多変数関数の最小値を求める問題について

時岡郁夫

1．はじめに

関数 $y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x-3)^2+4}$ の最小値を求めよ。

解答　$y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{x-3}{\sqrt{(x-3)^2+4}}$

$y'=0$ とすると　$x\sqrt{(x-3)^2+4}=-(x-3)\sqrt{x^2+1}$ ……①

両辺を2乗して整理すると　$x^2+2x-3=0$

これを解くと　$x=-3,\ 1$

このうち，①を満たすのは　$x=1$

y の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	↘	$3\sqrt{2}$	↗

よって，y は $x=1$ で最小値 $3\sqrt{2}$ をとる。　答

この問題は，微分を使わない次のような解法も考えられる。

別解　A$(0,\ 1)$，P$(x,\ 0)$，B$(3,\ -2)$ とおくと，

A，Bは定点で，Pは x 軸上を動く。

また，AP$=\sqrt{x^2+1}$，BP$=\sqrt{(x-3)^2+4}$ より，

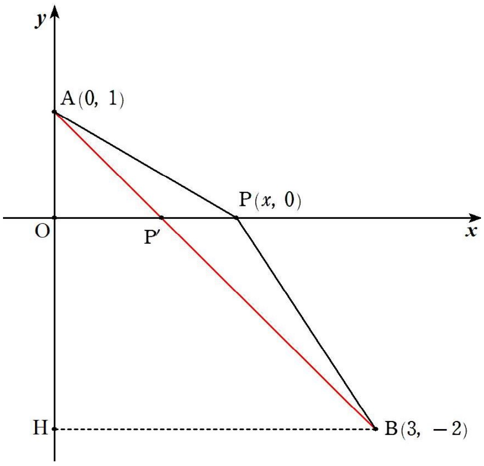
$y=$AP$+$PB$\geqq$AB（Pが線分ABと x 軸の交点P′のとき）

y の最小値は，AB$=\sqrt{3^2+(-2-1)^2}=3\sqrt{2}$

このとき，Bから y 軸に下した垂線の足をHとすると。

△AOP′∽△AHBより，$1:x=3:3$　∴ $x=1$

よって，最小値 $3\sqrt{2}$（$x=1$ のとき）　答



このような解法を利用した多変数関数の最小値を求める問題をいくつか考えてみた。

2．2変数

$f(x,\ y)=\sqrt{x^2+4y^2}+\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{4y^2-12y+10}$ の最小値とそのときの x，y の値を求めよ。

解答　変形すると，$f(x,\ y)=\sqrt{(x+2)^2+1^2}+\sqrt{x^2+(2y)^2}+\sqrt{1^2+(2y-3)^2}$

A$(2,\ -1)$，B$(-1,\ 3)$，P$(-x,\ 0)$，Q$(0,\ 2y)$ とおくと，

$f(x,\ y)=$AP$+$PQ$+$QB$\geqq$ABである。

等号は，直線ABと x 軸，y 軸との交点がP，Qになるときである。

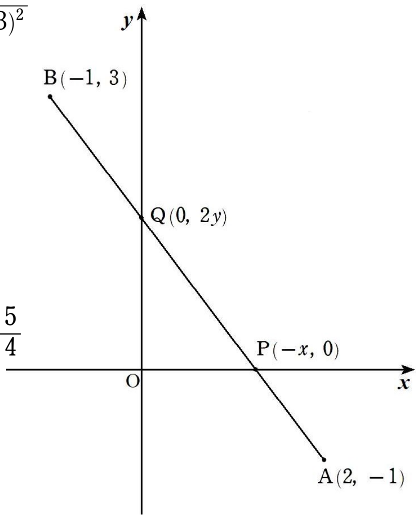
$f(x,\ y)$ の最小値は，AB$=\sqrt{(-1-2)^2+(3+1)^2}=5$

直線ABの方程式は，$y+1=\dfrac{4}{-3}(x-2)$ …①

①で $y=0$ とおくと，$x=\dfrac{5}{4}$　∴P$\left(\dfrac{5}{4},\ 0\right)$ より，$-x=\dfrac{5}{4}$ とおくと，$x=-\dfrac{5}{4}$

①で $x=0$ とおくと，$y=\dfrac{5}{3}$　∴Q$\left(0,\ \dfrac{5}{3}\right)$ より，$2y=\dfrac{5}{3}$ とおくと，$y=\dfrac{5}{6}$

よって，最小値5（$x=-\dfrac{5}{4}$，$y=\dfrac{5}{6}$ のとき）　答

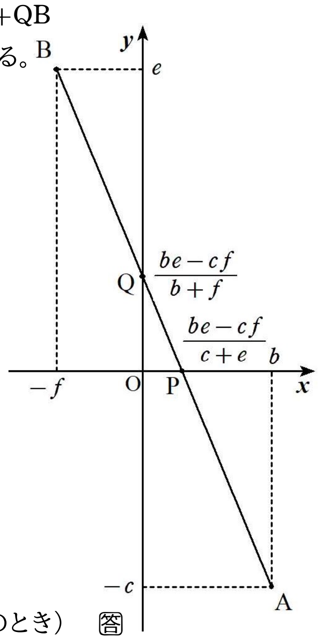


3．2変数（一般化）

a，b，c，d，e，f は正の数とする。 $be-cf>0$ のとき，$f(x,\ y)=\sqrt{(ax-b)^2+c^2}+\sqrt{(dy-e)^2+f^2}+\sqrt{a^2x^2+d^2y^2}$ の最小値とそのときの x，y の値を求めよ。

解答　$\mathrm{A}(b,\ -c)$，$\mathrm{B}(-f,\ e)$，$\mathrm{P}(ax,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ dy)$ とおくと，$f(x,\ y)=\mathrm{AP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QB}$

Aは第4象限の定点，Bは第2象限の定点，Pは x 軸上の動点，Qは y 軸上の動点である。



直線ABの方程式は，$y+c=\dfrac{-c-e}{b+f}(x-b)$　…①

①で，$y=0$ とおくと，$x=\dfrac{be-cf}{c+e}>0$

これが，Pの x 座標だから，$ax=\dfrac{be-cf}{c+e}$ とおくと，$x=\dfrac{be-cf}{a(c+e)}$

①で，$x=0$ とおくと，$y=\dfrac{be-cf}{b+f}>0$

これが，Qの y 座標だから，$dy=\dfrac{be-cf}{b+f}$ とおくと，$y=\dfrac{be-cf}{d(b+f)}$

右図より，$f(x,\ y)=\mathrm{AP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QB}\geqq\mathrm{AB}$ である。

等号は，直線ABと x 軸，y 軸との交点がP，Qになるときである。

$f(x,\ y)$ の最小値は，$\mathrm{AB}=\sqrt{(-f-b)^2+(e+c)^2}=\sqrt{(b+f)^2+(c+e)^2}$

よって，$f(x,\ y)$ の最小値は，$\sqrt{(b+f)^2+(c+e)^2}$　（$x=\dfrac{be-cf}{a(c+e)}$，$y=\dfrac{be-cf}{d(b+f)}$ のとき）　答

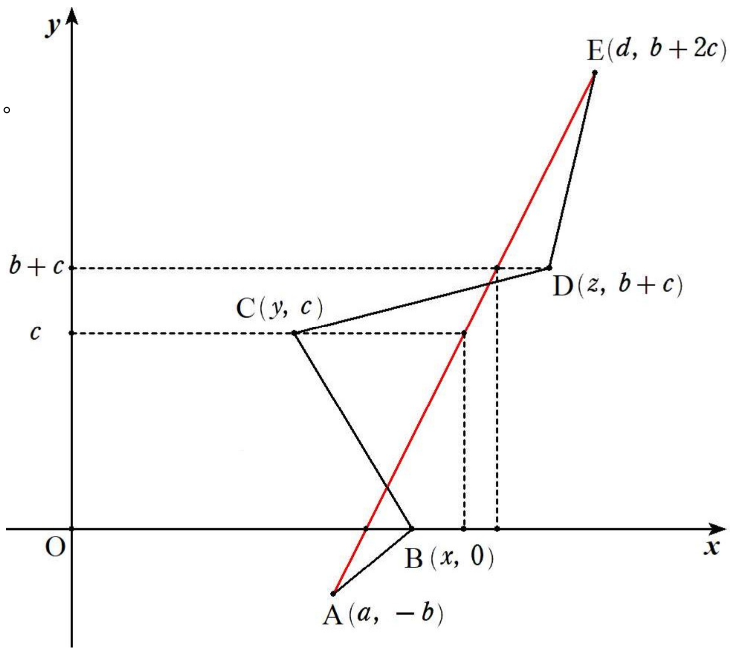
4．3変数

$f(x,\ y,\ z)=\sqrt{(x-a)^2+b^2}+\sqrt{(x-y)^2+c^2}+\sqrt{(y-z)^2+b^2}+\sqrt{(z-d)^2+c^2}$ の最小値とそのときの x，y，z の値を求めよ。ただし，a，b，c　d は正の数である。

解答　$\mathrm{A}(a,\ -b)$，$\mathrm{B}(x,\ 0)$，$\mathrm{C}(y,\ c)$，$\mathrm{D}(z,\ b+c)$，$\mathrm{E}(d,\ b+2c)$ とおくと，

$f(x,\ y,\ z)=\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CD}+\mathrm{DE}\geqq\mathrm{AE}$ となる。

（右図は，$a<d$ の場合）



最小値は，$\mathrm{AE}=\sqrt{(d-a)^2+(2b+2c)^2}$

$=\sqrt{(a-d)^2+4(b+c)^2}$

このとき，AEの方程式は，

$Y+b=\dfrac{2b+2c}{d-a}(X-a)$　…①

x の値は，①で $Y=0$ とおいて，

$X=\dfrac{b(a+d)+2ac}{2(b+c)}$　$\therefore x=\dfrac{b(a+d)+2ac}{2(b+c)}$

y の値は，①で $y=c$ とおいて，

$X=\dfrac{a+d}{2}$　$\therefore y=\dfrac{a+d}{2}$

z の値は，①で $y=b+c$ とおいて，

$X=\dfrac{c(a+d)+2bd}{2(b+c)}$　$\therefore z=\dfrac{c(a+d)+2bd}{2(b+c)}$

よって，最小値 $\sqrt{(a-d)^2+4(b+c)^2}$ （$x=\dfrac{b(a+d)+2ac}{2(b+c)}$，$y=\dfrac{a+d}{2}$，$z=\dfrac{c(a+d)+2bd}{2(b+c)}$ のとき） 答

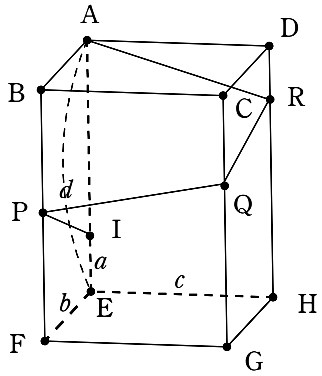
$a \geqq d$ のときは，上の結果で，a と d を入れ換えればよいから，

最小値 $\sqrt{(a-d)^2+4(b+c)^2}$ （$x=\dfrac{b(a+d)+2cd}{2(b+c)}$，$y=\dfrac{a+d}{2}$，$z=\dfrac{c(a+d)+2ab}{2(b+c)}$ のとき） 答

5．3 変数（別解）

$f(x,\ y,\ z)=\sqrt{(x-a)^2+b^2}+\sqrt{(x-y)^2+c^2}+\sqrt{(y-z)^2+b^2}+\sqrt{(z-d)^2+c^2}$ の最小値とそのときの $x,\ y,\ z$ の値を求めよ。ただし，$a,\ b,\ c\ \ d$ は正の数である。

解答　直方体 ABCD－EFGH を空間座標に置いて考える。
Eを原点に，EF，EH，EAをそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸の正の部分に置く。（右図）



[1]　$a<d$ のとき

E$(0,\ 0,\ 0)$，F$(b,\ 0,\ 0)$，H$(0,\ c,\ 0)$，A$(0,\ 0,\ d)$

AE 上に定点 I$(0,\ 0,\ a)$ をとる。

BF 上に動点 P$(b,\ 0,\ x)$，

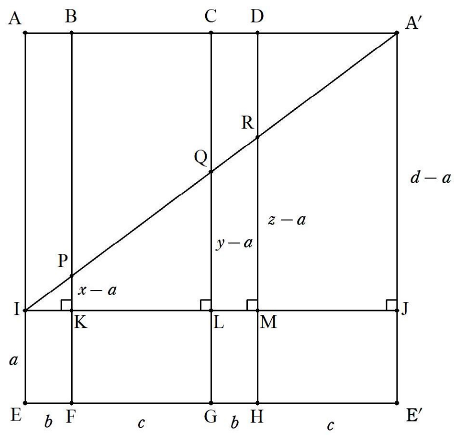
CG 上に動点 Q$(b,\ c,\ y)$，

DH 上に動点 R$(0,\ c,\ z)$ をとる。

このとき，

$$\mathrm{IP+PQ+QR+RA}=\sqrt{(x-a)^2+b^2}+\sqrt{(x-y)^2+c^2}+\sqrt{(y-z)^2+b^2}+\sqrt{(z-d)^2+c^2}=f(x,\ y,\ z)$$

となる。次の直方体の側面の展開図（右図）で，直線 IA′ と，BF，CG，DH の交点をそれぞれ P，Q，R としたとき，



IP＋PQ＋QR＋RA≧IA′（最小）

I から A′E′ に下した垂線の足を J とすると，△A′IJ において，

A′J＝$d-a$，IJ＝$2b+2c$ であるから，三平方の定理により，

$$\mathrm{IA'}=\sqrt{(d-a)^2+(2b+2c)^2}=\sqrt{(a-d)^2+4(b+c)^2}\quad（最小値）$$

IJ と PF，QG，RH の交点をそれぞれ K，L，M とする。

△PIK∽△QIL∽△RIM∽△A′IJ より，

$$b:(x-a)=(b+c):(y-a)=(2b+c):(z-a)=(2b+2c):(d-a)$$

であるから，

$$x-a=\frac{b(d-a)}{2b+2c},\quad y-a=\frac{(b+c)(d-a)}{2b+2c},\quad z-a=\frac{(2b+c)(d-a)}{2b+2c}$$

$$\therefore\ x=\frac{ab+2ac+bd}{2(b+c)},\quad y=\frac{a+d}{2},\quad z=\frac{ac+2bd+cd}{2(b+c)}$$

よって，最小値 $\sqrt{(a-d)^2+4(b+c)^2}$ （$x=\dfrac{b(a+d)+2ac}{2(b+c)}$，$y=\dfrac{a+d}{2}$，$z=\dfrac{c(a+d)+2bd}{2(b+c)}$ のとき） 答

[2]　$a=d$ のとき，

[1]の結果で，$a=d$ とおけばよい。

最小値 $2(b+c)$ （$x=y=z=a$ のとき） 答

[3]　$a>d$ のとき

[1]で，A$(0,\ 0,\ a)$，I$(0,\ 0,\ d)$ とおけばよい。結果も a と d を入れ換えればよい。

よって，最小値 $\sqrt{(a-d)^2+4(b+c)^2}$ （$x=\dfrac{b(a+d)+2cd}{2(b+c)}$，$y=\dfrac{a+d}{2}$，$z=\dfrac{c(a+d)+2ab}{2(b+c)}$ のとき） 答

例　$f(x,\ y,\ z)=\sqrt{x^2-4x+5}+\sqrt{(x-y)^2+9}+\sqrt{(y-z)^2+1}+\sqrt{z^2-16z+73}$ の最小値とそのときの $x,\ y,\ z$ の値を求めよ。

解答　$f(x,\ y,\ z)=\sqrt{(x-2)^2+1^2}+\sqrt{(x-y)^2+3^2}+\sqrt{(y-z)^2+1^2}+\sqrt{(z-8)^2+3^2}$ である。

$a=2$，$b=1$，$c=3$，$d=8$ で，[1] の場合であるから，

$f(x,\ y,\ z)$ の最小値は，$\sqrt{(a-d)^2+4(b+c)^2}=\sqrt{(2-8)^2+4(1+3)^2}=10$ 答

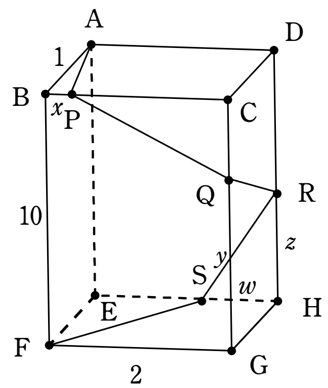
$\left(x=\dfrac{b(a+d)+2ac}{2(b+c)}=\dfrac{1(2+8)+2\cdot 2\cdot 3}{2(1+3)}=\dfrac{11}{4},\quad y=\dfrac{a+d}{2}=\dfrac{2+8}{2}=5,\right.$

$\left.\quad z=\dfrac{c(a+d)+2bd}{2(b+c)}=\dfrac{3(2+8)+2\cdot 1\cdot 8}{2(1+3)}=\dfrac{23}{4}\ のとき\right)$

6．4 変数

$f(x,\ y,\ z,\ w)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x-2)^2+(y-10)^2}+\sqrt{(y-z)^2+1}+\sqrt{z^2+(w-2)^2}+\sqrt{w^2+1}$ の最小値とそのときの $x,\ y,\ z,\ w$ の値を求めよ。

解答　直方体 ABCD－EFGH を空間座標に置いて考える。



Eを原点に，EF，EH，EAをそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸の正の部分に置く。（右図）

A(0, 0, 10)，F(1, 0, 0) とおき，BC 上の動点を，P(1, x, 10)，

CG 上の動点を，Q(1, 2, y)，DH 上の動点を，R(0, 2, z)，

EH 上の動点を，S(0, w, 0) とおくと，

AP$=\sqrt{1^2+x^2}=\sqrt{x^2+1}$，PQ$=\sqrt{(2-x)^2+(y-10)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-10)^2}$，

QR$=\sqrt{(-1)^2+(z-y)^2}=\sqrt{(y-z)^2+1}$，

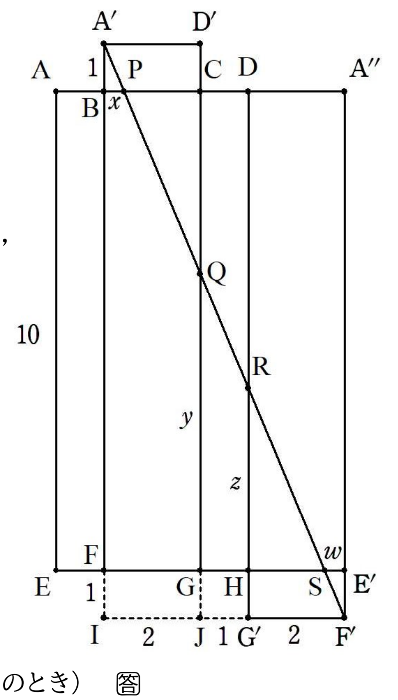
RS$=\sqrt{(w-2)^2+(-z)^2}=\sqrt{z^2+(w-2)^2}$，

SF$=\sqrt{1^2+(-w)^2}=\sqrt{w^2+1}$ であるから，

$f(x,\ y,\ z,\ w)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x-2)^2+(y-10)^2}+\sqrt{(y-z)^2+1}+\sqrt{z^2+(w-2)^2}+\sqrt{w^2+1}$

$\qquad\qquad=\mathrm{AP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QR}+\mathrm{RS}+\mathrm{SF}$ …①となる。

次に，直方体の展開図をつくり（右図），図のように記号を付けると，



A′F′ と BC，CG，DH，HE の交点をそれぞれ P，Q，R，S としたとき，

①は，$f(x,\ y,\ z,\ w)=\mathrm{AP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QR}+\mathrm{RS}+\mathrm{SF}\geqq \mathrm{A'F'}$ となり，最小となる。

A′F と F′G′ の交点を I，Q から IF′ に下した垂線の足を J とする。

△A′IF′ は直角三角形で，A′I$=1+10+1=12$，IF′$=2+1+2=5$ であるから，

三平方の定理により，A′F′$=\sqrt{12^2+5^2}=13$（最小値）

最後に，このときの $x,\ y,\ z,\ w$ の値を求める。

△A′BP∽△A′IF′ より，$1:x=12:5\quad \therefore x=\dfrac{5}{12}$

△QJG′∽△A′IF′ より，$(y+1):3=12:5\quad \therefore y=\dfrac{31}{5}$

△RG′F′∽△A′IF′ より，$(z+1):2=12:5\quad \therefore z=\dfrac{19}{5}$

△F′E′S≡△A′BP より，$w=x=\dfrac{5}{12}$

よって，$f(x,\ y,\ z,\ w)$ の最小値 13（$x=\dfrac{5}{12}$，$y=\dfrac{31}{5}$，$z=\dfrac{19}{5}$，$w=\dfrac{5}{12}$ のとき）答

7．応用

> 2定点 A$(0,\ a)$，B$(0,\ b)$ に対し，$y=x^2$ 上に点Pをとる。AP+BPの最小値とそのときの点Pの y 座標を求めよ。ただし，$a>b\geqq\dfrac{1}{2}$ とする。

解答　P$(t,\ t^2)$ とおくと，

$$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}=\sqrt{t^2+(t^2-a)^2}+\sqrt{t^2+(t^2-b)^2}=\sqrt{a-\frac{1}{4}+\left(t^2-a+\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{b-\frac{1}{4}+\left(t^2-b+\frac{1}{2}\right)^2}$$

ここで，C$\left(\sqrt{a-\dfrac{1}{4}},\ a-\dfrac{1}{2}\right)$，D$\left(-\sqrt{b-\dfrac{1}{4}},\ b-\dfrac{1}{2}\right)$，Q$(0,\ t^2)$ とおくと，AP+BP＝CQ+DQ

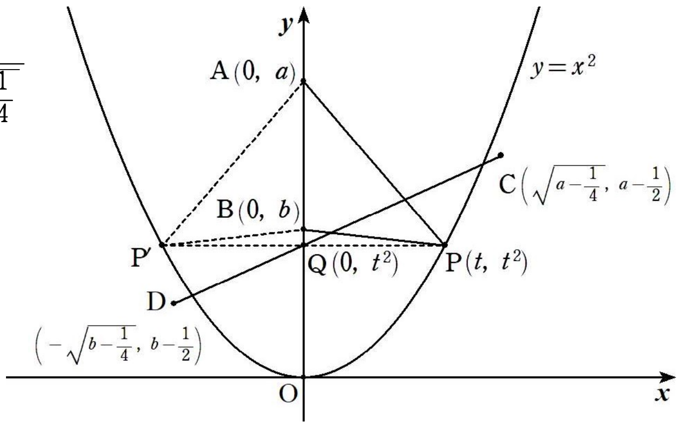
Qが y 軸上を動くとき，CQ+DQの値は，Qが直線CDと y 軸との交点のとき，最小となる。（下図）

最小値は，$\mathrm{CD}=\sqrt{\left(\sqrt{a-\dfrac{1}{4}}+\sqrt{b-\dfrac{1}{4}}\right)^2+(a-b)^2}=\sqrt{(a-b)^2+a+b-\dfrac{1}{2}+2\sqrt{\left(a-\dfrac{1}{4}\right)\left(b-\dfrac{1}{4}\right)}}$

直線CDの方程式は，$y-\left(a-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{a-b}{\sqrt{a-\dfrac{1}{4}}+\sqrt{b-\dfrac{1}{4}}}\left(x-\sqrt{a-\dfrac{1}{4}}\right)$

$x=0$ とおくと，$y=a-\dfrac{1}{2}-\dfrac{(a-b)\sqrt{a-\dfrac{1}{4}}}{\sqrt{a-\dfrac{1}{4}}+\sqrt{b-\dfrac{1}{4}}}$

$$=-\frac{1}{4}+\sqrt{\left(a-\frac{1}{4}\right)\left(b-\frac{1}{4}\right)}$$



点Pの y 座標は，点Qの y 座標に等しいから，

$t^2=-\dfrac{1}{4}+\sqrt{\left(a-\dfrac{1}{4}\right)\left(b-\dfrac{1}{4}\right)}$

よって，

最小値 $\sqrt{(a-b)^2+a+b-\dfrac{1}{2}+2\sqrt{\left(a-\dfrac{1}{4}\right)\left(b-\dfrac{1}{4}\right)}}$　（$y=-\dfrac{1}{4}+\sqrt{\left(a-\dfrac{1}{4}\right)\left(b-\dfrac{1}{4}\right)}$ のとき）　答

例　2定点 A$(0,\ 2023)$，B$(0,\ 225)$ に対し，$y=x^2$ 上に点Pをとる。AP+BPの最小値とそのときの点Pの y 座標を求めよ。

解答　$a=2023$，$b=225$ のとき，AP+BPの最小値は，$60\sqrt{899}$

そのときの点Pの y 座標は，674

よって，最小値 $60\sqrt{899}$，y 座標 674　答

8．終わりに

一見，微分（偏微分）を使うような最小値を求める問題も，「AからBに至る最短経路は，線分ABである。」を使うと，微分を使わないで求められる問題がある。その際，使うのは，2点A，Bを座標で表し，2点間の距離の公式だけであるから，問題によっては，中学生でも求められる。

【参考文献】

1．冒頭の問題は，数研出版　改訂版４STEP数学Ⅲから

（2023/11/4　数実研会員　札幌市　tokioka3@phoenix−c.or.jp）