}\right)^2+\left(\frac{c^2a\sin\omega}{2S}\right)^2-c^2\right\}+(c^2+a^2-b^2)\cdot\frac{b^2c\sin\omega}{2S}\cdot\frac{c^2a\sin\omega}{2S}=0$$

両辺を c^2a で割り移項すると，$\left\{\dfrac{b^4}{4S^2}+\dfrac{c^2a^2}{4S^2}+\dfrac{b^2(c^2+a^2-b^2)}{4S^2}\right\}\sin^2\omega=1$

$\sin^2\omega=\dfrac{4S^2}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$ 　$\sin\omega>0$ より，$\sin\omega=\dfrac{2S}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$

これを①，②に代入して，　$x=\dfrac{b^2c}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$，　$y=\dfrac{c^2a}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$ となるから，同様に，

$z=\dfrac{a^2b}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$　（これら３式を③とする。）

次に，△PBD に正弦定理を適用すると，$\dfrac{BD}{\sin B}=\dfrac{y}{\sin\{180^\circ-(B+\omega)\}}$　　$\therefore$BD$=\dfrac{y\sin B}{\sin(B+\omega)}$

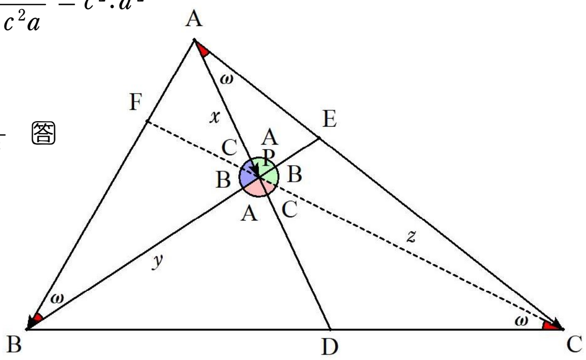
同様に，△PDC に正弦定理を適用すると，$\dfrac{DC}{\sin A}=\dfrac{z}{\sin(B+\omega)}$　　$\therefore$DC$=\dfrac{z\sin A}{\sin(B+\omega)}$

BD:DC を③を用いて計算する。

BD:DC$=\dfrac{y\sin B}{\sin(B+\omega)}:\dfrac{z\sin A}{\sin(B+\omega)}=\dfrac{\sin B}{\sin A}:\dfrac{z}{y}=\dfrac{b}{a}:\dfrac{a^2b}{c^2a}=c^2:a^2$

同様に，CE:EA$=a^2:b^2$ となるから，公式により，

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{b^2}{c^2a^2+(c^2+a^2)b^2}(a^2\vec{b}+c^2\vec{c})=\dfrac{b^2(a^2\vec{b}+c^2\vec{c})}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$　答



補足　点Ｐが第２Brocard（ブロカール）点のとき

（∠PAC$=$∠PBA$=$∠PCB$=\omega$）

第１Brocard（ブロカール）点のときと同様に計算して，

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{c^2(b^2\vec{b}+a^2\vec{c})}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$　答

別解

△PBC$=\dfrac{1}{2}az\sin\omega=\dfrac{1}{2}az\cos\omega\tan\omega=\dfrac{a^2+z^2-y^2}{4}\tan\omega$

同様に，△PCA$=\dfrac{b^2+x^2-z^2}{4}\tan\omega$，△PAB$=\dfrac{c^2+y^2-x^2}{4}\tan\omega$

△PBC＋△PCA＋△PAB＝△ABC より，

$\dfrac{1}{2}\{(a^2+z^2-y^2)+(b^2+x^2-z^2)+(c^2+y^2-x^2)\}\tan\omega=S$　　$\therefore\tan\omega=\dfrac{4S}{a^2+b^2+c^2}$

$(4S)^2=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$ であるから，

$$\sin\omega=\frac{\tan\omega}{\sqrt{1+\tan^2\omega}}=\frac{\dfrac{4S}{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{4S}{a^2+b^2+c^2}\right)^2}}=\frac{4S}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2+(4S)^2}}=\frac{2S}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$$

△PABに正弦定理を適用して，$\dfrac{x}{\sin\omega}=\dfrac{c}{\sin(180^\circ-A)}$

$$x=\frac{c}{\sin A}\sin\omega=\frac{c}{\dfrac{2S}{bc}}\cdot\frac{2S}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}=\frac{bc^2}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$$

同様に，$y=\dfrac{ca^2}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$，$z=\dfrac{ab^2}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$

$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{\triangle PAB}{\triangle PCA}=\dfrac{cy}{bx}=\dfrac{c\cdot ca^2}{b\cdot bc^2}=\dfrac{a^2}{b^2}$　　$\therefore$BD：DC$=a^2:b^2$　同様に，CE：EA$=b^2:c^2$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{c^2}{a^2b^2+(a^2+b^2)c^2}(b^2\vec{b}+c^2\vec{c})=\dfrac{c^2(b^2\vec{b}+a^2\vec{c})}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$　答

(5)　点Ｐが Lemoine（ルモワーヌ）点のとき

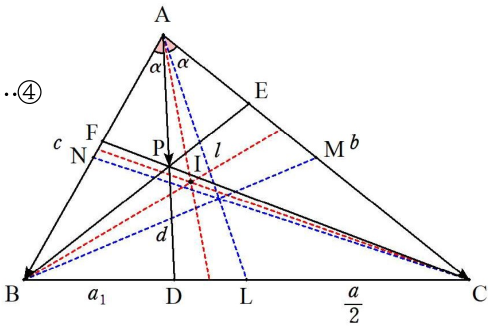
三角形の角の二等分線に関して中線を折り返した３直線の交点。

解答　図のように，AL$=l$，BM を中線とおくと，LC$=\dfrac{a}{2}$，BD$=a_1$，AD$=d$，∠BAD=∠CAL$=\alpha$とおく。

中線定理により，$2\left\{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+l^2\right\}=b^2+c^2$　$\therefore 4l^2=2b^2+2c^2-a^2$　…①

△ABD に正弦定理を適用すると，$\dfrac{a_1}{\sin\alpha}=\dfrac{d}{\sin B}$　…②

△ACL に正弦定理を適用すると，$\dfrac{\frac{a}{2}}{\sin\alpha}=\dfrac{l}{\sin C}$　…③



②÷③を辺々計算すると，$\dfrac{2a_1}{a}=\dfrac{d\sin C}{l\sin B}=\dfrac{cd}{bl}$　$\therefore d=\dfrac{2a_1bl}{ca}$　…④

△ABD に余弦定理を適用すると，$d^2=a_1{}^2+c^2-2a_1c\cos B$

これに④と $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$ を代入すると，

$\left(\dfrac{2a_1bl}{ca}\right)^2=a_1{}^2+c^2-2a_1c\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

両辺に c^2a^2 を掛けると，$4b^2l^2a_1{}^2=c^2a^2a_1{}^2+c^4a^2-c^2a(c^2+a^2-b^2)a_1$

①を代入して移項すると，$\{b^2(2b^2+2c^2-a^2)-c^2a^2\}a_1{}^2+c^2a(c^2+a^2-b^2)a_1-c^4a^2=0$

$(b^2+c^2)(2b^2-a^2)a_1{}^2+c^2a(c^2+a^2-b^2)a_1-c^4a^2=0$

たすきがけをつくる。

$$\begin{array}{ccccc} b^2+c^2 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & -c^2a & \longrightarrow & -2ab^2c^2+a^3c^2 \\ 2b^2-a^2 & & c^2a & \longrightarrow & ab^2c^2+ac^4 \\ \hline & & & & c^2a(c^2+a^2-b^2) \end{array}$$

$\therefore\{(b^2+c^2)a_1-c^2a\}\{(2b^2-a^2)a_1+c^2a\}=0$

題意に適するのは，$a_1=\dfrac{c^2a}{b^2+c^2}$=BD　このとき，DC$=a-a_1=\dfrac{ab^2}{b^2+c^2}$

$\therefore$BD：DC$=\dfrac{c^2a}{b^2+c^2}:\dfrac{ab^2}{b^2+c^2}=c^2:b^2$　同様に，CE：EA$=a^2:c^2$

よって，公式により，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{c^2}{c^2a^2+(c^2+b^2)c^2}(b^2\vec{b}+c^2\vec{c})=\dfrac{b^2\vec{b}+c^2\vec{c}}{a^2+b^2+c^2}$　答

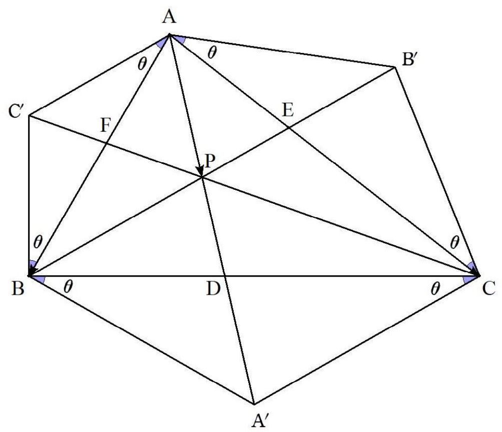
(6)　点 P が Kiepert（キーペルト）点のとき

△ABC の外側に各辺を底辺とし，相似な二等辺三角形△A′BC，△B′CA，△C′AB　をつくるとき，AA′，BB′，CC′ の交点。二等辺三角形を△ABCの外側につくったときの低角を θ，内側につくった　ときのの低角を $-\theta$ とし，$d=4S\cot\theta$ とする。$\theta=60°$ のとき，フェルマー点となる。

解答　まず，AA′，BB′，CC′ が 1 点 P で交わることを証明する。

△A′CB∽△B′AC∽△C′BA であるから，A′B=A′C$=ka$ とおくと，

B′C=B′A$=kb$，CA=CB$=kc$ となる。$\left(\text{ただし，}k=\dfrac{1}{2\cos\theta}\right)$



$\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{\triangle ABA'}{\triangle ACA'}\cdot\dfrac{\triangle BCB'}{\triangle BAB'}\cdot\dfrac{\triangle CAC'}{\triangle CBC'}$

$=\dfrac{\triangle ABA'}{\triangle ACBC'}\cdot\dfrac{\triangle BCB'}{\triangle ACA'}\cdot\dfrac{\triangle CAC'}{\triangle BAB'}=\dfrac{c\cdot ka}{a\cdot kc}\cdot\dfrac{a\cdot kb}{b\cdot ka}\cdot\dfrac{b\cdot kc}{c\cdot kb}=1$

チェバの定理の逆により，AA′，BB′，CC′ は 1 点 P で交わる。■

次に，

BD：DC=△ABA′：△ACA′

$=\dfrac{1}{2}c\cdot ka\sin(B+\theta)\ :\ \dfrac{1}{2}b\cdot ka\sin(C+\theta)=c\sin(B+\theta)\ :\ b\sin(C+\theta)$ より，

$$\mathrm{BD}=\frac{c\sin(B+\theta)}{c\sin(B+\theta)+b\sin(C+\theta)}\cdot a=\frac{c(\sin B\cos\theta+\cos B\sin\theta)}{c(\sin B\cos\theta+\cos B\sin\theta)+b(\sin C\cos\theta+\cos C\sin\theta)}\cdot a$$

$$=\frac{c(\sin B\cos\theta+\cos B\sin\theta)}{(c\sin B+b\sin C)\cos\theta+(c\cos C+b\cos B)\sin\theta}\cdot a=\frac{c(\sin B\cos\theta+\cos B\sin\theta)}{2c\sin B\cos\theta+a\sin\theta}\cdot a$$

これに，$\sin B=\dfrac{2S}{ca}$，$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$ を代入すると，

$$\mathrm{BD}=\frac{c\left(\dfrac{2S}{ca}\cos\theta+\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\sin\theta\right)}{2c\cdot\dfrac{2S}{ca}\cos\theta+a\sin\theta}\cdot a=\frac{a(4S\cot\theta+c^2+a^2-b^2)}{2(4S\cot\theta+a^2)}=\frac{a(a^2-b^2+c^2+d)}{2(a^2+d)}\quad(\because 4S\cot\theta=d)$$

ここで，$-a^2+b^2+c^2+d=d_1$，$a^2-b^2+c^2+d=d_2$，$a^2+b^2-c^2+d=d_3$ とおくと，

$\mathrm{BD}=\dfrac{ad_2}{2(a^2+d)}$　このとき，$\mathrm{DC}=a-\dfrac{ad_2}{2(a^2+d)}=\dfrac{ad_3}{2(a^2+d)}$　$\therefore \mathrm{BD}:\mathrm{DC}=d_2:d_3$

同様に，$\mathrm{CE}:\mathrm{EA}=d_3:d_1$ となる。

よって，公式により，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{d_1}{d_2d_3+(d_2+d_3)d_1}\left(d_3\vec{b}+d_2\vec{c}\right)=\dfrac{d_1\left(d_3\vec{b}+d_2\vec{c}\right)}{d_2d_3+2(a^2+d)d_1}$

ここで，
$$\begin{aligned}d_2d_3+2(a^2+d)d_1&=(a^2-b^2+c^2+d)(a^2+b^2-c^2+d)+2(a^2+d)(-a^2+b^2+c^2+d)\\&=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4+2(a^2+b^2+c^2)d+3d^2\\&=(4S)^2+2(a^2+b^2+c^2)d+3d^2=2d\left(a^2+b^2+c^2+\frac{(4S)^2+3d^2}{2d}\right)\\&=2d\{a^2+b^2+c^2+2(\tan\theta+3\cot\theta)S\}\end{aligned}$$
であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{(-a^2+b^2+c^2+d)\left\{(a^2+b^2-c^2+d)\vec{b}+(a^2-b^2+c^2+d)\vec{c}\right\}}{2d\{a^2+b^2+c^2+2(\tan\theta+3\cot\theta)S\}}$$
答 …★（ただし，$d=4S\cot\theta$ ）

補足　$\theta=60^\circ$ のとき，$d=4S\cot 60^\circ=\dfrac{4}{\sqrt{3}}S$，$2(\tan 60^\circ+3\cot 60^\circ)=4\sqrt{3}$ であるから，★の分母は，

$2d\{a^2+b^2+c^2+2(\tan\theta+3\cot\theta)S\}=\dfrac{8S}{\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S)$ となる。

よって，
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{\left(-a^2+b^2+c^2+\dfrac{4}{\sqrt{3}}S\right)\left\{\left(a^2+b^2-c^2+\dfrac{4}{\sqrt{3}}S\right)\vec{b}+\left(a^2-b^2+c^2+\dfrac{4}{\sqrt{3}}S\right)\vec{c}\right\}}{\dfrac{8S}{\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S)}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8S}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2+\dfrac{4}{\sqrt{3}}S}{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S}\left\{\left(a^2+b^2-c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)\vec{b}+\left(c^2+a^2-b^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)\vec{c}\right\}$$

このベクトルは，点Pをフェルマー点としたときに一致する。

4．おわりに

参考文献を執筆する際にも書いたが，三角形の五心の位置ベクトルを求めさせる入試問題が出題されている。今回計算した五心以外の点（ジェルゴンヌ点など）については高校では習わないから，ほとんど計算されたことがないと思われる。だから計算してみようと思った。また，五心以外の点（ジェルゴンヌ点など）に関する問題を考える際に，アプローチのヒントになれば幸いである。

今回，五心以外の点（ジェルゴンヌ点など）の位置ベクトルを求めるに当たって，BD：DC，CE：EA を求めることによって，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を求める公式をまず考えた。参考文献を執筆する際には考えることができなかった。

【参考文献】

[1]　時岡郁夫，第125回数実研レポート，三角形の五心の位置ベクトルと内積，2023.6

（2023/6/10　札幌市　tokioka3@phoenix－c.or.jp）