正三角形の辺や円弧によって囲まれる図形内の４円の半径について

時岡郁夫

１辺の長さが１の正三角形 ABC の図形と，正三角形 ABC のいくつかの辺を半径１の円弧に置き換えた図形を考える。

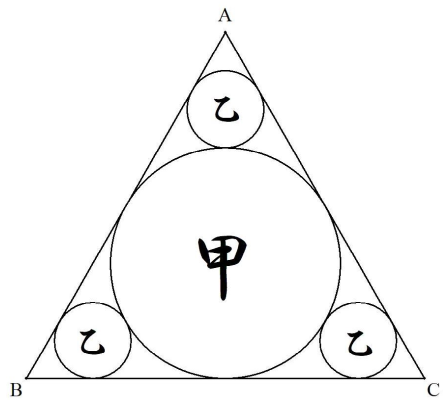
[1]　A，B，C を頂点とする図形が，BC，CA，AB の垂直二等分線に関して対称になる。→ ３通り（1～3）

[2]　A，B，C を頂点とする図形が，BC の垂直二等分線に関して対称になる。→６通り（4～9）

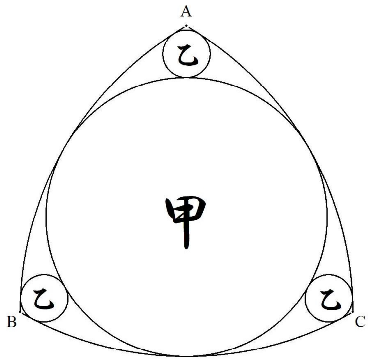
[3]　A，B，C を頂点とする図形が，対称でない。→１通り（10）

これら 10 個の図形に４円（甲乙丙丁）を内接させたときの各円の半径を求めた。

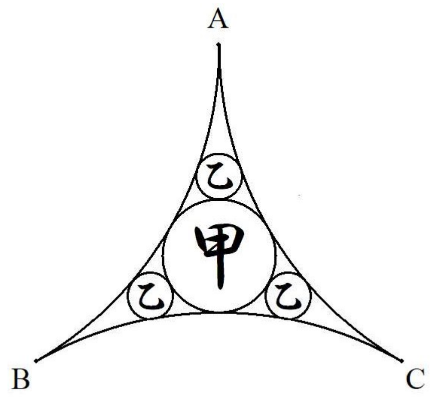
１．A，B，C は１辺の長さが１の正三角形の頂点である。
この図形の中に図のように互いに接する甲乙円を配置する。
甲乙円の半径をそれぞれ求めよ。



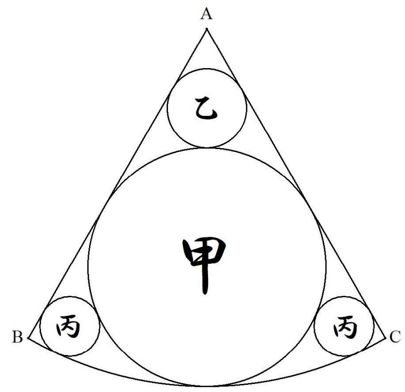
２．A，B，C は１辺の長さが１の正三角形の頂点で，
弧 AB，BC，CA は半径１の円弧である。
この図形の中に図のように互いに接する甲乙円を配置する。
甲乙円の半径をそれぞれ求めよ。



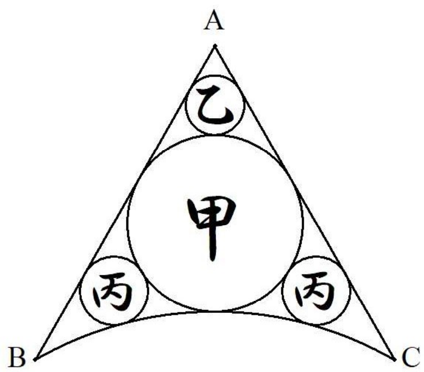
３．A，B，C は１辺の長さが１の正三角形の頂点で，
弧 BC，CA，AB は半径１の円弧である。
図のようにこの図形の中に，互いに接する甲乙円を配置する。
甲乙円の半径をそれぞれ求めよ。



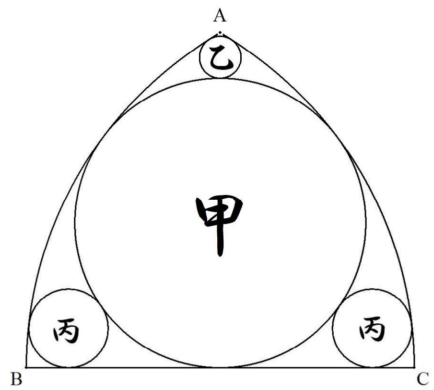
４．A，B，Cは１辺の長さが１の正三角形の頂点で，
弧BCは半径１の円弧である。
この図形の中に図のように互いに接する甲乙丙円
を配置する。
甲乙丙円の半径をそれぞれ求めよ。



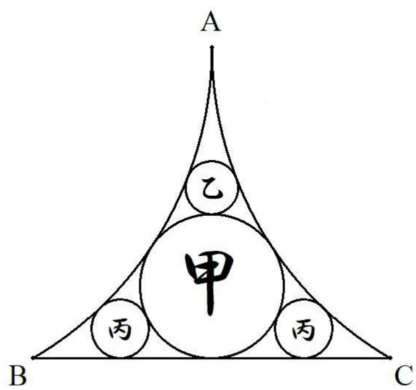
５．A，B，Cは１辺の長さが１の正三角形の頂点で，
弧BCは半径１の円弧である。
図のようにこの図形の中に，互いに接する甲乙丙円
を配置する。
甲乙丙円の半径をそれぞれ求めよ。



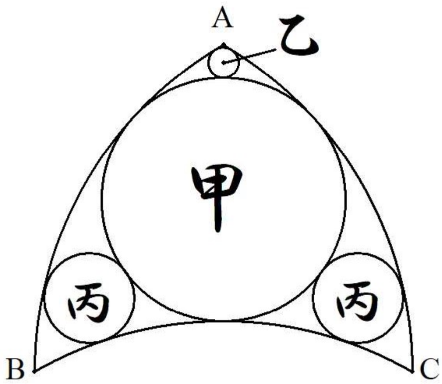
６．A，B，Cは１辺の長さが１の正三角形の頂点で，
弧AB，ACは半径１の円弧である。
この図形の中に図のように互いに接する甲乙丙円
を配置する。
甲乙丙円の半径をそれぞれ求めよ。



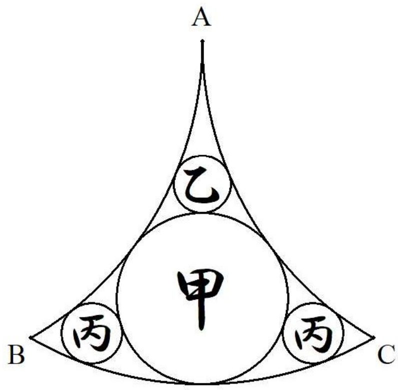
７．A，B，Cは１辺の長さが１の正三角形の頂点で，
弧CA，ABは半径１の円弧である。
図のようにこの図形の中に，互いに接する甲乙丙円
を配置する。
甲乙丙円の半径をそれぞれ求めよ。



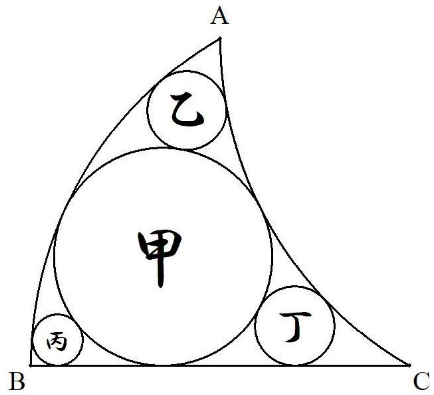
８．A，B，Cは１辺の長さが１の正三角形の頂点で，
弧BC，CA，ABは半径１の円弧である。
図のようにこの図形の中に，互いに接する甲乙丙円
を配置する。
甲乙丙円の半径をそれぞれ求めよ。



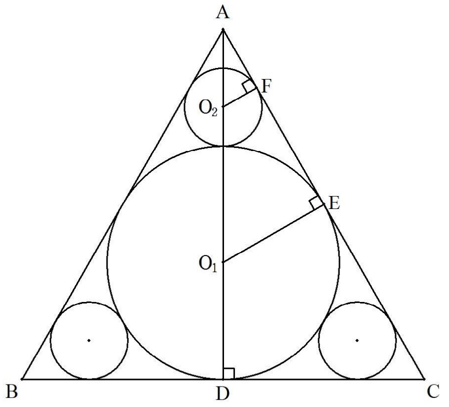
９．A，B，Cは１辺の長さが１の正三角形の頂点で，
弧BC，CA，ABは半径１の円弧である。
図のようにこの図形の中に，互いに接する甲乙丙円
を配置する。
甲乙丙円の半径をそれぞれ求めよ。



10．A，B，Cは１辺の長さが１の正三角形の頂点で，
弧CA，ABは半径１の円弧である。
図のようにこの図形の中に，互いに接する甲乙丙丁
円を配置する。
甲乙丙丁円の半径をそれぞれ求めよ。



1．解答　甲乙円を $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$ とおき，図のように記号を付ける。



$\triangle AO_1E$ について，$\angle AO_1E=60^\circ$ であるから，$AO_1=2\,O_1E$

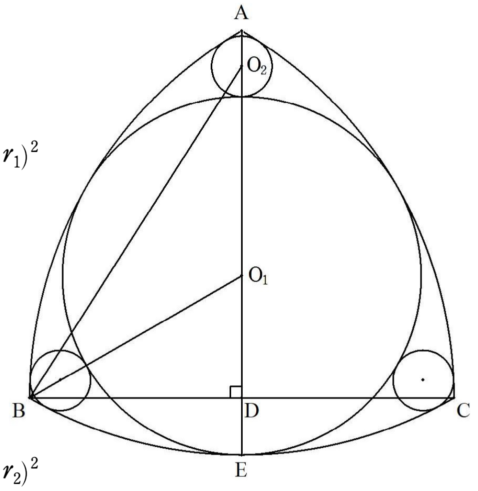
$AO_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-r_1$，$O_1E=r_1$ であるから，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}-r_1=2r_1$　$\therefore r_1=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

$\triangle AO_2F$ について，$\angle AO_2F=60^\circ$ であるから，$AO_2=2\,O_2F=2r_2$

$AO_1=2r_2+r_2+r_1=2r_1$ より，$r_2=\dfrac{1}{3}r_1=\dfrac{\sqrt{3}}{18}$

よって，各円の半径は，甲：$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，乙：$\dfrac{\sqrt{3}}{18}$　答

2．解答　甲乙円を$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$ とおき，図のように記号を付ける。



$DE=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから，$O_1D=r_1-1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\triangle O_1BD$ に三平方の定理を適用すると，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(r_1-1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=(1-r_1)^2$

$\dfrac{1}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-2r_1\right)$　$\therefore r_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$　（$\fallingdotseq 0.42265$）

次に，$O_2D=r_2+r_1+r_1-1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=r_2+2r_1-1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

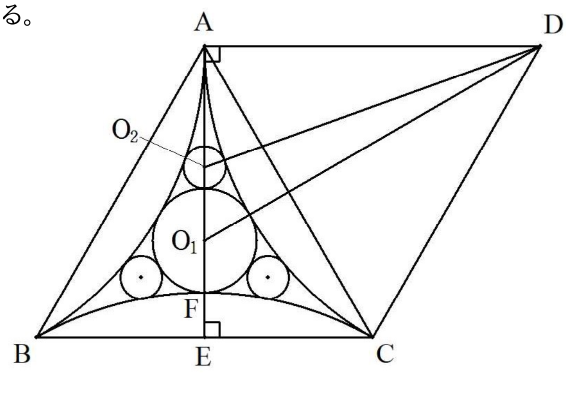
これに，$r_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$ を代入すると，$O_2D=r_2+\dfrac{6-\sqrt{3}}{6}$

$\triangle O_2BD$ に三平方の定理を適用すると，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(r_2+\dfrac{6-\sqrt{3}}{6}\right)^2=(1-r_2)^2$

$\dfrac{1}{4}=\dfrac{12-\sqrt{3}}{6}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}-2r_2\right)$　$\therefore r_2=\dfrac{\sqrt{3}-1}{12-\sqrt{3}}=\dfrac{11\sqrt{3}-9}{141}$　（$\fallingdotseq 0.0712947$）

よって，各円の半径は，甲：$\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$，乙：$\dfrac{11\sqrt{3}-9}{141}$　答

3．解答　甲乙円を$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$ とおき，図のように記号を付ける。



$\triangle O_1BE$ は$\angle O_1BE=30^\circ$，$BE=\dfrac{1}{2}$ であるから，$O_1E=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

また，$FE=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから，$r_1+\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

$\therefore r_1=\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}$　（$\fallingdotseq 0.154701$）

このとき，$AF=\sqrt{3}-1$ より，

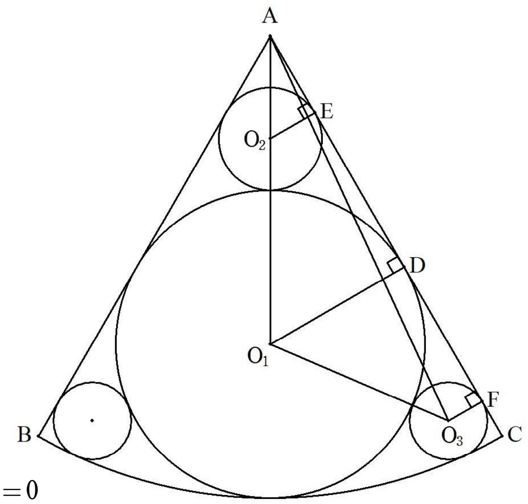
$AO_2=\sqrt{3}-1-2r_1-r_2=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}-r_2$，

$O_2D=1+r_2$ であるから，$\triangle O_2DA$ に三平方の定理を適用すると，

$1^2+\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}-r_2\right)^2=(1+r_2)^2$　$\therefore r_2=\dfrac{2-\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}}=\dfrac{9-4\sqrt{3}}{33}$　（$\fallingdotseq 0.0627817$）

よって，各円の半径は，甲：$\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}$，乙：$\dfrac{9-4\sqrt{3}}{33}$　答

4．解答　甲乙丙円を $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$ とおき，図のように記号を付ける。



$\triangle AO_1D$ について，$\angle AO_1D=60°$ であるから，$AO_1=2\,O_1D$

$AO_1=1-r_1$，$O_1D=r_1$ であるから，$1-r_1=2r_1$　$\therefore r_1=\dfrac{1}{3}$

$\triangle AO_2E$ について，$\angle AO_2E=60°$ であるから，$AO_2=2\,O_2E=2r_2$

$AO_1=2r_2+r_2+r_1=2r_1$ より，$r_2=\dfrac{1}{3}r_1=\dfrac{1}{9}$

次に，$\triangle O_3AF$について，$AO_3=1-r_3$，$O_3F=r_3$，

$AF=AD+DF=\sqrt{3}\,r_1+2\sqrt{r_1r_3}$ であるから三平方の定理により，

$r_3{}^2+(\sqrt{3}\,r_1+2\sqrt{r_1r_3})^2=(1-r_3)^2$

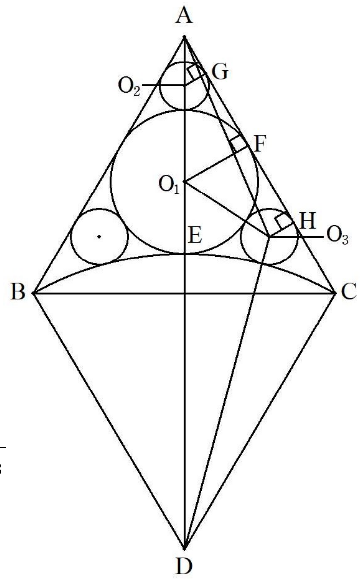
r_3 について整理すると，$2(1+2r_1)r_3+4\sqrt{3}\,r_1\sqrt{r_1}\sqrt{r_3}+3r_1{}^2-1=0$

$r_1=\dfrac{1}{3}$ を代入して整理すると，$5r_3+2\sqrt{r_3}-1=0$　$\therefore \sqrt{r_3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{6}}{5}$

$\sqrt{r_3}>0$ より，$\sqrt{r_3}=\dfrac{-1+\sqrt{6}}{5}$　$\therefore r_3=\dfrac{7-2\sqrt{6}}{25}$　（≒ 0.0840408）

よって，各円の半径は，甲：$\dfrac{1}{3}$，乙：$\dfrac{1}{9}$，丙：$\dfrac{7-2\sqrt{6}}{25}$　答

5．解答　甲乙丙円を $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$ とおき，図のように記号を付ける。



$\triangle AO_1F$ について，$\angle AO_1F=60°$ であるから，$AO_1=2\,O_1F=2r_1$

また，$AO_1=AE-O_1E=(\sqrt{3}-1)-r_1$ であるから，$2r_1=\sqrt{3}-1-r_1$

$\therefore r_1=\dfrac{\sqrt{3}-1}{3}$　（≒ 0.244017）

$\triangle AO_2G$ について，$\angle AO_2G=60°$ であるから，$AO_2=2\,O_2G=2r_2$

$AO_1=2r_2+r_2+r_1=2r_1$ より，$r_2=\dfrac{1}{3}r_1=\dfrac{\sqrt{3}-1}{9}$　（≒ 0.081339）

次に，$AH=AF+FH=\sqrt{3}\,r_1+2\sqrt{r_1r_3}$ であるから，

$\triangle AO_3H$ に三平方の定理を適用して，

$AO_3{}^2=AH^2+O_3H_2=(\sqrt{3}\,r_1+2\sqrt{r_1r_3})^2+r_3{}^2=3r_1{}^2+4r_1r_3+r_3{}^2+4\sqrt{3}\,r_1\sqrt{r_1r_3}$

$\triangle AO_1O_3$ について，$AO_1=2r_1$，$O_1O_3=r_1+r_3$ であるから余弦定理により，

$$\cos\angle AO_1O_3=\frac{(2r_1)^2+(r_1+r_3)^2-AO_3{}^2}{2\cdot 2r_1(r_1+r_3)}$$

$$=\frac{(2r_1)^2+(r_1+r_3)^2-(3r_1{}^2+4r_1r_3+r_3{}^2+4\sqrt{3}\,\sqrt{r_1r_3})}{2\cdot 2r_1(r_1+r_3)}=\frac{r_1-r_3-2\sqrt{3}\,\sqrt{r_1r_3}}{2(r_1+r_3)}\quad\cdots①$$

$\triangle O_3O_1D$ について，$O_1D=1+r_1$，$DO_3=1+r_3$ であるから，余弦定理により，

$$\cos\angle O_3O_1D=\frac{(1+r_1)^2+(r_1+r_3)^2-(1+r_3)^2}{2(1+r_1)(r_1+r_3)}=\frac{r_1(1+r_1)-(1-r_1)r_3}{(1+r_1)(r_1+r_3)}\quad\cdots②$$

$\angle AO_1O_3+\angle O_3O_1D=180°$ より，$\cos\angle AO_1O_3+\cos\angle O_3O_1D=0$ であるから，①，②を代入して，

$$\frac{r_1-r_3-2\sqrt{3}\,\sqrt{r_1r_3}}{2(r_1+r_3)}+\frac{r_1(1+r_1)-(1-r_1)r_3}{(1+r_1)(r_1+r_3)}=0$$

分母を払うと，$(1+r_1)(r_1-r_3-2\sqrt{3}\,\sqrt{r_1r_3})+2\{r_1(1+r_1)-(1-r_1)r_3\}=0$

移項すると，$(3-r_1)r_3+2\sqrt{3}(1+r_1)\sqrt{r_1r_3}-3r_1(1+r_1)=0$

$$\sqrt{r_3}=\frac{-\sqrt{3}(1+r_1)\sqrt{r_1}\pm\sqrt{3(1+r_1)^2r_1+(3-r_1)\cdot 3r_1(1+r_1)}}{3-r_1}=\frac{-\sqrt{3}(1+r_1)\sqrt{r_1}\pm 2\sqrt{3r_1(1+r_1)}}{3-r_1}$$

$\sqrt{r_3}>0$ より，$\sqrt{r_3}=\dfrac{-\sqrt{3}(1+r_1)\sqrt{r_1}+2\sqrt{3r_1(1+r_1)}}{3-r_1}=\dfrac{\sqrt{3r_1(1+r_1)}(2-\sqrt{1+r_1})}{3-r_1}$

$$\therefore r_3=\frac{3r_1(1+r_1)(5+r_1-4\sqrt{1+r_1})}{(3-r_1)^2}$$

ここで，$r_1=\dfrac{\sqrt{3}-1}{3}$ のとき，$3r_1(1+r_1)=\dfrac{1+\sqrt{3}}{3}$，$5+r_1=\dfrac{14+\sqrt{3}}{3}$，$4\sqrt{1+r_1}=\dfrac{2(3\sqrt{2}+\sqrt{6})}{3}$，

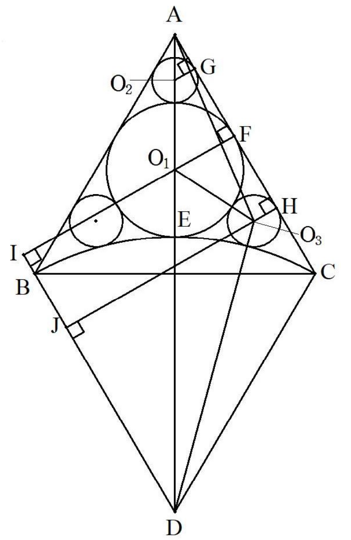
$\dfrac{1}{(3-r_1)^2}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{10-\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{9(103+20\sqrt{3})}{97^2}$ であるから，

$$r_3=\frac{1+\sqrt{3}}{3}\cdot\left\{\frac{14+\sqrt{3}}{3}+\frac{2(3\sqrt{2}+\sqrt{6})}{3}\right\}\cdot\frac{9(103+20\sqrt{3})}{97^2}$$

$$=\frac{2651-1716\sqrt{2}+1885\sqrt{3}-1064\sqrt{6}}{9409}\quad(\fallingdotseq 0.0938323)$$

よって，各円の半径は，甲：$\dfrac{\sqrt{3}-1}{3}$，乙：$\dfrac{\sqrt{3}-1}{9}$，丙：$\dfrac{2651-1716\sqrt{2}+1885\sqrt{3}-1064\sqrt{6}}{9409}$ 答

(r_3) （別解１）



$\triangle O_1ID$ に三平方の定理を適用して，

$$ID=\sqrt{(1+r_1)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-r_1\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+(2+\sqrt{3})r_1}$$

同様に，$\triangle O_3JD$ に三平方の定理を適用して，

$$JD=\sqrt{(1+r_3)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-r_3\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+(2+\sqrt{3})r_3}$$

$IJ=FH=\sqrt{(r_1+r_3)^2-(r_1-r_3)^2}=2\sqrt{r_1r_3}$

$ID-JD=IJ$ であるから，$\sqrt{\dfrac{1}{4}+(2+\sqrt{3})r_1}-\sqrt{\dfrac{1}{4}+(2+\sqrt{3})r_3}=2\sqrt{r_1r_3}$

両辺を２乗すると，

$$\frac{1}{2}+(2+\sqrt{3})r_1+(2+\sqrt{3})r_3-2\sqrt{\frac{1}{4}+(2+\sqrt{3})r_1}\sqrt{\frac{1}{4}+(2+\sqrt{3})r_3}=4r_1r_3$$

両辺に２を掛けて，移項すると，$1+2(2+\sqrt{3})r_1+2(2+\sqrt{3}-4r_1)r_3=\sqrt{1+4(2+\sqrt{3})r_1}\sqrt{1+4(2+\sqrt{3})r_3}$

両辺を２乗して，r_3 について整理すると，$(2+\sqrt{3}-4r_1)^2r_3{}^2-2r_1\{9+4\sqrt{3}+4(2+\sqrt{3})r_1\}r_3+(7+4\sqrt{3})r_1{}^2=0$

両辺を $r_1{}^2$ で割り，$\dfrac{r_3}{r_1}=x$ とおくと，$(2+\sqrt{3}-4r_1)^2x^2-2\{9+4\sqrt{3}+4(2+\sqrt{3})r_1\}x+(2+\sqrt{3})^2=0$

$$x=\frac{9+4\sqrt{3}+4(2+\sqrt{3})r_1\pm 4\sqrt{2+\sqrt{3}+4(2+\sqrt{3})^2r_1}}{(2+\sqrt{3}-4r_1)^2}$$

$$=\frac{9+4\sqrt{3}+4(2+\sqrt{3})r_1\pm 2(1+\sqrt{3})\sqrt{2+8(2+\sqrt{3})r_1}}{(2+\sqrt{3}-4r_1)^2}$$

$r_1=\dfrac{\sqrt{3}-1}{3}$ のとき，

$9+4\sqrt{3}+4(2+\sqrt{3})r_1=\dfrac{31+16\sqrt{3}}{3}$，$2(1+\sqrt{3})\sqrt{2+8(2+\sqrt{3})r_1}=\dfrac{18\sqrt{2}+10\sqrt{6}}{3}$，

$\frac{1}{(2+\sqrt{3}-4r_1)^2}=\frac{9(10+\sqrt{3})^2}{97^2}$ であるから，

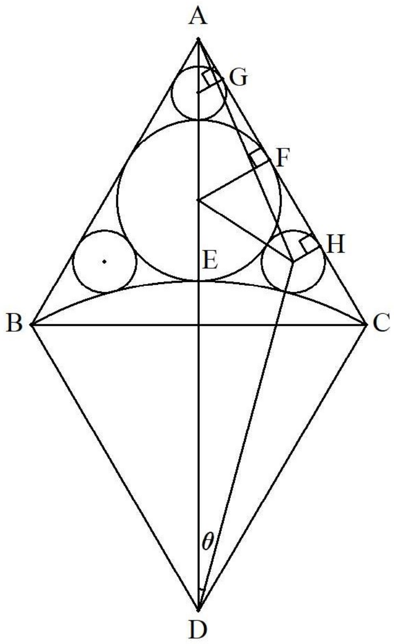
$x=\left(\frac{31+16\sqrt{3}}{3}\pm\frac{18\sqrt{2}+10\sqrt{6}}{3}\right)\cdot\frac{9(10+\sqrt{3})^2}{97^2}=\frac{r_3}{r_1}$ より，

$r_3=\left(\frac{31+16\sqrt{3}}{3}\pm\frac{18\sqrt{2}+10\sqrt{6}}{3}\right)\cdot\frac{9(10+\sqrt{3})^2}{97^2}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{3}=\frac{2651+1885\sqrt{3}\pm(1716\sqrt{2}+1064\sqrt{6})}{9409}$

ここで，$\frac{2651+1885\sqrt{3}-(1716\sqrt{2}+1064\sqrt{6})}{9409}\fallingdotseq 0.0938323$，$\frac{2651+1885\sqrt{3}+(1716\sqrt{2}+1064\sqrt{6})}{9409}\fallingdotseq 1.16367$

であるから，題意に適するのは，$r_3=\frac{2651-1716\sqrt{2}+1885\sqrt{3}-1064\sqrt{6}}{9409}$

(r_3)（別解２）



AH＝AF+FH＝$\sqrt{3}r_1+2\sqrt{r_1r_3}$，$O_3H=r_3$ であるから，

△AO_3H に三平方の定理を適用して，$AO_3{}^2=(\sqrt{3}r_1+2\sqrt{r_1r_3})^2+r_3{}^2$ …①

$\angle ADO_3=\angle O_1DO_3=\theta$ とおく。

△ADO_3 に余弦定理を適用すると，$\cos\theta=\frac{(\sqrt{3})^2+(1+r_3)^2-AO_3{}^2}{2\sqrt{3}(1+r_3)}$

これに①を代入すると，

$$\cos\theta=\frac{(\sqrt{3})^2+(1+r_3)^2-(\sqrt{3}r_1+2\sqrt{r_1r_3})^2-r_3{}^2}{2\sqrt{3}(1+r_3)}$$

$$=\frac{4-3r_1{}^2-4\sqrt{3}r_1\sqrt{r_1r_3}+(2-4r_1)r_3}{2\sqrt{3}(1+r_3)}\quad\cdots②$$

△O_1DO_3 に余弦定理を適用すると，

$$\cos\theta=\frac{(1+r_1)^2+(1+r_3)^2-(r_1+r_3)^2}{2(1+r_1)(1+r_3)}=\frac{1+r_1+(1-r_1)r_3}{(1+r_1)(1+r_3)}\quad\cdots③$$

②，③より，$\frac{4-3r_1{}^2-4\sqrt{3}r_1\sqrt{r_1r_3}+(2-4r_1)r_3}{2\sqrt{3}(1+r_3)}=\frac{1+r_1+(1-r_1)r_3}{(1+r_1)(1+r_3)}$

分母を払い移項すると，$(1+r_1)\{4-3r_1{}^2-4\sqrt{3}r_1\sqrt{r_1r_3}+(2-4r_1)r_3\}-2\sqrt{3}\{1+r_1+(1-r_1)r_3\}=0$

r_3 について整理すると，

$4-2\sqrt{3}+(4-2\sqrt{3})r_1-3r_1{}^2-3r_1{}^3-4\sqrt{3}(r_1+r_1{}^2)\sqrt{r_1}\sqrt{r_3}+\{2-2\sqrt{3}+(-2+2\sqrt{3})r_1-4r_1{}^2\}r_3=0$ …④

ここで，$r_1=\frac{\sqrt{3}-1}{3}$ より，$3r_1+1=\sqrt{3}$，$9r_1{}^2+6r_1-2=0$ であるから，

（定数項）$4-2\sqrt{3}+(4-2\sqrt{3})r_1-3r_1{}^2-3r_1{}^3=(9r_1{}^2+6r_1-2)\left(-\frac{1}{3}r_1-\frac{1}{9}\right)+(4-2\sqrt{3})r_1+\frac{34}{9}-2\sqrt{3}$

$$=(4-2\sqrt{3})r_1+\frac{34}{9}-2\sqrt{3}=\frac{4}{9}$$

（$\sqrt{r_3}$ の係数）$-4\sqrt{3}(r_1+r_1{}^2)\sqrt{r_1}=-4\sqrt{3}\left(r_1+\frac{-6r_1+2}{9}\right)\sqrt{r_1}=-\frac{4\sqrt{3}}{9}(3r_1+2)\sqrt{r_1}$

$$=-\frac{4}{9}(3+\sqrt{3})\sqrt{\frac{-1+\sqrt{3}}{3}}=-\frac{4}{9}\sqrt{2+2\sqrt{3}}$$

（r_3 の係数）$2-2\sqrt{3}+(-2+2\sqrt{3})r_1-4r_1{}^2=2-2\sqrt{3}+(-2+2\sqrt{3})r_1-4\cdot\frac{-6r_1+2}{9}$

$$=\frac{2}{9}\{5-9\sqrt{3}+(3+9\sqrt{3})r_1\}=\frac{2}{9}(13-11\sqrt{3})$$

④は，$\frac{4}{9}-\frac{4}{9}\sqrt{2+2\sqrt{3}}\,\sqrt{r_3}+\frac{2}{9}(13-11\sqrt{3})\,r_3=0$　∴ $(-13+11\sqrt{3})r_3+2\sqrt{2+2\sqrt{3}}\,\sqrt{r_3}-2=0$

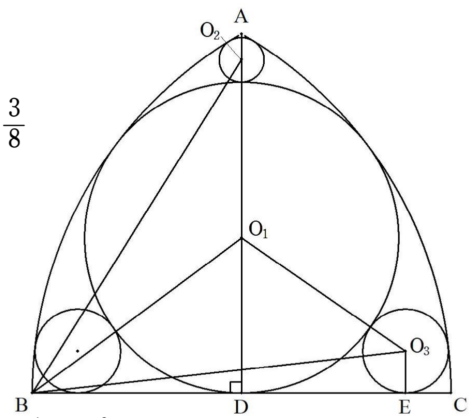
$$\sqrt{r_3}=\frac{-\sqrt{2+2\sqrt{3}}\pm\sqrt{2+2\sqrt{3}+2(-13+11\sqrt{3})}}{-13+11\sqrt{3}}$$

$\sqrt{r_3}>0$ より，$\sqrt{r_3}=\dfrac{-\sqrt{2+2\sqrt{3}}+\sqrt{-24+24\sqrt{3}}}{-13+11\sqrt{3}}$

$$r_3=\frac{-22+26\sqrt{3}-2\sqrt{(2+2\sqrt{3})(-24+24\sqrt{3})}}{(-13+11\sqrt{3})^2}=\frac{-22+26\sqrt{3}-8\sqrt{6}}{(-13+11\sqrt{3})^2}=\frac{-11+13\sqrt{3}-4\sqrt{6}}{266-143\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(-11+13\sqrt{3}-4\sqrt{6})(266+143\sqrt{3})}{266^2-143^2\cdot 3}=\frac{2651-1716\sqrt{2}+1885\sqrt{3}-1064\sqrt{6}}{9409}\quad(\fallingdotseq 0.0938323)$$

6．解答　甲乙丙円を $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$ とおき，図のように記号を付ける。



$\triangle O_1BD$ に三平方の定理を適用すると，$\left(\frac{1}{2}\right)^2+r_1{}^2=(1-r_1)^2$　∴ $r_1=\frac{3}{8}$

$\triangle O_2BD$ に三平方の定理を適用すると，$\left(\frac{1}{2}\right)^2+(2r_1+r_2)^2=(1-r_2)^2$

$r_1=\frac{3}{8}$ を代入して計算すると，$r_2=\frac{3}{56}$

次に，$O_3B=1-r_3$，$BE=BD+DE=\frac{1}{2}+2\sqrt{r_1r_3}$，$O_3E=r_3$

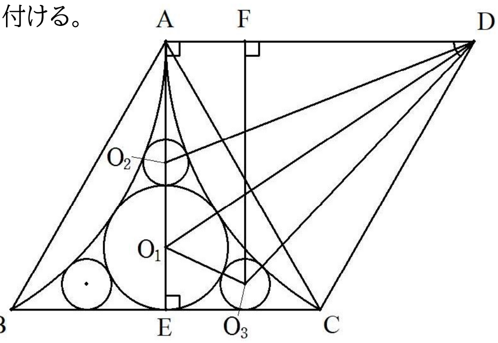
であるから$\triangle O_3BE$ に三平方の定理を適用すると，$\left(\frac{1}{2}+2\sqrt{r_1r_3}\right)^2+r_3{}^2=(1-r_3)^2$

$r_1=\frac{3}{8}$ を代入して整理すると，$14r_3+2\sqrt{6}\sqrt{r_3}-3=0$　∴ $\sqrt{r_3}=\dfrac{-\sqrt{6}\pm 4\sqrt{3}}{14}$

$\sqrt{r_3}>0$ より，$\sqrt{r_3}=\dfrac{-\sqrt{6}+4\sqrt{3}}{14}$　∴ $r_3=\dfrac{3(9-4\sqrt{2})}{98}$　$(\fallingdotseq 0.1023412)$

よって，各円の半径は，甲：$\frac{3}{8}$，乙：$\frac{3}{56}$，丙：$\dfrac{3(9-4\sqrt{2})}{98}$　答

7．解答　甲乙丙円を$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$ とおき，図のように記号を付ける。



$AO_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-r_1$ より，$\triangle O_1DA$ に三平方の定理を適用すると，

$1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-r_1\right)^2=(1+r_1)^2$　∴ $r_1=\dfrac{3(2-\sqrt{3})}{4}$　$(\fallingdotseq 0.200962)$

$\triangle O_2DA$ に三平方の定理を適用すると，

$1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-2r_1-r_2\right)^2=(1+r_2)^2$　∴ $r_2=\dfrac{3-8\sqrt{3}\,r_1+16r_1{}^2}{4(2+\sqrt{3}-4r_1)}$

これに，$r_1=\dfrac{3(2-\sqrt{3})}{4}$ を代入すると，$r_2=\dfrac{3(-5+3\sqrt{3})}{8}$　$(\fallingdotseq 0.0735572)$

次に，$\triangle O_3DF$ に三平方の定理を適用して，$FD=\sqrt{(1+r_3)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-r_3\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+(2+\sqrt{3})r_3}$　…①

また，$AF=2\sqrt{r_1r_3}$ であるから，$FD=1-2\sqrt{r_1r_3}$　…②

①，②より，$\sqrt{\frac{1}{4}+(2+\sqrt{3})r_3}=1-2\sqrt{r_1r_3}$

両辺を２乗して整理すると，$(8+4\sqrt{3}-16r_1)r_3+16\sqrt{r_1}\sqrt{r_3}-3=0$

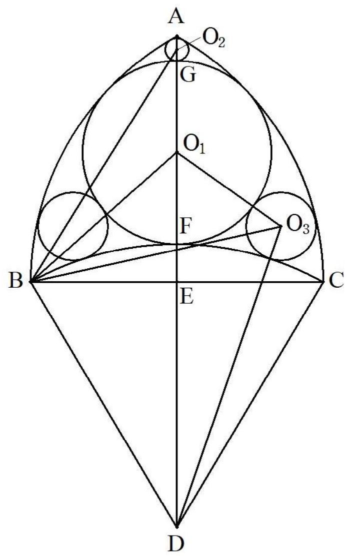
$r_1=\dfrac{3(2-\sqrt{3})}{4}$ を代入すると，$16(\sqrt{3}-1)r_3+4(3\sqrt{2}-\sqrt{6})\sqrt{r_3}-3=0$

両辺に $\sqrt{3}+1$ を掛けると，$32r_3+8\sqrt{6}\sqrt{r_3}-3(\sqrt{3}+1)=0$ $\quad\sqrt{r_3}=\dfrac{-4\sqrt{6}\pm4(3+\sqrt{3})}{32}$

$\sqrt{r_3}>0$ より，$\sqrt{r_3}=\dfrac{-\sqrt{6}+3+\sqrt{3}}{8}$ $\quad\therefore r_3=\dfrac{3(3-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6})}{32}$ （≒ 0.0814076）

よって，各円の半径は，甲：$\dfrac{3(2-\sqrt{3})}{4}$，乙：$\dfrac{3(-5+3\sqrt{3})}{8}$，丙：$\dfrac{3(3-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6})}{32}$ 答

８．解答 甲乙丙円を $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$ とおき，図のように記号を付ける。



$FE=FD-ED=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから，$\triangle O_1BE$ に三平方の定理を適用して，

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+r_1\right)^2=(1-r_1)^2$ $\quad\therefore r_1=\dfrac{-1+3\sqrt{3}}{13}$ （≒ 0.3227809）

$\triangle O_2BE$ に三平方の定理を適用して，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+2r_1+r_2\right)^2=(1-r_2)^2$

$r_2=\dfrac{-1+\sqrt{3}+(-4+2\sqrt{3})r_1-4r_1^2}{4-\sqrt{3}+4r_1}$

$r_1=\dfrac{-1+3\sqrt{3}}{13}$ より，$r_2=\dfrac{5+11\sqrt{3}}{13(48-\sqrt{3})}=\dfrac{21+41\sqrt{3}}{2301}$ （≒ 0.0399887）

$\angle O_1BD=\alpha$，$\angle O_3BD=\beta$ とおくと，$\angle O_1BO_3=\alpha-\beta$

$\triangle O_1BO_3$ に余弦定理を適用すると，

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{(1-r_1)^2+(1-r_2)^2-(r_1+r_3)^2}{2(1-r_1)(1-r_2)}=\dfrac{1-r_1-r_3-r_1r_3}{(1-r_1)(1-r_2)}$ …①

$\triangle O_1BD$ に余弦定理を適用すると，$\cos\alpha=\dfrac{1^2+(1-r_1)^2-(1+r_1)^2}{2\cdot1\cdot(1-r_1)}=\dfrac{1-4r_1}{2(1-r_1)}$

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{3(1-4r_1^2)}}{2(1-r_1)}$

$\triangle O_3BD$ に余弦定理を適用すると，$\cos\beta=\dfrac{1^2+(1-r_3)^2-(1+r_3)^2}{2\cdot1\cdot(1-r_3)}=\dfrac{1-4r_3}{2(1-r_3)}$

$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\dfrac{\sqrt{3(1-4r_3^2)}}{2(1-r_3)}$

これらを①に代入すると，$\dfrac{1-4r_1}{2(1-r_1)}\cdot\dfrac{1-4r_3}{2(1-r_3)}+\dfrac{\sqrt{3(1-4r_1^2)}}{2(1-r_1)}\cdot\dfrac{\sqrt{3(1-4r_3^2)}}{2(1-r_3)}=\dfrac{1-r_1-r_3-r_1r_3}{(1-r_1)(1-r_2)}$

分母を払って移項すると，$3\sqrt{(1-4r_1^2)(1-4r_3^2)}=3-20r_1r_3$

両辺を２乗すると，$9(1-4r_1^2)(1-4r_3^2)=(3-20r_1r_3)^2$

移項して整理すると，$(9+64r_1^2)r_3^2-30r_1r_3+9r_1^2=0$

$\dfrac{r_3}{3r_1}=x$ とおくと，$(9+64r_1^2)x^2-10x+1=0$ $\quad x=\dfrac{5\pm\sqrt{5^2-(9+64r_1^2)}}{9+64r_1^2}=\dfrac{5\pm4\sqrt{1-4r_1^2}}{9+64r_1^2}$

$r_3<r_1$ より，$x<\dfrac{1}{3}$ であるから，$x=\dfrac{r_3}{3r_1}=\dfrac{5-4\sqrt{1-4r_1^2}}{9+64r_1^2}$ $\quad\therefore r_3=\dfrac{3r_1(5-4\sqrt{1-4r_1^2})}{9+64r_1^2}$

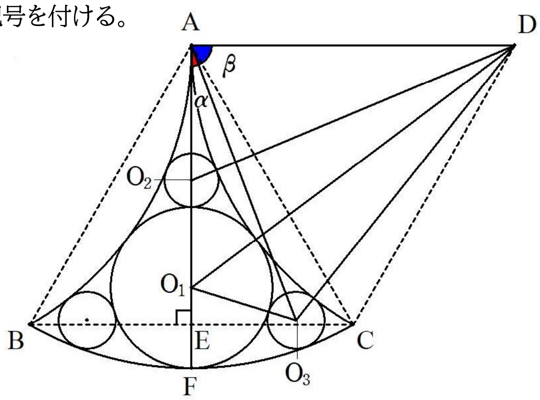
$r_1=\dfrac{-1+3\sqrt{3}}{13}$ を代入すると,

$$r_3=\frac{3\left(-65+195\sqrt{3}-4\sqrt{6(194+55\sqrt{3})}\right)}{3313-384\sqrt{3}}=\frac{3(-65+195\sqrt{3}-4(33+5\sqrt{3}))}{3313-384\sqrt{3}}=\frac{3(-17+19\sqrt{3})}{397}$$

（$\fallingdotseq 0.120219$）

よって，各円の半径は，甲：$\dfrac{-1+3\sqrt{3}}{13}$，乙：$\dfrac{21+41\sqrt{3}}{2301}$，丙：$\dfrac{3(-17+19\sqrt{3})}{397}$ 答

9．解答　甲乙丙円を $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$ とおき，図のように記号を付ける。



$\triangle O_1DA$ に三平方の定理を適用すると，

$1^2+(1-r_1)^2=(1+r_1)^2 \quad \therefore r_1=\dfrac{1}{4}$

$\triangle O_2DA$ に三平方の定理を適用すると，

$1^2+(1-2r_1-r_2)^2=(1+r_2)^2$

$r_1=\dfrac{1}{4}$ であるから，$1^2+\left(\dfrac{1}{2}-r_2\right)^2=(1+r_2)^2 \quad \therefore r_2=\dfrac{1}{12}$

$\angle O_1AO_3=\alpha$，$\angle O_3AD=\beta$ とおくと，$\alpha+\beta=90°$

余弦定理により，

$$\cos\alpha=\frac{(1-r_1)^2+(1-r_3)^2-(r_1+r_3)^2}{2(1-r_1)(1-r_3)}=\frac{1-r_1-r_3-r_1r_3}{(1-r_1)(1-r_3)}=\frac{3-5r_3}{3(1-r_3)} \quad \left(\because r_1=\frac{1}{4}\right)$$

$$\cos\beta=\frac{1^2+(1-r_3)^2-(1+r_3)^2}{2\cdot1\cdot(1-r_3)}=\frac{1-4r_3}{2(1-r_3)}=\sin\alpha$$

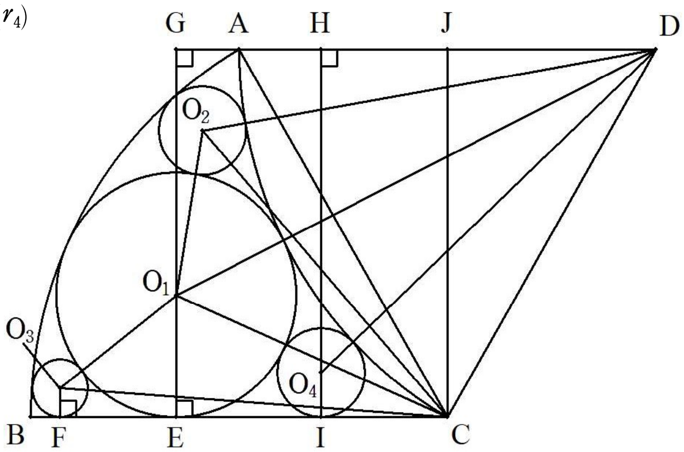
$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ より，$\left\{\dfrac{1-4r_3}{2(1-r_3)}\right\}^2+\left\{\dfrac{3-5r_3}{3(1-r_3)}\right\}^2-1=0$

分母を払って整理すると，$208{r_3}^2-120r_3+9=0 \qquad r_3=\dfrac{3(5\pm2\sqrt{3})}{52}$

$r_3<r_1=\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{15}{52}>\dfrac{1}{4}$ より，$r_3=\dfrac{3(5-2\sqrt{3})}{52}$（$\fallingdotseq 0.0886095$）

よって，各円の半径は，甲：$\dfrac{1}{4}$，乙：$\dfrac{1}{12}$，丙：$\dfrac{3(5-2\sqrt{3})}{52}$ 答

10．解答　甲乙丙丁円を $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$，$O_4(r_4)$ とおき，図のように記号を付ける。



(r_1)

$\triangle O_1CE$ に三平方の定理を適用して，

$\mathrm{EC}=\sqrt{(1-r_1)^2-{r_1}^2}=\sqrt{1-2r_1}$

$\mathrm{GD}=\mathrm{GJ}+\mathrm{ID}=\mathrm{EC}+\mathrm{JD}=\sqrt{1-2r_1}+\dfrac{1}{2}$

また，$\mathrm{GO_1}=\mathrm{GE}-\mathrm{O_1E}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-r_1$，$\mathrm{O_1D}=r_1+1$

であるから，$\triangle O_1DG$ に三平方の定理を適用して，

$$(r_1+1)^2=\left(\sqrt{1-2r_1}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-r_1\right)^2$$

展開して移項すると，$(4+\sqrt{3})r_1-1=\sqrt{1-2r_1}$

両辺を２乗して整理すると，$r_1\{(19+8\sqrt{3})r_1-2(3+\sqrt{3})\}=0$

$r_1 \fallingdotseq 0$ より，$r_1=\dfrac{2(3+\sqrt{3})}{19+8\sqrt{3}}=\dfrac{2(33-5\sqrt{3})}{169}$ （≒ 0.288044）

(r_2)

$\angle CDO_2=\alpha$，$\angle CDO_1=\beta$ とおく。

余弦定理により，$\cos\alpha=\dfrac{1^2+(1+r_2)^2-(1-r_2)^2}{2\cdot1\cdot(1+r_2)}=\dfrac{1+4r_2}{2(1+r_2)}$，$\cos\beta=\dfrac{1^2+(1+r_1)^2-(1-r_1)^2}{2\cdot1\cdot(1+r_1)}=\dfrac{1+4r_1}{2(1+r_1)}$，

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{3(1-4r_2^{\,2})}}{2(1+r_2)}$，$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\dfrac{\sqrt{3(1-4r_1^{\,2})}}{2(1+r_1)}$

$\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{(1+r_1)^2+(1+r_2)^2-(r_1+r_2)^2}{2(1+r_1)(1+r_2)}=\dfrac{1+r_1+r_2-r_1r_2}{(1+r_1)(1+r_2)}$　これら５式を(*)とおく。

加法定理 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ に(*)を代入すると，

$$\frac{1+r_1+r_2-r_1r_2}{(1+r_1)(1+r_2)}=\frac{1+4r_2}{2(1+r_2)}\cdot\frac{1+4r_1}{2(1+r_1)}+\frac{\sqrt{3(1-4r_2^{\,2})}}{2(1+r_2)}\cdot\frac{\sqrt{3(1-4r_1^{\,2})}}{2(1+r_1)}$$

両辺に $4(1+r_1)^2(1+r_2)^2$ を掛け，移項すると，$3-20r_1r_2=3\sqrt{(1-4r_1^{\,2})(1-4r_2^{\,2})}$

両辺を２乗して r_2 について整理すると，$(9+64r_1^{\,2})r_2^{\,2}-30r_1r_2+9r_1^{\,2}=0$

両辺を $9r_1^{\,2}$ で割り，$\dfrac{r_2}{3r_1}=x$ とおくと，$(9+64r_1^{\,2})x^2-10x+1=0$

$x=\dfrac{5\pm4\sqrt{1-4r_1^{\,2}}}{9+64r_1^{\,2}}=\dfrac{r_2}{3r_1}$ より，$r_2=3r_1\cdot\dfrac{5\pm4\sqrt{1-4r_1^{\,2}}}{9+64r_1^{\,2}}$

$r_1=\dfrac{2(33-5\sqrt{3})}{169}$ のとき，$\sqrt{1-4r_1^{\,2}}=\dfrac{55+48\sqrt{3}}{169}$，$\dfrac{1}{9+64r_1^{\,2}}=\dfrac{185011+28160\sqrt{3}}{3345483}$ であるから，

$r_2=\dfrac{2(75-23\sqrt{3})}{673}$ （≒ 0.104496），$r_2=\dfrac{6(105+19\sqrt{3})}{1657}$ （≒ 0.499369）

題意に適するのは，$r_2=\dfrac{2(75-23\sqrt{3})}{673}$

(r_3)

$\triangle CO_3F$ について，$CO_3=1-r_3$，$O_3F=r_3$ であるから三平方の定理により，$FC=\sqrt{(1-r_3)^2-r_3^{\,2}}=\sqrt{1-2r_3}$，

$\triangle CO_1E$ について，$CO_1=1-r_1$，$O_1E=r_1$ であるから三平方の定理により，$EC=\sqrt{(1-r_1)^2-r_1^{\,2}}=\sqrt{1-2r_1}$，

$FE=2\sqrt{r_1r_3}$ である。

FC−EC=FEより，$\sqrt{1-2r_3}-\sqrt{1-2r_1}=2\sqrt{r_1r_3}$　…②

ここで，$1-2r_1=a$，$1-2r_3=b$ とおくと，$r_1=\dfrac{1-a}{2}$，$r_3=\dfrac{1-b}{2}$ であるから，

$2\sqrt{r_1r_3}=\sqrt{(1-a)(1-b)}$ より，②は，$\sqrt{b}-\sqrt{a}=\sqrt{(1-a)(1-b)}$

両辺を２乗すると，$b+a-2\sqrt{ab}=(1-a)(1-b)$

整理すると，$(2-a)b-2\sqrt{ab}-(1-2a)=0$

$\sqrt{b}=\dfrac{\sqrt{a}\pm\sqrt{2}(1-a)}{2-a}$　$\therefore b=\dfrac{2-3a+2a^2\pm2\sqrt{2}\sqrt{a}(1-a)}{(2-a)^2}=1-2r_3$ より，

$r_3=\dfrac{1}{2}\left\{1-\dfrac{2-3a+2a^2\pm2\sqrt{2}\sqrt{a}(1-a)}{(2-a)^2}\right\}=\dfrac{(1-a)(2+a\mp2\sqrt{2}\sqrt{a})}{2(2-a)^2}$

ここで，$r_1=\dfrac{2(33-5\sqrt{3})}{168}$ であるから，$a=1-2r_1=\dfrac{37+20\sqrt{3}}{169}$，$\sqrt{a}=\dfrac{5+2\sqrt{3}}{13}$，

$\dfrac{1}{(2-a)^2} = \left(\dfrac{301+20\sqrt{3}}{529}\right)^2 = \dfrac{91801+12040\sqrt{3}}{279841}$ より，複号を別々に代入計算すると，

$r_3 = \dfrac{2(37275-12630\sqrt{2}+1185\sqrt{3}-4906\sqrt{6})}{279841}$　（≒ 0.0675295）

$r_3 = \dfrac{2(37275+12630\sqrt{2}+1185\sqrt{3}+4906\sqrt{6})}{279841}$　（≒ 0.49461）

題意に適するのは，$r_3 = \dfrac{2(37275-12630\sqrt{2}+1185\sqrt{3}-4906\sqrt{6})}{279841}$　（≒ 0.0675295）

(r_3) 別解

$\angle O_1CE=\gamma$，$\angle O_3CF=\delta$ とおくと，

$\cos(\gamma-\delta) = \cos\gamma\cos\delta+\sin\gamma\sin\delta = \dfrac{(1-r_1)^2+(1-r_3)^2-(r_1+r_3)^2}{2(1-r_1)(1-r_3)} = \dfrac{1-r_1-r_3-r_1r_3}{(1-r_1)(1-r_3)}$　…③

$\sin\gamma = \dfrac{r_1}{1-r_1}$，$\cos\gamma = \sqrt{1-\sin^2\gamma} = \dfrac{\sqrt{1-2r_1}}{1-r_1}$

また，$\sin\delta = \dfrac{r_3}{1-r_3}$，$\cos\delta = \sqrt{1-\sin^2\delta} = \dfrac{\sqrt{1-2r_3}}{1-r_3}$ より，これら 4 式を③に代入すると，

$$\frac{\sqrt{1-2r_1}}{1-r_1}\cdot\frac{\sqrt{1-2r_3}}{1-r_3}+\frac{r_1}{1-r_1}\cdot\frac{r_3}{1-r_3} = \frac{1-r_1-r_3-r_1r_3}{(1-r_1)(1-r_3)}$$

分母を払い，移項すると，$\sqrt{1-2r_1}\sqrt{1-2r_3} = 1-r_1-r_3-2r_1r_2$

両辺を 2 乗し，移項すると，$(1+2r_1)^2r_3{}^2-2r_1(3-2r_1)r_3+r_1{}^2=0$

両辺を $r_1{}^2$ で割り，$\dfrac{r_3}{r_1}=x$ とおくと，，$(1+2r_1)^2x^2-2(3-2r_1)x+1=0$

$$x = \frac{3-2r_1\pm2\sqrt{2}\sqrt{1-2r_1}}{(1+2r_1)^2}$$

題意に適するのは，$x = \dfrac{3-2r_1-2\sqrt{2}\sqrt{1-2r_1}}{(1+2r_1)^2}$　$\therefore r_3 = \dfrac{r_1(3-2r_1-2\sqrt{2}\sqrt{1-2r_1})}{(1+2r_1)^2}$

$r_1 = \dfrac{2(33-5\sqrt{3})}{169}$ のとき，$\sqrt{1-2r_1} = \sqrt{\dfrac{37+20\sqrt{3}}{169}} = \dfrac{5+2\sqrt{3}}{13}$ であるから，

$r_1(3-2r_1-2\sqrt{2}\sqrt{1-2r_1}) = \dfrac{2(12075-3510\sqrt{2}-1215\sqrt{3}-1066\sqrt{6})}{28561}$，$\dfrac{1}{(1+2r_1)^2} = \dfrac{91801+12040\sqrt{3}}{279841}$ より，

$$r_3 = \frac{2(12075-3510\sqrt{2}-1215\sqrt{3}-1066\sqrt{6})}{28561}\cdot\frac{91801+12040\sqrt{3}}{279841}$$

$= \dfrac{2(37275-12630\sqrt{2}+1185\sqrt{3}-4906\sqrt{6})}{279841}$　（≒ 0.0675295）

(r_4)

$GH=EI=2\sqrt{r_1r_4}$

$\triangle O_1DG$ に三平方の定理を適用すると，$GD=\sqrt{(1+r_1)^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-r_1\right)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{1+4(2+\sqrt{3})r_1}$

$\triangle O_4DH$ に三平方の定理を適用すると，$HD=\sqrt{(1+r_4)^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-r_4\right)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{1+4(2+\sqrt{3})r_4}$

$GD-HD=GH$ であるから，$\dfrac{1}{2}\sqrt{1+4(2+\sqrt{3})r_1}-\dfrac{1}{2}\sqrt{1+4(2+\sqrt{3})r_4} = 2\sqrt{r_1r_4}$

両辺に 2 を掛け，2 乗すると，

$2+4(2+\sqrt{3})r_1+4(2+\sqrt{3})r_4-2\sqrt{1+4(2+\sqrt{3})r_1}\sqrt{1+4(2+\sqrt{3})r_4} = 16r_1r_4$

両辺を 2 で割り，移項すると， $1+2(2+\sqrt{3})r_1+2(2+\sqrt{3})r_4-8r_1r_4=\sqrt{1+4(2+\sqrt{3})r_1}\sqrt{1+4(2+\sqrt{3})r_4}$

両辺を 2 乗して r_4 について整理すると，

$$\{7+4\sqrt{3}-8(2+\sqrt{3})r_1+16r_1{}^2\}r_4{}^2-2r_1\{9+4\sqrt{3}+4(2+\sqrt{3})r_1\}r_4+(7+4\sqrt{3})r_1{}^2=0$$

$$r_4=\frac{r_1\{9+4\sqrt{3}+4(2+\sqrt{3})r_1\pm4\sqrt{2+\sqrt{3}+4(7+4\sqrt{3})r_1}\}}{7+4\sqrt{3}-8(2+\sqrt{3})r_1+16r_1{}^2}$$

$r_1=\dfrac{2(33-5\sqrt{3})}{169}$ のとき， $9+4\sqrt{3}+4(2+\sqrt{3})r_1=\dfrac{1929+860\sqrt{3}}{169}$,

$\sqrt{2+\sqrt{3}+4(7+4\sqrt{3})r_1}=\dfrac{35\sqrt{2}+27\sqrt{6}}{26}$,

$\dfrac{1}{7+4\sqrt{3}-8(2+\sqrt{3})r_1+16r_1{}^2}=\dfrac{136519-30932\sqrt{3}}{552049}$ であるから，

$$r_4=\frac{2\{181743+34581\sqrt{3}\pm4\sqrt{2}(8181+16966\sqrt{3})\}}{552049}$$

近似値を計算すると，$r_4=\dfrac{2(181743-32724\sqrt{2}+34581\sqrt{3}-67864\sqrt{6})}{552049}$ （≒ 0.105527 ），

$r_4=\dfrac{2(181743+32724\sqrt{2}+34581\sqrt{3}+67864\sqrt{6})}{552049}$ （≒ 1,64532 ）

題意に適するのは，前者の方である。

よって，各円の半径は，

甲： $\dfrac{2(33-5\sqrt{3})}{169}$ ，乙： $\dfrac{2(75-23\sqrt{3})}{673}$ ，丙： $\dfrac{2(37275-12630\sqrt{2}+1185\sqrt{3}-4906\sqrt{6})}{279841}$ ，

丁： $\dfrac{2(181743-32724\sqrt{2}+34581\sqrt{3}-67864\sqrt{6})}{552049}$ 答

【参考文献】　特になし

（2023/11/4　数実研会員　札幌市　tokioka3@phoenix−c.or.jp）