△ABCと点Pの対称点でできる三角形

数実研会員　時岡郁夫

はじめに

点Pを直線ABに関して対称移動した点がQのとき，記号 Sym（$Symmetric$）を使って，Sym(P，AB) =Qと表すことにする。

△ABCと点Pについて，

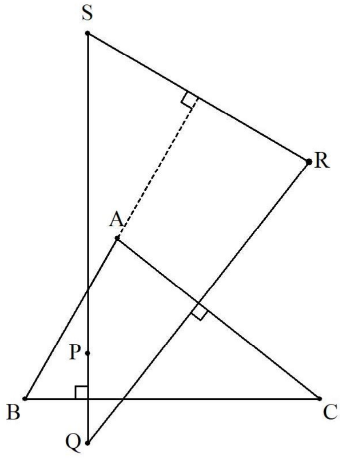
Sym(P，BC) =Q，

Sym(Q，CA) =R，

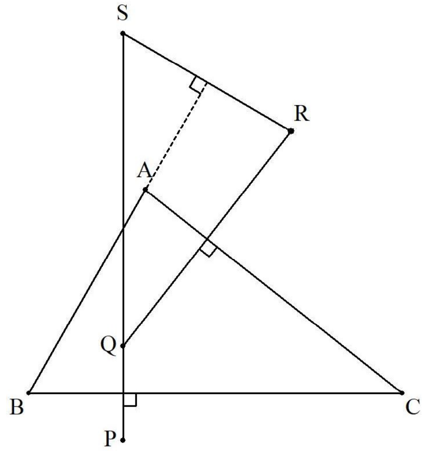
Sym(R，AB) =Sとする。

△RSQ∽△ABCのとき，（右図）

（点Pが三角形の内部）



（点Pが三角形の外部）



次の $\boxed{1}$～$\boxed{3}$ が証明できる。

$\boxed{1}$　P，Q，Sは同一直線上にある。

$\boxed{2}$　AR，BS，CQの中点をそれぞれT，U，Vとすると，△TUV∽△ABCである。

$\boxed{3}$　$\boxed{2}$ で，Tを中心，半径ATの円を C_1，Uを中心，半径BUの円を C_2，Vを中心，半径CVの円を C_3 とすると，3円 C_1，C_2，C_3 は1点で交わる。

補題を利用して，

$\boxed{4}$　点Pはどのような点か求めた。

応用として，次の問題 $\boxed{5}$～$\boxed{7}$ を考察した。

$\boxed{5}$　△ABCと点Pについて，Sym(P，BC) =Q，Sym(Q，CA) =R，Sym(R，AB) =S,
Sym(P，CA) =T，Sym(T，AB) =U，Sym(U，BC) =Vとする。
△RSQ∽△ABCかつ△TUV∽△ABCとなる点Pの位置を求めよ。

$\boxed{6}$　$\boxed{5}$ で，△ABCについて，BC= a，CA= b（$a>b$），∠BCA= 90° のとき，

(1)　P，Q，R，S，T，U，Vの位置を図示せよ。

(2)　△RSQ，△TUVの面積を求めよ。

$\boxed{7}$　△ABCと点Pについて，Sym(P，BC) =Q，Sym(Q，CA) =R，Sym(R，AB) =S,
Sym(P，CA) =T，Sym(T，AB) =U，Sym(U，BC) =V,
Sym(P，AB) =W，Sym(W，BC) =X，Sym(X，CA) =Yとする。

△RSQ∽△ABCとなる点Pの軌跡を l_1，

△TUV∽△ABCとなる点Pの軌跡を l_2，

△YWX∽△ABCとなる点Pの軌跡を l_3 とおき，

l_1，l_2 の交点を P_1，l_2，l_3 の交点を P_2，l_3，l_1 の交点を P_3 とする。

3点 P_1，P_2，P_3 が三角形の頂点となるとき，$\triangle P_1P_2P_3/\triangle ABC$ の値を求めよ。

ただし，BC= a，CA= b，AB= c，△ABC= S とする。

補題

直線 ℓ：$ax+by+c=0$ に関する点 $P(x_1,\ y_1)$ の対称点を $Q(x_2,\ y_2)$ とすると，

$$x_2=x_1-\frac{2a(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}\ ,\quad y_2=y_1-\frac{2b(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}$$ である。

証明　2点P，Qの中点$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$は，直線$\ell$上の点であるから，$a\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)+b\left(\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)+c=0$

$\therefore ax_2+by_2=-ax_1-by_1-2c$　…①

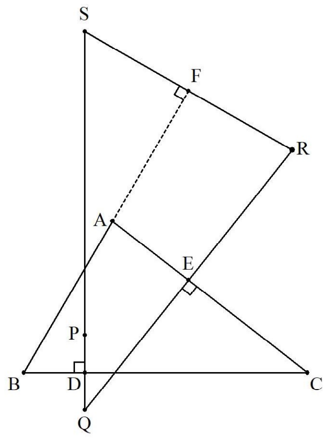
また，$\ell\perp$PQであるから，$b(x_2-x_1)-a(y_2-y_1)=0$　$\therefore bx_2-ay_2=bx_1-ay_1$　…②

①× a +②× b より，$(a^2+b^2)x_2=(b^2-a^2)x_1-2aby_1-2ac=(a^2+b^2)x_1-2a(ax_1+by_1+c)$

$\therefore x_2=x_1-\dfrac{2a(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}$

同様に，①× b −②× a より　$y_2=y_1-\dfrac{2b(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}$　終

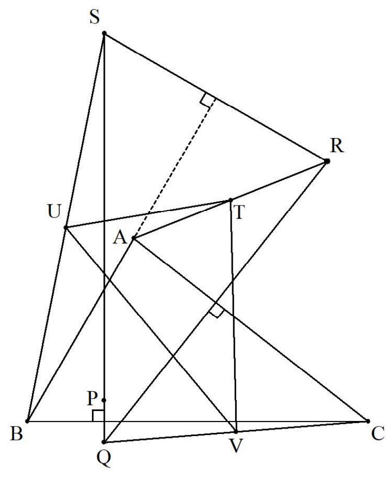
1　△ABCと点Pについて，*Sym*(P，BC)＝Q， *Sym*(Q，CA)＝R， *Sym*(R，AB)＝Sとする。
△RSQ∽△ABCのとき，P，Q，Sは同一直線上にあることを証明せよ。



証明　直線BCとPQの交点をD，直線CAとQRの交点をE，
直線ABとRSの交点をFとする。
△RSQ∽△ABCのとき，対応する角は等しい。
四角形AERFについて，∠AER＋∠RFA＝90°＋90°＝180° より，
円に内接するから，∠QRS＝∠CAB
これは点Pの位置によらない。
また，△RSQ∽△ABC のとき，∠RSQ＝∠ABCとなるから，
四角形BDFSは円に内接する。
よって，∠SFB＝∠SDB＝90°，∠PDB＝90° より，
3点S，P，Qは同一直線上にある。　終

補足
Aは△RSQの外心，Cは△PQRの外心，BはPQの垂直二等分線とRSの垂直二等分線の交点である。

2　△ABCと点Pについて，
Sym(P，BC)＝Q，
Sym(Q，CA)＝R，
Sym(R，AB)＝Sとし，
△RSQ∽△ABCとする。
AR，BS，CQの中点をそれぞれT，U，Vとすると，
△TUV∽△ABCを示せ。



解答　複素数平面で考える。
△ABCの内角をA，B，C（ラジアン）で表す。
A(α)，B(β)，C(γ)，R(α')，S(β')，Q(γ')とおくと，△RSQ∽△ABCのとき，対応する角は等しいから，

$\angle\text{BAC}=arg\,\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=arg\,\dfrac{\gamma'-\alpha'}{\beta'-\alpha'}$ より，

$\gamma-\alpha=(\beta-\alpha)(\cos A+i\sin A)$，$\gamma'-\alpha'=(\beta'-\alpha')(\cos A+i\sin A)$ である。

AR，BS，CQ の中点がそれぞれ T，U，V より，$T\left(\frac{\alpha+\alpha'}{2}\right)$，$U\left(\frac{\beta+\beta'}{2}\right)$，$V\left(\frac{\gamma+\gamma'}{2}\right)$ であるから，

$$\angle UTV = arg\,\frac{\frac{\gamma+\gamma'}{2}-\frac{\alpha+\alpha'}{2}}{\frac{\beta+\beta'}{2}-\frac{\alpha+\alpha'}{2}} = arg\,\frac{(\gamma-\alpha)+(\gamma'-\alpha')}{(\beta-\alpha)+(\beta'-\alpha')}$$

$$= arg\,\frac{(\beta-\alpha)(\cos A + i\sin A)+(\beta'-\alpha')(\cos A + i\sin A)}{(\beta-\alpha)+(\beta'-\alpha')} = arg(\cos A + i\sin A) = A$$

同様に，∠TUV＝B を示すことができるから，△TUV∽△ABC 終

3 △ABC と点 P について，*Sym* (P，BC) ＝Q，*Sym* (Q，CA) ＝R，*Sym* (R，AB) ＝S とし，△RSQ∽△ABC とする。AR，BS，CQ の中点をそれぞれ T，U，V とし，T を中心，半径 AT の円を C_1，U を中心，半径 BU の円を C_2，V を中心，半径 CV の円を C_3 とすると，3 円 C_1，C_2，C_3 は 1 点で交わる。

証明　3 円 C_1，C_2，C_3 の方程式をそれぞれ

$x^2+y^2+l_1x+m_1y+n_1=0$　…①，

$x^2+y^2+l_2x+m_2y+n_2=0$　…②，

$x^2+y^2+l_3x+m_3y+n_3=0$　…③

とする。

①と②は F を共有し，もう 1 つの共有点を N_1 とすると，

共通弦（根軸） FN_1 の方程式は，

$(l_1-l_2)x+(m_1-m_2)y+n_1-n_2=0$　…④

②と③は D を共有し，もう 1 つの共有点を N_2 とすると，

共通弦 DN_2 の方程式は，

$(l_2-l_3)x+(m_2-m_3)y+n_2-n_3=0$　…⑤

④と⑤の交点は 1 個だから，$N_2=N_1$ となる。

①と③は E を共有し，もう一つの共有点を N_3 とすると，

共通弦 EN_3 の方程式は，

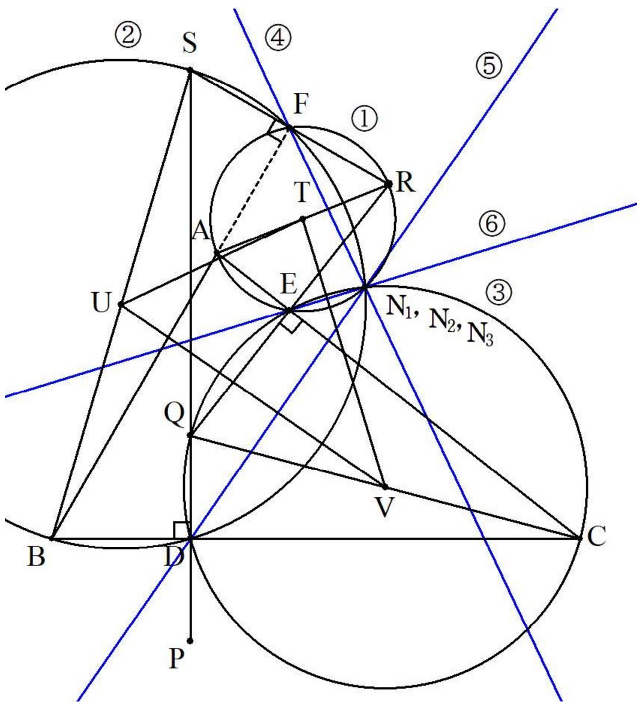
$(l_1-l_3)x+(m_1-m_3)y+n_1-n_3=0$　…⑥

④＋⑤を計算すると，⑥が得られる。

これは④と⑤の交点 N_1 が⑥上にあることを示している。

すなわち，$N_3=N_1$ となる。

よって，3 円 C_1，C_2，C_3 は 1 点 N_1 で交わる。 終



補足　3 円の根軸は 1 点で交わる。特に，2 円ずつ交わっているときは，3 円は 1 点で交わる。

4 △ABC と点 P について，*Sym* (P，BC) ＝Q，*Sym* (Q，CA) ＝R，*Sym* (R，AB) ＝S とする。
△RSQ∽△ABC のとき，点 P はどのような点か求めよ。

解答

直線 BC と PQ の交点を D，直線 CA と QR の交点を E，直線 AB と RS の交点を F とする。

△RSQ∽△ABC のとき，対応する角は等しい。

四角形 AERF について，∠AER＋∠RFA＝90°＋90°＝180° より，円に内接するから，∠QRS＝∠CAB

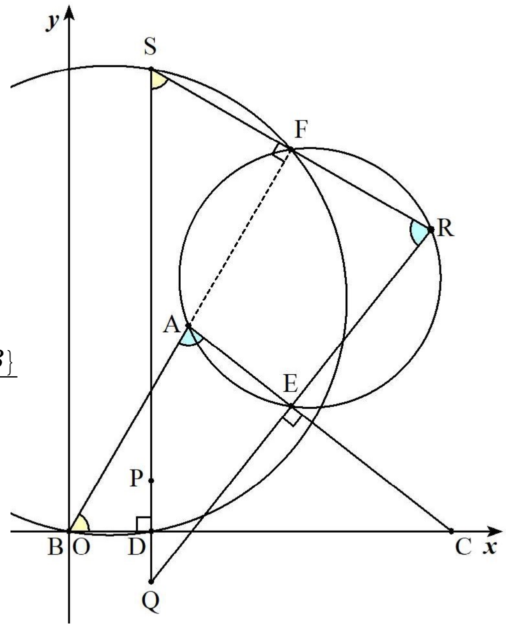
これは点 P の位置によらない。

また，△RSQ∽△ABC のとき，∠RSQ＝∠ABC となるから，四角形 BDFS は円に内接する。

∠SFB＝∠SDB＝90°，∠PDB＝90° より，3 点 S，P，Q は同一直線上にある。

ここから，A$(c\cos B,\ c\sin B)$，B$(0,\ 0)$，C$(a,\ 0)$ とおき，平面座標で考える。

P$(p,\ q)$ とおくと，Q$(p,\ -q)$ 。



直線 CA の方程式は，$y=\dfrac{-c\sin B}{a-c\cos B}(x-a)$ より，

$c\sin B\cdot x+(a-c\cos B)y-ca\sin B=0$

CA に関する点 Q の対称点は R より，R$(x_1,\ y_1)$ とおくと，補題から，

$$x_1=p-\frac{2c\sin B\{c\sin B\cdot p+(a-c\cos B)(-q)-ca\sin B\}}{(c\sin B)^2+(a-c\cos B)^2}$$

$$=p-\frac{2c\sin B\{cp\sin B-q(a-c\cos B)-ca\sin B\}}{b^2}\quad\cdots①$$

$$y_1=-q-\frac{2(a-c\cos B)\{c\sin B\cdot p+(a-c\cos B)(-q)-ca\sin B\}}{(c\sin B)^2+(a-c\cos B)^2}$$

$$=-q-\frac{2(a-c\cos B)\{cp\sin B-q(a-c\cos B)-ca\sin B\}}{b^2}$$

$\cdots②$

直線 BA の方程式は，$y=\dfrac{\sin B}{\cos B}x$ より，$\sin B\cdot x-\cos B\cdot y=0$

AB に関する点 S の対称点は R より，S$(p,\ y_2)$ とおくと，

$$x_1=p-\frac{2\sin B\{\sin B\cdot p-\cos B\cdot y_2\}}{(\sin B)^2+(\cos B)^2}=p-2\sin B(p\sin B-y_2\cos B)\quad\cdots③$$

$$y_1=y_2-\frac{2(-\cos B)\{\sin B\cdot p-\cos B\cdot y_2\}}{(\sin B)^2+(\cos B)^2}=y_2+2\cos B(p\sin B-y_2\cos B)$$

$$=(1-2\cos^2 B)y_2+2\sin B\cos B\cdot p\quad\cdots④$$

①，③より，$p-\dfrac{2c\sin B\{cp\sin B-q(a-c\cos B)-ca\sin B\}}{b^2}=p-2\sin B(p\sin B-y_2\cos B)$

$$\frac{c\{cp\sin B-q(a-c\cos B)-ca\sin B\}}{b^2}=p\sin B-y_2\cos B$$

$$y_2=\frac{(b^2-c^2)\sin B\cdot p+c(a-c\cos B)q+c^2a\sin B}{b^2\cos B}\quad\cdots⑤$$

②，④より，$-q-\dfrac{2(a-c\cos B)\{cp\sin B-q(a-c\cos B)-ca\sin B\}}{b^2}=(1-2\cos^2 B)y_2+2\sin B\cos B\cdot p$

これに⑤を代入すると，

$$-q-\frac{2(a-c\cos B)\{cp\sin B-q(a-c\cos B)-ca\sin B\}}{b^2}$$

$$=(1-2\cos^2 B)\cdot\frac{(b^2-c^2)\sin B\cdot p+c(a-c\cos B)q+c^2a\sin B}{b^2\cos B}+2\sin B\cos B\cdot p$$

両辺に $b^2\cos B$ を掛け，整理すると，

$$(b^2-c^2+2ca\cos B)p\sin B+\{ca-(2a^2-b^2+c^2)\cos B+2ca\cos^2 B\}q+ca(c-2a\cos B)\sin B=0$$

これに，$\sin B=\dfrac{2S}{ca}$，$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$ を代入して，q について解くと，$q=\dfrac{4S(a^2-b^2-ap)}{a(b^2+c^2-a^2)}$

これに，$b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$，$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ を代入すると，

$$q=\frac{4\cdot\frac{1}{2}bc\sin A\cdot(a^2-b^2-ap)}{a\cdot 2bc\cos A}=\tan A\left(\frac{a^2-b^2}{a}-p\right)$$

点 P$(p,\ q)$ は直線 $y=\tan A\left(\dfrac{a^2-b^2}{a}-x\right)$ …⑥上の点である。

⑥とAB，BCとの交点をそれぞれ I，J とする。（右図）

直線⑥の傾きが $-\tan A$ より，

∠BJI＝A であるから，△JBI∽△ABC となり，

$\mathrm{BJ}=\dfrac{a^2-b^2}{a}$ であるから，$\mathrm{IB}=\dfrac{a}{c}\mathrm{BJ}=\dfrac{a^2-b^2}{c}$

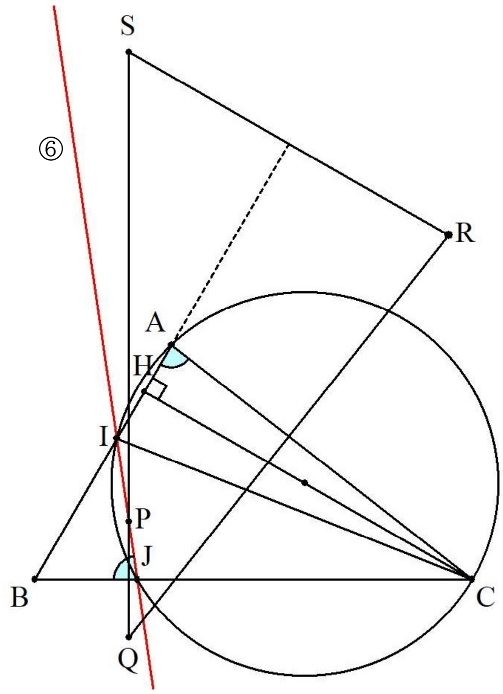
$\mathrm{AI}:\mathrm{IB}=\left(c-\dfrac{a^2-b^2}{c}\right):\dfrac{a^2-b^2}{c}=(b^2+c^2-a^2):(a^2-b^2)$

$\mathrm{BJ}:\mathrm{JC}=\dfrac{a^2-b^2}{a}:\left(a-\dfrac{a^2-b^2}{a}\right)=(a^2-b^2):b^2$

よって，AB を $(b^2+c^2-a^2):(a^2-b^2)$ に内分する点を I，

BC を $(a^2-b^2):b^2$ に内分する点を J とすると，

点 P は直線 IJ 上にある。 答



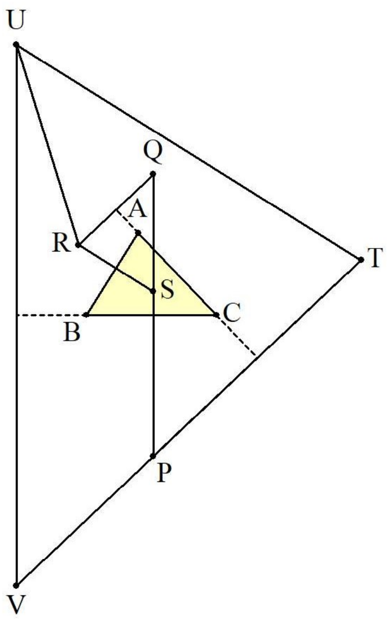
補足　直線 IJ の作図の方法

C から AB に下した垂線の足を H とすると，$\mathrm{IB}=\dfrac{a^2-b^2}{c}$ より，$\mathrm{AI}=c-\dfrac{a^2-b^2}{c}=2b\cos A=2\,\mathrm{AH}$ である。

四角形 AIJC について，∠CAI＝∠BJI より円に内接するから，

C から AB に下した垂線の足を H，AB 上に点 I を AI＝2 AH となるようにとり，△AIC の外接円と BC との交点を J とすると，点 P は直線 IJ 上にある。

$\boxed{5}$ △ABC と点 P について，*Sym* (P，BC) ＝Q，*Sym* (Q，CA) ＝R，*Sym* (R，AB) ＝S，*Sym* (P，CA) ＝T，*Sym* (T，AB) ＝U，*Sym* (U，BC) ＝V とする。
△RSQ∽△ABC かつ△TUV∽△ABC となる点 P の位置を求めよ。



解答　$\boxed{4}$ と同様に，A$(c\cos B,\ c\sin B)$，B$(0,\ 0)$，C$(a,\ 0)$，P$(p,\ q)$ とおき，平面座標で考える。

△RSQ∽△ABC のとき，

点 P$(p,\ q)$ は直線 $y=\tan A\left(\dfrac{a^2-b^2}{a}-x\right)=\dfrac{4S}{b^2+c^2-a^2}\left(\dfrac{a^2-b^2}{a}-x\right)$ …⑥上の点である。

⑥とAB，BCとの交点をそれぞれI，Jとすると，

AI：IB$=2b\cos A:(c-2b\cos A)=(b^2+c^2-a^2):(a^2-b^2)$，BJ：JC$=(a^2-b^2):b^2$ である。

同様に，△TUV∽△ABCのとき，AB上に点K，CA上に点Lをとり，直線KL上に点Pが存在するとき，BK：KC$=(c^2+a^2-b^2):(b^2-c^2)$，CL：LA$=(b^2-c^2):c^2$ であるから，

$$\mathrm{K}\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{a},\ 0\right),\ \mathrm{L}\left(\frac{a^2(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2}{2ab^2},\ \frac{2(b^2-c^2)S}{ab^2}\right)$$

直線KL：$$y=\frac{\dfrac{2(b^2-c^2)S}{ab^2}}{\dfrac{a^2(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2}{2ab^2}-\dfrac{c^2+a^2-b^2}{a}}\left(x-\frac{c^2+a^2-b^2}{a}\right)$$

$$\therefore y=\frac{4S}{b^2+c^2-a^2}\left(x-\frac{c^2+a^2-b^2}{a}\right)\quad\cdots⑦$$

よって，⑥と⑦の交点が求める点である。

$$\therefore \mathrm{P}\left(\frac{2a^2-2b^2+c^2}{2a},\ -\frac{2c^2S}{a(b^2+c^2-a^2)}\right)$$ 答

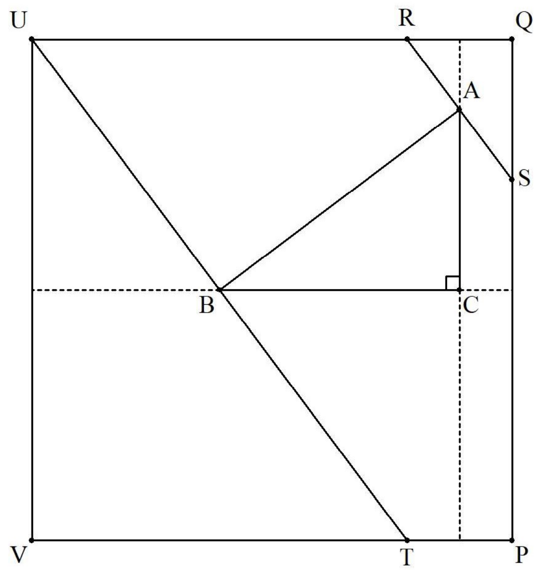
補足　⑦は，$y=\tan A(x-2c\cos B)$　…⑦'と変形できる。

6　5で，△ABCについて，BC$=a$，CA$=b$（$a>b$），∠BCA$=90°$のとき，

(1)　P，Q，R，S，T，U，Vの位置を図示せよ。

(2)　△RSQ，△TUVの面積を求めよ。

解答　(1)　右図の通り。



(2)　4より，$\mathrm{P}\left(\dfrac{2a^2-2b^2+c^2}{2a},\ -\dfrac{2c^2S}{a(b^2+c^2-a^2)}\right)$

$c^2=a^2+b^2$，$S=\dfrac{1}{2}ab$ であるから，

$\mathrm{P}\left(\dfrac{3a^2-b^2}{2a},\ -\dfrac{a^2+b^2}{2b}\right)$

QはBC（x軸）に関して，点Pの対称点であるから，

$\therefore \mathrm{Q}\left(\dfrac{3a^2-b^2}{2a},\ \dfrac{a^2+b^2}{2b}\right)$

Rは直線AC：$x=a$ に関して点Qの対称点であるから，

$\mathrm{R}\left(\dfrac{a^2+b^2}{2a},\ \dfrac{a^2+b^2}{2b}\right)$

よって，QR$=\dfrac{3a^2-b^2}{2a}-\dfrac{a^2+b^2}{2a}=\dfrac{a^2-b^2}{a}=b\cdot\dfrac{a^2-b^2}{ab}$

△ABC∽△RSQで，相似比が$1:\dfrac{a^2-b^2}{ab}$ であるから，面積比は，$1:\left(\dfrac{a^2-b^2}{ab}\right)^2$

よって，△RSQ$=\left(\dfrac{a^2-b^2}{ab}\right)^2$△ABC$=\left(\dfrac{a^2-b^2}{ab}\right)^2\cdot\dfrac{1}{2}ab=\dfrac{(a^2-b^2)^2}{2ab}$　答

Tは直線AC：$x=a$ に関して点Pの対称点であるから，$\mathrm{T}\left(\dfrac{a^2+b^2}{2a},\ -\dfrac{a^2+b^2}{2b}\right)$

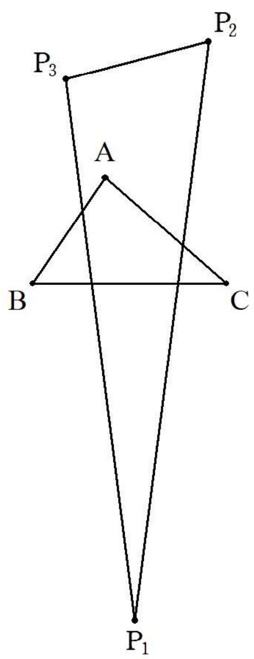
Uは点B（原点）に関する点Tの対称点であるから，$\mathrm{U}\left(-\dfrac{a^2+b^2}{2a},\ \dfrac{a^2+b^2}{2b}\right)$

よって，TU$=\sqrt{\left(-\dfrac{a^2+b^2}{a}\right)^2+\left(\dfrac{a^2+b^2}{b}\right)^2}=\dfrac{a^2+b^2}{ab}=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\dfrac{a^2+b^2}{ab}=\mathrm{AB}\cdot\dfrac{a^2+b^2}{ab}$

$\triangle$ABC$\backsim\triangle$TUVで相似比が$1:\dfrac{a^2+b^2}{ab}$であるから，面積比は，$1:\left(\dfrac{a^2+b^2}{ab}\right)^2$

よって，$\triangle\mathrm{TUV}=\left(\dfrac{a^2+b^2}{ab}\right)^2\triangle\mathrm{ABC}=\left(\dfrac{a^2+b^2}{ab}\right)^2\cdot\dfrac{1}{2}ab=\dfrac{(a^2+b^2)^2}{2ab}$ 答

$\boxed{7}$ $\triangle$ABCと点Pについて，
Sym(P，BC)＝Q，*Sym*(Q，CA)＝R，*Sym*(R，AB)＝S,
Sym(P，CA)＝T，*Sym*(T，AB)＝U，*Sym*(U，BC)＝V,
Sym(P，AB)＝W，*Sym*(W，BC)＝X，*Sym*(X，CA)＝Yとする。
$\triangle$RSQ$\backsim\triangle$ABCとなる点Pの軌跡をl_1，
$\triangle$TUV$\backsim\triangle$ABCとなる点Pの軌跡をl_2，
$\triangle$YWX$\backsim\triangle$ABCとなる点Pの軌跡をl_3とおき，
l_1，l_2の交点をP_1,
l_2，l_3の交点をP_2,
l_3，l_1の交点をP_3とする。
3点P_1，P_2，P_3が三角形の頂点となるとき，$\triangle\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3/\triangle$ABCの値を求めよ。
ただし，BC$=a$，CA$=b$，AB$=c$，$\triangle$ABC$=S$とする。



解答

$\boxed{1}$より，$\triangle$RSQ$\backsim\triangle$ABCとなる点は，直線$y=-\dfrac{4S(ax-a^2+b^2)}{a(b^2+c^2-a^2)}$ $\cdots\ell_1$上の点である。

$\boxed{4}$より，$\triangle$TUV$\backsim\triangle$ABCとなる点は，直線$y=\dfrac{4S(ax-c^2-a^2+b^2)}{a(b^2+c^2-a^2)}$ $\cdots\ell_2$上の点である。

$\triangle$YWX$\backsim\triangle$ABCとなる点は，CA上に点Mを，AB上に点Nをとり，直線MN上に点Pが存在するとき，
CM：MA$=(a^2+b^2-c^2):(c^2-a^2)$，AN：NB$=(c^2-a^2):a^2$である。

$\mathrm{A}\left(\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2a},\ \dfrac{2S}{a}\right)$，B$(0,\ 0)$，C$(a,\ 0)$より，

$\mathrm{M}\left(\dfrac{-a^4-b^4-c^4+2b^2c^2+2c^2a^2}{2ab^2},\ \dfrac{2(a^2+b^2-c^2)S}{ab^2}\right)$，$\mathrm{N}\left(\dfrac{a(c^2+a^2-b^2)}{2c^2},\ \dfrac{2aS}{c^2}\right)$より，

直線MNの方程式は，$y=\dfrac{4S\{(b^2-c^2)x+a^3\}}{a^2(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2}$ $\cdots\ell_3$

2直線ℓ_1，ℓ_2の交点は，$\boxed{4}$より，$\mathrm{P}_1\left(\dfrac{2a^2-2b^2+c^2}{2a},\ -\dfrac{2c^2S}{a(b^2+c^2-a^2)}\right)$である。

2直線ℓ_2，ℓ_3の交点を$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$とおくと，

$$x_2=-\frac{a^6-b^6+c^6-2a^2b^2c^2-2a^4b^2+2a^2b^4+3b^4c^2-3b^2c^4-2c^2a^4}{2ab^2(c^2+a^2-b^2)},\quad y_2=\frac{2S\{a^4+a^2(b^2-c^2)-(b^2-c^2)^2\}}{ab^2(c^2+a^2-b^2)}$$

2直線ℓ_3，ℓ_1の交点を$\mathrm{P}_3(x_3,\ y_3)$とおくと，

$$x_3=\frac{a^6+b^6+a^2b^2c^2-2a^2b^4-2b^4c^2+b^2c^4-c^4a^2}{ac^2(a^2+b^2-c^2)},\quad y_3=\frac{2S\{a^4+(a^2-b^2)(b^2-c^2)\}}{ac^2(a^2+b^2-c^2)}$$

$\triangle P_1P_2P_3$ を P_1 が原点になるように平行移動したとき，$P_2 \to P_2'(x_2',\ y_2')$，$P_3 \to P_3'(x_3',\ y_3')$ になったとする。

便宜的に，$a^6+b^6+c^6+a^2b^2c^2-2a^2b^4-2b^2c^4-2c^2a^4=u$，$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}=v$ とおくと，

$$x_2'=-\frac{a^6-b^6+c^6-2a^2b^2c^2-2a^4b^2+2a^2b^4+3b^4c^2-3b^2c^4-2c^2a^4}{2ab^2(c^2+a^2-b^2)}-\frac{2a^2-2b^2+c^2}{2a}$$

$$=-\frac{a^6+b^6+c^6+a^2b^2c^2-2a^2b^4-2b^2c^4-2c^2a^4}{2ab^2(c^2+a^2-b^2)}=-\frac{u}{2ab^2\cdot 2(v-b^2)},$$

$$y_2'=\frac{2S\{a^4+a^2(b^2-c^2)-(b^2-c^2)^2\}}{ab^2(c^2+a^2-b^2)}+\frac{2c^2S}{a(b^2+c^2-a^2)}$$

$$=-\frac{2S(a^6+b^6+c^6+a^2b^2c^2-2a^2b^4-2b^2c^4-2c^2a^4)}{ab^2(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}=-\frac{2Su}{ab^2\cdot 2(v-a^2)\cdot 2(v-b^2)},$$

$$x_3'=\frac{a^6+b^6+a^2b^2c^2-2a^2b^4-2b^4c^2+b^2c^4-c^4a^2}{ac^2(a^2+b^2-c^2)}-\frac{2a^2-2b^2+c^2}{2a}$$

$$=\frac{a^6+b^6+c^6+a^2b^2c^2-2a^2b^4-2b^2c^4-2c^2a^4}{2ac^2(a^2+b^2-c^2)}=\frac{u}{2ac^2\cdot 2(v-c^2)}$$

$$y_3'=\frac{2S\{a^4+(a^2-b^2)(b^2-c^2)\}}{ac^2(a^2+b^2-c^2)}+\frac{2c^2S}{a(b^2+c^2-a^2)}=-\frac{2S(a^6+b^6+c^6+a^2b^2c^2-2a^2b^4-2b^2c^4-2c^2a^4)}{ac^2(b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2)}$$

$$=-\frac{2Su}{ac^2\cdot 2(v-a^2)\cdot 2(v-c^2)}$$

従って，3 点 P_1，P_2，P_3 が三角形の頂点となるのは，$b^2+c^2-a^2\neq 0$，$c^2+a^2-b^2\neq 0$，$a^2+b^2-c^2\neq 0$ のとき，即ち，$\triangle ABC$ が直角三角形でないときである。このとき，

$$\triangle P_1P_2P_3=\frac{1}{2}\left|\,\begin{vmatrix} x_2' & y_2' \\ x_3' & y_3' \end{vmatrix}\,\right|=\frac{1}{2}\left|\,\begin{vmatrix} -\dfrac{u}{4ab^2(v-b^2)} & -\dfrac{Su}{2ab^2(v-a^2)(v-b^2)} \\ \dfrac{u}{4ac^2(v-c^2)} & -\dfrac{Su}{2ac^2(v-a^2)(v-c^2)} \end{vmatrix}\,\right|$$

$$=\frac{Su^2}{8a^2b^2c^2|(v-a^2)(v-b^2)(v-c^2)|}=\frac{(a^6+b^6+c^6+a^2b^2c^2-2a^2b^4-2b^2c^4-2c^2a^4)^2}{a^2b^2c^2|(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)|}S$$

よって，$\triangle P_1P_2P_3/\triangle ABC=\dfrac{(a^6+b^6+c^6+a^2b^2c^2-2a^2b^4-2b^2c^4-2c^2a^4)^2}{a^2b^2c^2|(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)|}$　答

例　$a=6$，$b=5$，$c=4$ のとき（7 ページの図である），$\triangle P_1P_2P_3/\triangle ABC=\dfrac{18769}{4800}$（$\fallingdotseq 3.91$）

8 終わりに

平面における直線に関する点の対称点を求める問題は高校の数学Ⅱで習う。補題の公式は教科書に載っていないが，授業では指導した覚えがある。この公式を利用した問題を試行錯誤で考えてみた結果が，今回のレポートである。

なお，補題の証明は，ベクトルを利用する方法もある。ベクトルを利用すると，空間における平面に関する点の対称点も容易に求められる。その公式は平面の場合と似ていて覚えやすい。

補足

平面 α ：$ax+by+cz+d=0$ に関して，点 $P(x_1,\ y_1,\ z_1)$ と対称な点を $Q(x_2,\ y_2,\ z_2)$ とすると，

(1) $x_2=x_1-\dfrac{2a(ax_1+by_1+cz_1+d)}{a^2+b^2+c^2}$，$y_2=y_1-\dfrac{2b(ax_1+by_1+cz_1+d)}{a^2+b^2+c^2}$，$z_2=z_1-\dfrac{2c(ax_1+by_1+cz_1+d)}{a^2+b^2+c^2}$

である。

(2) 点 P と平面 α の距離を h とすると，$h=\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ である。

証明

(1)　2点P，Qの中点$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2},\ \dfrac{x_3+y_3}{2}\right)$は，平面$\alpha$上の点であるから，

$$a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+b\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)+c\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)+d=0 \quad \cdots ①$$

直線PQの方向ベクトル$(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$と平面$\alpha$の法線ベクトル$(a,\ b,\ c)$は平行だから，

$(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)=k(a,\ b,\ c)$となる$k$が存在する。$x_2=x_1+ak$，$y_2=y_1+bk$，$z_2=z_1+ck$　…②

②を①に代入すると，$a\left(\dfrac{2x_1+ak}{2}\right)+b\left(\dfrac{2y_1+bk}{2}\right)+c\left(\dfrac{2z_1+ck}{2}\right)+d=0 \quad \therefore k=-\dfrac{2(ax_1+by_1+cz_1+d)}{a^2+b^2+c^2}$

これを②に代入すると，

$$x_2=x_1-\frac{2a(ax_1+by_1+cz_1+d)}{a^2+b^2+c^2},\quad y_2=y_1-\frac{2b(ax_1+by_1+cz_1+d)}{a^2+b^2+c^2},\quad z_2=z_1-\frac{2c(ax_1+by_1+cz_1+d)}{a^2+b^2+c^2}$$ 終

(2)　$h=\dfrac{1}{2}PQ=\dfrac{1}{2}\sqrt{(ak)^2+(bk)^2+(ck)^2}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}\left|-\dfrac{2(ax_1+by_1+cz_1+d)}{a^2+b^2+c^2}\right|$

$$=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$ 終

【参考文献】　特になし

（2024/6/5　札幌市　tokioka@i4.gmobb.jp）