正三角形の辺や円弧によって囲まれる図形内の円の半径について

時岡郁夫

数実研第 127 回の「正三角形の辺や円弧によって囲まれる図形内の 4 円の半径について」のシリーズ，第 2 弾，第 3 弾，第 4 弾である。

A，B，C は 1 辺の長さが 1 の正三角形の頂点で，弧 BC，弧 CA，弧 AB は半径 1 の円弧である。

正三角形の辺あるいは円弧によって囲まれる次の$\boxed{1}$から$\boxed{9}$の図形について考える。

これらの図形内に，

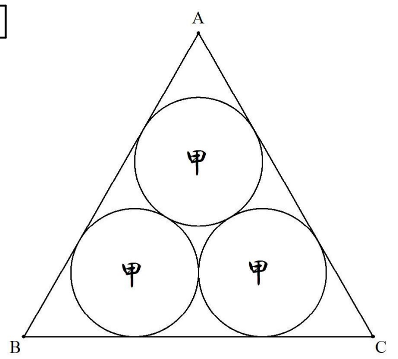
（第 2 弾） 3 個の円を内接させる。（第 3 弾） 4 個の等円を内接させる。（第 4 弾） 6 個の等円を内接させる。ただし，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$は 3 個の乙円も内接させた。

但し，これらの円はすべて A から BC に下した垂線に関して対称な配置である。

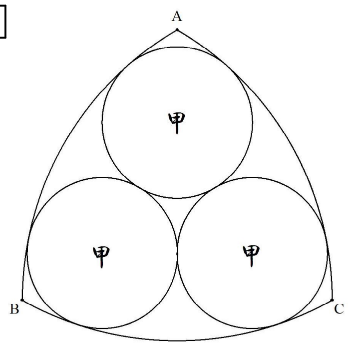
9 通りの図形に 3 パターンの円を内接させ，各円の半径を求めてみた。

（第 2 弾）正三角形の辺や円弧によって囲まれる図形内の 3 円の半径について

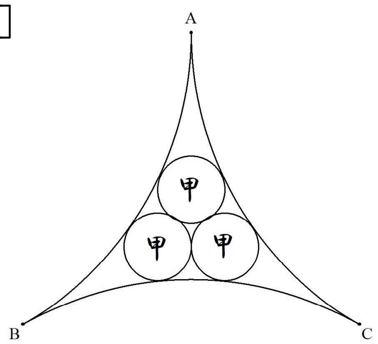
$\boxed{1}$



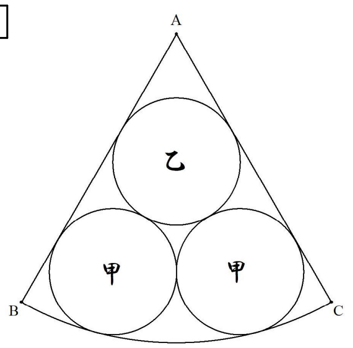
$\boxed{2}$



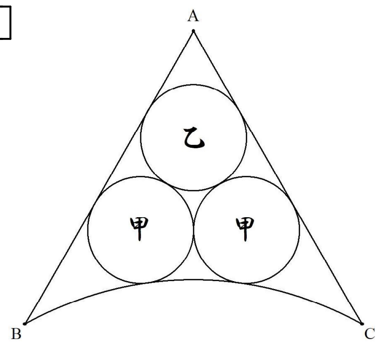
$\boxed{3}$



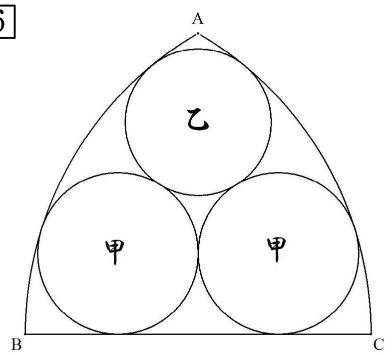
$\boxed{4}$



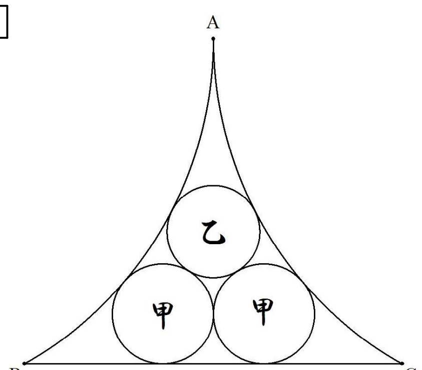
$\boxed{5}$



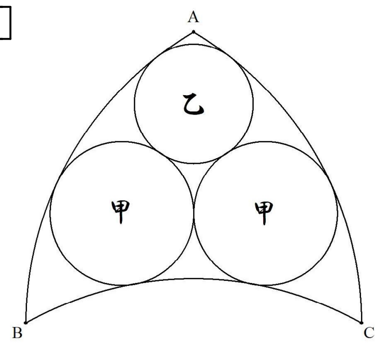
$\boxed{6}$



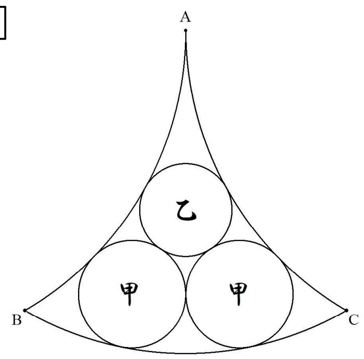
$\boxed{7}$



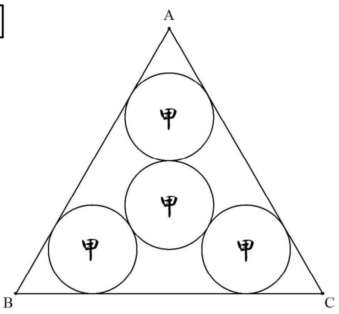
$\boxed{8}$

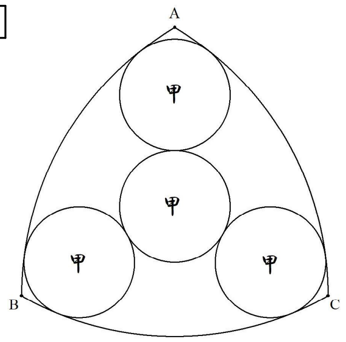


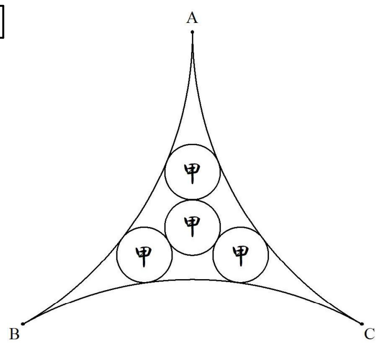
$\boxed{9}$

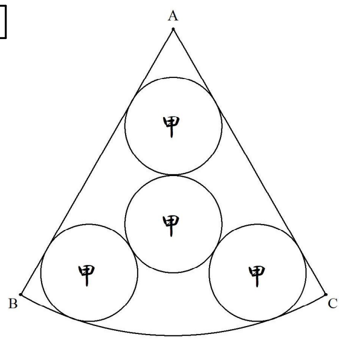


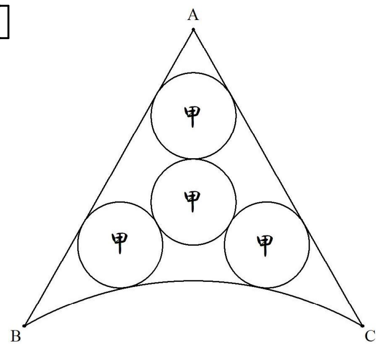
（第 3 弾）正三角形の辺や円弧によって囲まれる図形内の 4 個の甲円の半径

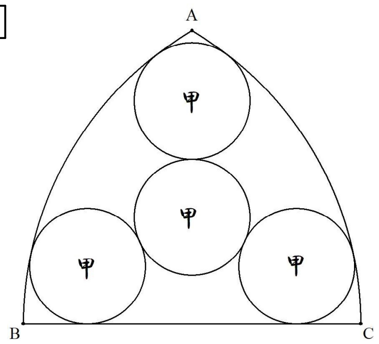
1


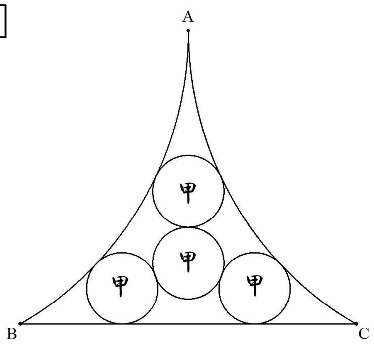
2


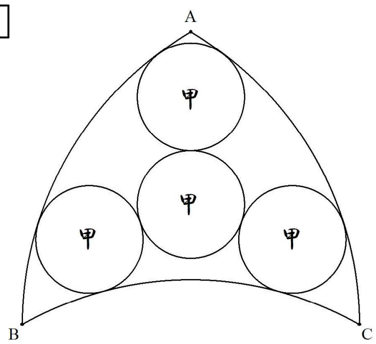
3


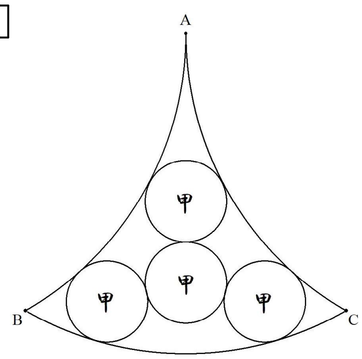
4


5


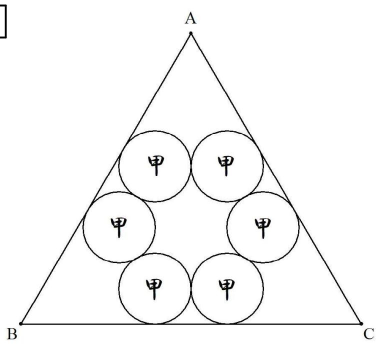
6


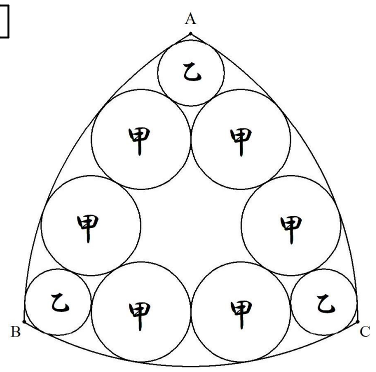
7


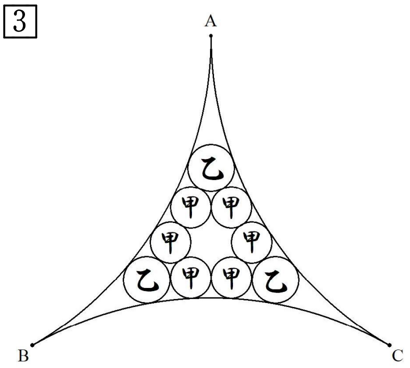
8


9


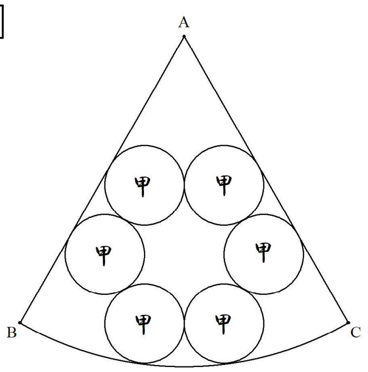
（第 4 弾）正三角形の辺や円弧によって囲まれる図形内の 6 個の甲円の半径

1


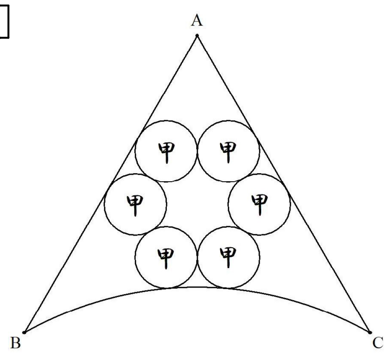
2


3


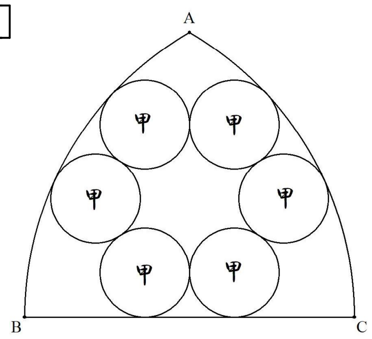
$\boxed{4}$



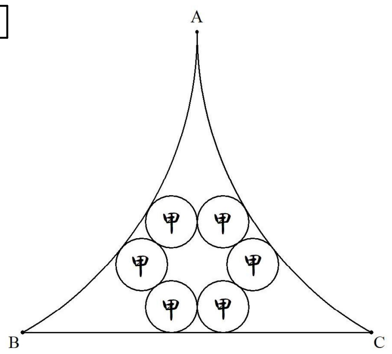
$\boxed{5}$



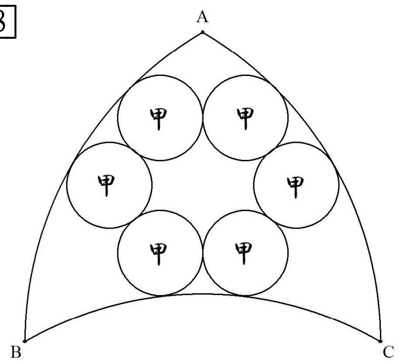
$\boxed{6}$



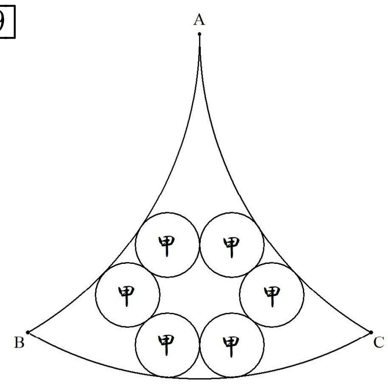
$\boxed{7}$



$\boxed{8}$



$\boxed{9}$



答

（第 2 弾）

$\boxed{1}$ 甲： $\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$

$\boxed{2}$ 甲： $-4+3\sqrt{2}$

$\boxed{3}$ 甲：$5-2\sqrt{6}$

$\boxed{4}$ 甲： $-7-5\sqrt{2}+4\sqrt{3}+3\sqrt{6}$ ，乙： $-7-5\sqrt{2}+4\sqrt{3}+3\sqrt{6}$

$\boxed{5}$ 甲： $4-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}$ ，乙： $4-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}$

$\boxed{6}$ 甲： $\dfrac{-3+2\sqrt{3}}{2}$ ，乙： $\dfrac{3(6-9\sqrt{2}-3\sqrt{3}+5\sqrt{6})}{16}$

$\boxed{7}$ 甲： $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$ ，乙： $\dfrac{2(-1-14\sqrt{2}+10\sqrt{3}+2\sqrt{6})}{23}$

$\boxed{8}$ 甲： $\dfrac{-2+3\sqrt{6}}{25}$ ，乙： $\dfrac{3(310+156\sqrt{2}-172\sqrt{3}-51\sqrt{6})}{1837}$

$\boxed{9}$ 甲： $\dfrac{1}{6}$ ，乙： $14-8\sqrt{3}$

（第 3 弾）

$\boxed{1}$ 甲：$\dfrac{\sqrt{3}}{12}$

$\boxed{2}$ 甲： $\dfrac{-3-\sqrt{3}+\sqrt{6(5+\sqrt{3})}}{9}$

$\boxed{3}$　甲：$\dfrac{3+2\sqrt{3}-2\sqrt{3(1+\sqrt{3})}}{9}$

$\boxed{4}$　甲：$\dfrac{-1+2\sqrt{7}}{27}$

$\boxed{5}$　甲：$\dfrac{1+5\sqrt{3}-\sqrt{22+10\sqrt{3}}}{27}$

$\boxed{6}$　甲円の半径を r とおくと，$72r^5+141r^4-100r^3-2r^2+20r-3=0$ の解（ $r≒0.171543$ ）

$\boxed{7}$　甲円の半径を r とおくと，$36r^5-3(226-105\sqrt{3})r^4+4(-188+111\sqrt{3})r^3-2(178-101\sqrt{3})r^2$ $+4(-17+11\sqrt{3})r-3(2-\sqrt{3})=0$ の解（ $r≒0.105759$ ）

$\boxed{8}$　甲円の半径を r とおくと，$4-40r+20r^2+740r^3-1367r^4-4088r^5+9896r^6+7936r^7-20198r^8$ $-14064r^9+9396r^{10}+18252r^{11}+13689r^{12}=0$ の解（ $r≒0.159383$ ）

$\boxed{9}$　甲円の半径を r とおくと，$1-4r-34r^2+4r^3+169r^4+120r^5+144r^6=0$ の解（ $r≒0.127031$ ）

（第 4 弾）

$\boxed{1}$　甲：$\dfrac{3-\sqrt{3}}{12}$

$\boxed{2}$　甲：$\dfrac{-2+\sqrt{6}}{3}$，乙：$\dfrac{3(358+228\sqrt{2}-236\sqrt{3}-93\sqrt{6})}{1315}$

$\boxed{3}$　甲：$\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3}$，乙：$\dfrac{-17+15\sqrt{2}+14\sqrt{3}-11\sqrt{6}}{23}$

$\boxed{4}$　甲：$\dfrac{-31+12\sqrt{3}+2\sqrt{4448-1773\sqrt{3}}}{529}$

$\boxed{5}$　甲：$\dfrac{238-58\sqrt{3}-\sqrt{2(16969-7456\sqrt{3})}}{529}$

$\boxed{6}$　甲円の半径を r とおくと，$16r^8+1824r^7+1944r^6-1320r^5-999r^4+780r^3+222r^2-108r+9$ $=0$ の解（ $r≒0.135438$ ）

$\boxed{7}$　甲円の半径を r とおくと，$9-12(5+2\sqrt{3})r-2(193-16\sqrt{3})r^2+212(-3+4\sqrt{3})r^3+3(1091$ $-160\sqrt{3})r^4-8(252+411\sqrt{3})r^5+8(437+256\sqrt{3})r^6-32(66+\sqrt{3})r^7+16r^8=0$ の解
（ $r≒0.0745096$ ）

$\boxed{8}$　甲円の半径を r とおくと，$4-48r+44r^2+760r^3-183r^4-6288r^5-3532r^6+28704r^7+19786r^8$ $+67776r^9-29640r^{10}+97256r^{11}+70225r^{12}=0$ の解（ $r≒0.119411$ ）

$\boxed{9}$　甲円の半径を r とおくと，$1-8r-38r^2+76r^3+265r^4-572r^5+292r^6=0$ の解
（ $r≒0.0933617$ ）

※ 第 3 弾と第 4 弾の$\boxed{6}$～$\boxed{9}$の場合は，等円の半径は代数的に求められないことが分かった。

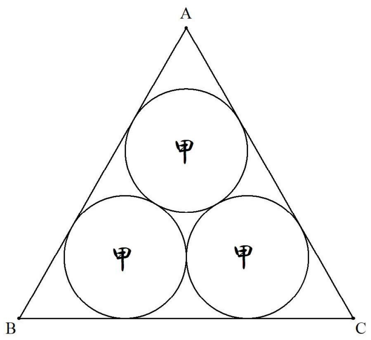
【参考文献】　特になし

2024/6/5　札幌市　tokioka@i4.gmobb.jp（メールアドレス変更）

◆次のページから解答編

正三角形の辺や円弧によって囲まれる図形内の３円の半径について

1 １辺の長さが１の正三角形 ABC の中に
互いに接する甲円３個を内接させる。
甲円の半径を求めよ。

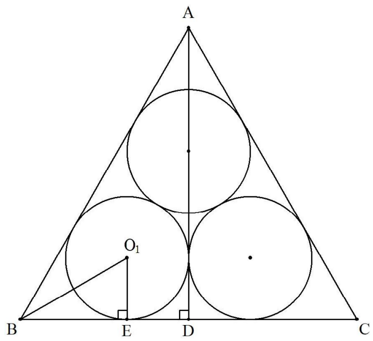


解答　左下の甲円を $O_1\,(r_1)$ とおき，図のように記号を付ける。

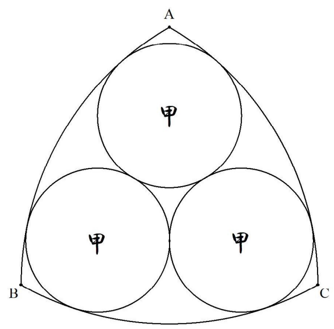
円 O_1 は△ABD の内接円であるから，$2r_1 = \mathrm{BD}+\mathrm{DA}-\mathrm{AB}$

$$\therefore r_1 = \frac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}\quad (\fallingdotseq 0.183013)$$

よって，甲円の半径は，$\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$　答



2 A，B，C は１辺の長さが１の正三角形の頂点で，
弧 BC，弧 CA，弧 AB は半径１の円弧である。
弧 BC，弧 CA，弧 AB で囲まれた図形の中に
互いに接する甲円３個を内接させる。
甲円の半径を求めよ。



解答　左下側の甲円を $O_1\,(r_1)$ とおき，図のように記号を付ける。

△ABD について，AB＝１，∠ABD＝60° より，$\mathrm{AD} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

△$\mathrm{AO_1F}$ について，$\mathrm{AO_1} = 1-r_1$，$\mathrm{O_1F} = r_1$ であるから，

三平方の定理により，$\mathrm{AF} = \sqrt{(1-r_1)^2 - r_1{}^2} = \sqrt{1-2r_1}$

△$\mathrm{O_1EC}$ について，

$\mathrm{O_1E} = \mathrm{AD}-\mathrm{AF} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{1-2r_1}$，$\mathrm{EC} = r_1 + \dfrac{1}{2}$，$\mathrm{CO_1} = 1-r_1$

であるから，

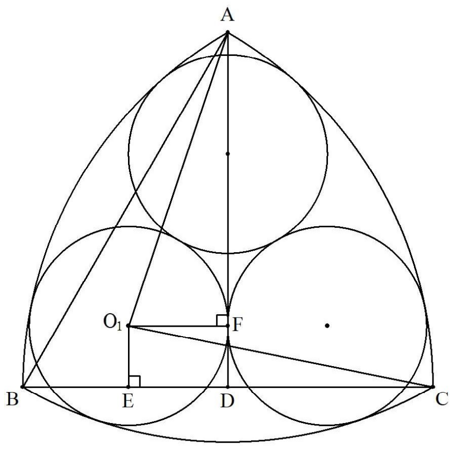
三平方の定理により，$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{1-2r_1}\right)^2 + \left(r_1 + \dfrac{1}{2}\right)^2 = (1-r_1)^2$

展開して移項すると，$1+r_1 = \sqrt{3}\sqrt{1-2r_1}$

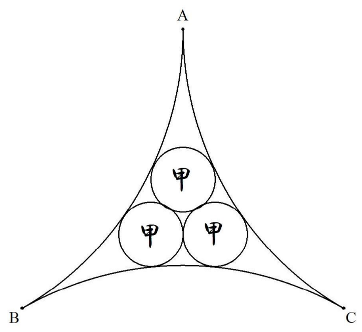
両辺を２乗して整理すると，$r_1{}^2 + 8r_1 - 2 = 0$　　$r_1 = -4 \pm 4\sqrt{2}$

$r_1 > 0$ より，$r_1 = -4+3\sqrt{2}$　$(\fallingdotseq 0.242641)$

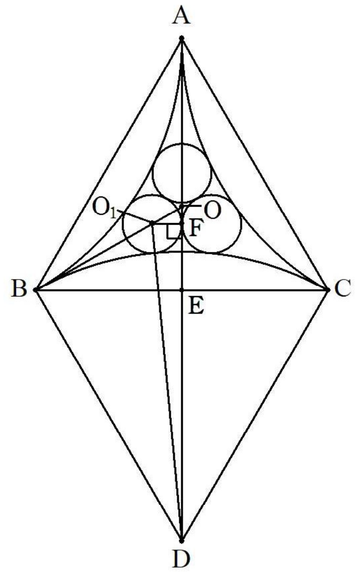
よって，甲円の半径は，$-4+3\sqrt{2}$　答



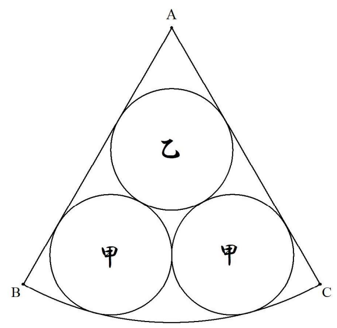
3 A，B，Cは1辺の長さが1の正三角形の頂点で，
弧BC，弧CA，弧ABは半径1の円弧である。
弧BC，弧CA，弧ABで囲まれた図形の中に
互いに接する甲円3個を内接させる。
甲円の半径を求めよ。



解答　甲円の半径をrとおき，図のように記号を付ける。
ただし，△DCBは正三角形で，Oは△ABCの内心である。
$\triangle O_1DF$について，$O_1D=1+r$，O1F$=r$であるから，
三平方の定理により，$FD=\sqrt{(1+r)^2-r^2}=\sqrt{1+2r}$
また，$OF=\dfrac{r}{\sqrt{3}}$，$OE=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$，$ED=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから，
OE−OF=FD−EDより，$\dfrac{1}{2\sqrt{3}}-\dfrac{r}{\sqrt{3}}=\sqrt{1+2r}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
整理すると，$2-r=\sqrt{3}\sqrt{1+2r}$
両辺を2乗すると，$r^2-10r+1=0$　$\therefore r=5\pm2\sqrt{6}$
$r<\dfrac{1}{2}$ より，$r=5-2\sqrt{6}$　（≒0.101021）
よって，甲円の半径は，$5-2\sqrt{6}$　答



4 A，B，Cは1辺の長さが1の正三角形の頂点で，
弧BCは半径1の円弧である。
弧BC，CA，ABで囲まれた図形の中に互いに
互いに接する甲円2個と乙円1弧を内接させる。
甲円，乙円の半径をそれぞれ求めよ。



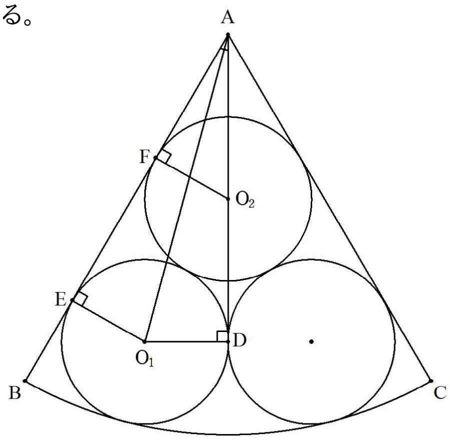
解答　左側の甲円を$O_1(r_1)$，乙円を$O_2(r_2)$とおき，図のように記号を付ける。
$\angle O_1AD=\angle O_1AF=15°$である。
$\triangle AO_1D$について，$AO_1=1-r_1$，$O_1D=r_1$より，$\sin15°=\dfrac{r_1}{1-r_1}$

$$\therefore r_1=\frac{\sin15°}{1+\sin15°}=\frac{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{1+\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}-1)(2\sqrt{2}-\sqrt{3}+1)}{8-(4-2\sqrt{3})}=\frac{-4-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{2(2+\sqrt{3})}$$

$$=(-2-\sqrt{2}+\sqrt{3}\sqrt{6})(2-\sqrt{3})$$

$$=-7-5\sqrt{2}+4\sqrt{3}+3\sqrt{6}\quad（≒0.205605）$$



$\triangle AO_2F$について，$\angle O_2AF=30°$，$O_2F=r_2$であるから，$AF=\sqrt{3}r_2$

また，FE$=\sqrt{(r_2+r_1)^2-(r_2-r_1)^2}=2\sqrt{r_1r_2}$ である。

$\tan 15^\circ=\dfrac{r_1}{\sqrt{3}\,r_2+2\sqrt{r_1r_2}}=2-\sqrt{3}$ より，$r_1-2(2-\sqrt{3})\sqrt{r_1r_2}-\sqrt{3}(2-\sqrt{3})r_2=0$

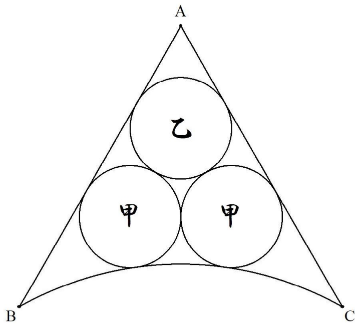
両辺を r_2 で割ると，$\dfrac{r_1}{r_2}-2(2-\sqrt{3})\sqrt{\dfrac{r_1}{r_2}}-\sqrt{3}(2-\sqrt{3})=0$

$\sqrt{\dfrac{r_1}{r_2}}=(2-\sqrt{3})\pm\sqrt{(2-\sqrt{3})^2+\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}=(2-\sqrt{3})\pm(\sqrt{3}-1)=1,\ 3-2\sqrt{3}$

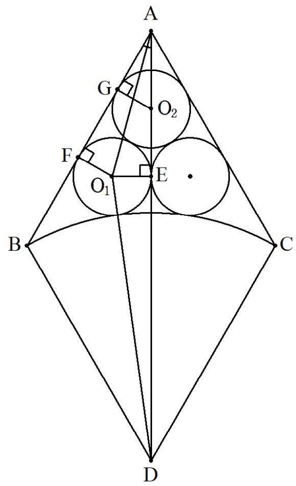
$\sqrt{\dfrac{r_1}{r_2}}>0$ より，$\sqrt{\dfrac{r_1}{r_2}}=1\quad \therefore r_1=r_2$（甲円，乙円の半径は等しい。）

よって，甲乙円の半径は，甲：$-7-5\sqrt{2}+4\sqrt{3}+3\sqrt{6}$，乙：$-7-5\sqrt{2}+4\sqrt{3}+3\sqrt{6}$ 答

5 A，B，C は 1 辺の長さが 1 の正三角形の頂点で，
弧 BC は半径 1 の円弧である。
弧 BC，CA，AB で囲まれた図形の中に互いに
互いに接する甲円 2 個と乙円 1 弧を内接させる。
甲円，乙円の半径をそれぞれ求めよ。



解答 左側の甲円を $O_1(r_1)$，乙円を$O_2(r_2)$ とおき，図のように記号を付ける。



$\angle O_1AE=\angle O_1AF=15^\circ$ である。

$\triangle O_1DE$ について，$O_1D=1+r_1$，$O_1E=r_1$ より，

DE$=\sqrt{(1+r_1)^2-r_1^2}=\sqrt{1-2r_1}$ であるから，AE$=\sqrt{3}-\sqrt{1-2r_1}$

$\triangle AO_1E$について，$\tan 15^\circ=\dfrac{r_1}{\sqrt{3}-\sqrt{1-2r_1}}=2-\sqrt{3}$

$r_1=(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{1-2r_1})$

移項すると，$(2-\sqrt{3})\sqrt{1-2r_1}=\sqrt{3}(2-\sqrt{3})-r_1$

両辺を 2 乗すると，$(2-\sqrt{3})^2(1-2r_1)=3(2-\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})r_1+r_1^2$

$r_1^2-4(2-\sqrt{3})r_1+2(2-\sqrt{3})^2=0$

$r_1=2(2-\sqrt{3})\pm\sqrt{2}(2-\sqrt{3})=(2-\sqrt{3})(2\pm\sqrt{2})$

題意に適するのは，$r_1=(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})=4-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}$（≒ 0.156961）

次に，

$\triangle AO_2G$ について，$\angle O_2AG=30^\circ$，$O_2G=r_2$ であるから，AG$=\sqrt{3}r_2$

また，FG$=\sqrt{(r_2+r_1)^2-(r_2-r_1)^2}=2\sqrt{r_1r_2}$ である。

$\tan 15^\circ=\dfrac{r_1}{\sqrt{3}\,r_2+2\sqrt{r_1r_2}}=2-\sqrt{3}$ より，$r_1-2(2-\sqrt{3})\sqrt{r_1r_2}-\sqrt{3}(2-\sqrt{3})r_2=0$

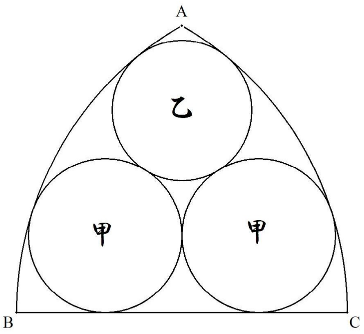
両辺を r_2 で割ると，$\dfrac{r_1}{r_2}-2(2-\sqrt{3})\sqrt{\dfrac{r_1}{r_2}}-\sqrt{3}(2-\sqrt{3})=0$

$\sqrt{\dfrac{r_1}{r_2}}=(2-\sqrt{3})\pm\sqrt{(2-\sqrt{3})^2+\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}=(2-\sqrt{3})\pm(\sqrt{3}-1)=1,\ 3-2\sqrt{3}$

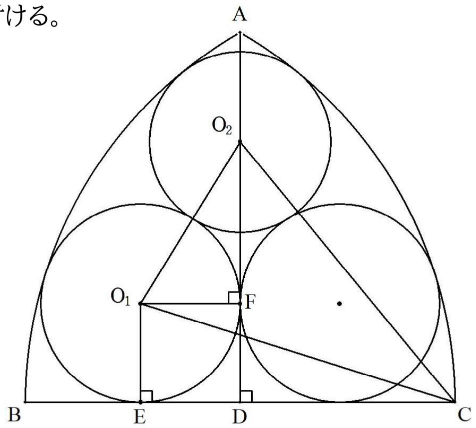
$\sqrt{\dfrac{r_1}{r_2}}>0$ より，$\sqrt{\dfrac{r_1}{r_2}}=1\quad\therefore r_1=r_2$（甲円，乙円の半径は等しい。）

よって，甲乙円の半径は，甲：$4-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}$，乙：$4-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}$ 答

6 A，B，C は１辺の長さが１の正三角形の頂点で，弧 CA，弧AB は半径１の円弧である。BC，弧 CA，弧 AB で囲まれた図形の中に互いに接する甲円２個と乙円１個を内接させる。甲円，乙円の半径をそれぞれ求めよ。



解答 左側の甲円を $O_1(r_1)$，乙円を $O_2(r_2)$ とおき，図のように記号を付ける。



$\triangle O_1EC$ について，$O_1E=r_1$，$EC=r_1+\dfrac{1}{2}$，$CO_1=1-r_1$ であるから，

三平方の定理により，$r_1{}^2+\left(r_1+\dfrac{1}{2}\right)^2=(1-r_1)^2$

$r_1{}^2+3r_1-\dfrac{3}{4}=0\quad\cdots①\quad r_1=\dfrac{-3\pm2\sqrt{3}}{2}$

$r_1>0$ より，$r_1=\dfrac{-3+2\sqrt{3}}{2}$ （≒ 0.232051）

次に，$\triangle O_2O_1F$ について，$O_2O_1=r_1+r_2$，$O_1F=r_1$ であるから，

三平方の定理により，$O_2F=\sqrt{(r_1+r_2)^2-r_1{}^2}=\sqrt{2r_1r_2+r_2{}^2}$

従って，$\triangle O_2DC$ について，$O_2D=O_2F+FD=\sqrt{2r_1r_2+r_2{}^2}+r_1$，$DC=\dfrac{1}{2}$，$CO_2=1-r_2$ であるから，

三平方の定理により，$\left(\sqrt{2r_1r_2+r_2{}^2}+r_1\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=(1-r_2)^2$

展開して移項すると，$2r_1\sqrt{2r_1r_2+r_2{}^2}=\dfrac{3}{4}-r_1{}^2-2(1+r_1)r_2$

両辺を２乗して r_2 について整理すると，$4(1+2r_1)r_2{}^2-(3+3r_1-4r_1{}^2+4r_1{}^3)r_2+\left(\dfrac{3}{4}-r_1{}^2\right)^2=0\quad\cdots②$

①より，$3+3r_1-4r_1{}^2+4r_1{}^3=\left(r_1{}^2+3r_1-\dfrac{3}{4}\right)(4r_1-16)+54r_1-9=9(6r_1-1)$，

$\left(\dfrac{3}{4}-r_1{}^2\right)^2=(3r_1)^2=9\left(\dfrac{3}{4}-3r_1\right)=\dfrac{27}{4}(1-4r_1)$ であるから，

②は，$4(1+2r_1)r_2{}^2-9(6r_1-1)r_2+\dfrac{27}{4}(1-4r_1)=0$

両辺に $\dfrac{4}{9}$ を掛け，変形すると，$(1+2r_1)\left(\dfrac{4r_2}{3}\right)^2-3(6r_1-1)\left(\dfrac{4r_2}{3}\right)+3(1-4r_1)=0$

$r_1=\dfrac{-3+2\sqrt{3}}{2}$ を代入すると，$2(\sqrt{3}-1)\left(\dfrac{4r_2}{3}\right)^2-6(3\sqrt{3}-5)\left(\dfrac{4r_2}{3}\right)+3(7-4\sqrt{3})=0$

両辺に $(\sqrt{3}+1)$ を掛けると，$4\left(\dfrac{4r_2}{3}\right)^2-12(2-\sqrt{3})\left(\dfrac{4r_2}{3}\right)+3(-5+3\sqrt{3})=0$

$\therefore\left(\dfrac{8r_2}{3}\right)^2-6(2-\sqrt{3})\left(\dfrac{8r_2}{3}\right)+3(-5+3\sqrt{3})=0$

$$\frac{8r_2}{3}=3(2-\sqrt{3})\pm\sqrt{\{-3(2-\sqrt{3})\}^2-3(-5+3\sqrt{3})}=3(2-\sqrt{3})\pm\sqrt{78-45\sqrt{3}}$$

ここで，$78-45\sqrt{3}=\dfrac{3(52-2\sqrt{15^2\cdot 3})}{2}=\dfrac{3(3\sqrt{3}-5)^2}{2}=\left(\dfrac{9\sqrt{2}-5\sqrt{6}}{2}\right)^2$ であるから，

$\dfrac{8r_2}{3}=3(2-\sqrt{3})\pm\dfrac{9\sqrt{2}-5\sqrt{6}}{2}$　$\therefore r_2=\dfrac{3\{6(2-\sqrt{3})\pm(9\sqrt{2}-5\sqrt{6})\}}{16}$

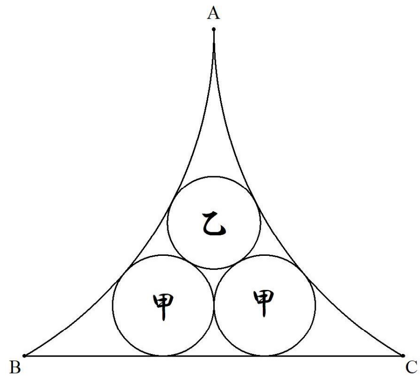
ここで，$\dfrac{3\{6(2-\sqrt{3})-(9\sqrt{2}-5\sqrt{6})\}}{16}\fallingdotseq 0.21$，$\dfrac{3\{6(2-\sqrt{3})+(9\sqrt{2}-5\sqrt{6})\}}{16}\fallingdotseq 0.39$ であるから，

題意に適するのは，$r_2=\dfrac{3(6-9\sqrt{2}-6\sqrt{3}+5\sqrt{6})}{16}$　（$\fallingdotseq 0.211354$）

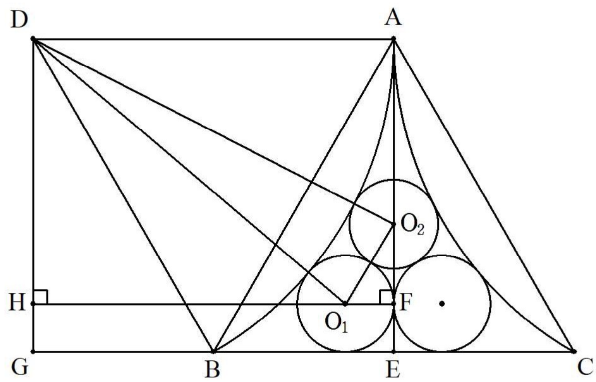
よって，求める甲乙円の半径は，

甲：$\dfrac{-3+2\sqrt{3}}{2}$，乙：$\dfrac{3(6-9\sqrt{2}-6\sqrt{3}+5\sqrt{6})}{16}$　答

7　A，B，C は１辺の長さが１の正三角形の頂点で，
弧 CA，弧AB は半径１の円弧である。
BC，弧 CA，弧 AB で囲まれた図形の中に互いに
接する甲円２個と乙円１個を内接させる。
甲円，乙円の半径をそれぞれ求めよ。



解答　左側の甲円を $O_1(r_1)$，乙円を $O_2(r_2)$ とおき，
図のように記号を付ける。



$\triangle DHO_1$ について，

$DH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-r_1$，$HF=1$，$O_1D=1+r_1$ であるから，

三平方の定理により，$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-r_1\right)^2+(1-r_1)^2=(1+r_1)^2$

$r_1{}^2-(4+\sqrt{3})r_1+\dfrac{3}{4}=0$

$r_1=\dfrac{4+\sqrt{3}\pm\sqrt{(4+\sqrt{3})^2-3}}{2}=\dfrac{4+\sqrt{3}\pm 2(\sqrt{3}+1)}{2}$

$r_1<\dfrac{1}{4}$ より，$r_1=\dfrac{4+\sqrt{3}-2(\sqrt{3}+1)}{2}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$　（$\fallingdotseq 0.13397$）

次に，$\triangle O_2O_1F$ について，$O_2O_1=r_1+r_2$，$O_1F=r_1$ であるから，

三平方の定理により，$O_2F=\sqrt{(r_1+r_2)^2-r_1{}^2}=\sqrt{2r_1r_2+r_2{}^2}$

$\triangle O_2AD$ について，$O_2A=EA-EF-FO_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-r_1-\sqrt{2r_1r_2+r_2{}^2}$，$AD=1$，$DO_2=1+r_2$ であるから，

三平方の定理により，$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-r_1-\sqrt{2r_1r_2+r_2{}^2}\right)^2+1^2=(1+r_2)^2$

展開して移項すると，$\dfrac{3}{4}-\sqrt{3}\,r_1+r_1{}^2-2(1-r_1)r_2=(\sqrt{3}-2r_1)\sqrt{2r_1r_2+r_2{}^2}$

$r_1=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$ を代入すると，$2(2-\sqrt{3})-\sqrt{3}\,r_2=2(\sqrt{3}-1)\sqrt{(2-\sqrt{3})r_2+r_2{}^2}$

両辺を2乗して r_2 について整理すると，$(-13+8\sqrt{3})r_2{}^2-4(11-6\sqrt{3})r_2+4(7-4\sqrt{3})=0$

両辺に $(13+8\sqrt{3})$ を掛けると，$23r_2{}^2-4(-1+10\sqrt{3})r_2+4(-5+4\sqrt{3})=0$

この２次方程式の判別式を D とおくと，

$\dfrac{D}{4}=\{-2(-1+10\sqrt{3})\}^2-23\cdot4(-5+4\sqrt{3})=64(26-7\sqrt{3})=\{4(7\sqrt{2}-\sqrt{6})\}^2$ より，

$r_2=\dfrac{2(-1+10\sqrt{3})\pm4(7\sqrt{2}-\sqrt{6})}{23}=\dfrac{2\{-1+10\sqrt{3}\pm2(7\sqrt{2}-\sqrt{6})\}}{23}$

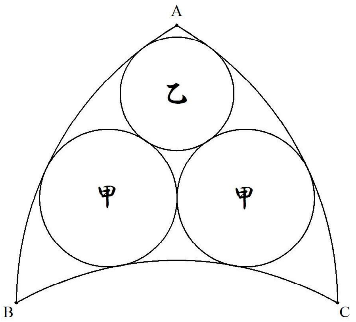
ここで，$\dfrac{2\{-1+10\sqrt{3}-2(7\sqrt{2}-\sqrt{6})\}}{23}\fallingdotseq0.12$，$\dfrac{2\{-1+10\sqrt{3}+2(7\sqrt{2}-\sqrt{6})\}}{23}\fallingdotseq2.7$ であるから，

題意に適するのは，$r_2=\dfrac{2(-1-14\sqrt{2}+10\sqrt{3}+2\sqrt{6})}{23}$ （$\fallingdotseq0.123522$）

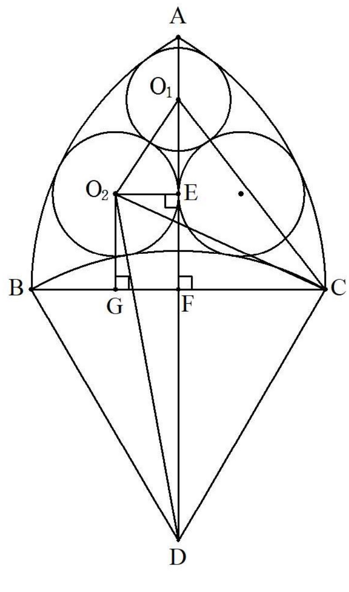
よって，求める甲乙円の半径は，

甲：$\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$，乙：$\dfrac{2(-1-14\sqrt{2}+10\sqrt{3}+2\sqrt{6})}{23}$ 答

8 A，B，C は１辺の長さが１の正三角形の頂点で，
弧 BC，弧 CA，弧AB は半径１の円弧である。
弧 BC，弧 CA，弧 AB で囲まれた図形の中に互いに
接する甲円２個と乙円１個を内接させる。
甲円，乙円の半径をそれぞれ求めよ。



解答　左側の甲円を $O_1(r_1)$，乙円を $O_2(r_2)$ とおき，図のように記号を付ける。
（△BCD は正三角形）



△O_2GC について，GC$=r_1+\dfrac{1}{2}$，CO2$=1-r_1$ であるから，

三平方の定理により，O_2G$=\sqrt{(1-r_1)^2-\left(\dfrac{1}{2}+r_1\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3(1-4r_1)}}{2}$

△O_2DE について，O_2D$=1+r_1$，O_2E$=r_1$ であるから，

三平方の定理により，ED$=\sqrt{(1+r_1)^2-r_1{}^2}=\sqrt{1+2r_1}$

また，FD$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。

O_2G=EF=ED−FD であるから，$\dfrac{\sqrt{3(1-4r_1)}}{2}=\sqrt{1+2r_1}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

両辺を２乗して整理すると，$\sqrt{3}\sqrt{1+2r_1}=1+5r_1$

両辺を２乗して整理すると，$25r_1{}^2+4r_1-2-0$　$\therefore r_1=\dfrac{-2\pm3\sqrt{6}}{25}$

$r_1>0$ より，$r_1=\dfrac{-2+3\sqrt{6}}{25}$ （$\fallingdotseq0.213939$）

次に，△O_2O_1E について，$O_2O_1=r_1+r_2$，O_1E$=r_1$ であるから，

三平方の定理により，O_2E$=\sqrt{(r_1+r_2)^2-r_1{}^2}=\sqrt{2r_1r_2+r_2{}^2}$

従って，△O_2FC について，

$O_2F=O_2E+ED-FD=\sqrt{2r_1r_2+r_2{}^2}+\sqrt{1+2r_1}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$FC=\dfrac{1}{2}$，$CO_2=1-r_2$ であるから，

三平方の定理により，$\left(\sqrt{2r_1r_2+r_2{}^2}+\sqrt{1+2r_1}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=(1-r_2)^2$

展開して移項すると，$1+2r_1-\sqrt{3}\sqrt{1+2r_1}+2(1+r_1)r_2=(\sqrt{3}-2\sqrt{1+2r_1})\sqrt{2r_1r_2+r_2{}^2}$

両辺を２乗して r_2 について整理すると，$(-3+4r_1{}^2+4\sqrt{3}\sqrt{1+2r_1})r_2{}^2+2\{2-r_1-4r_1{}^2-2\sqrt{3}(1-r_1)\sqrt{1+2r_1}\}r_2$
$-2(1+2r_1)(-2-r_1+\sqrt{3}\sqrt{1+2r_1})=0$

$r_1=\dfrac{-2+3\sqrt{6}}{25}$ を代入すると，$\sqrt{1+2r_1}=\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5}$ であるから，

$11(-13+132\sqrt{6})r_2{}^2+6(266-249\sqrt{6})r_2+18(29-6\sqrt{6})=0$

両辺に $13+132\sqrt{6}$ を掛けると，$1837r_2{}^2-6(310-51\sqrt{6})r_2+18(-7+6\sqrt{6})=0$

$r_2=\dfrac{3(310-51\sqrt{6})\pm 3\sqrt{3(45808-17888\sqrt{6})}}{1837}=\dfrac{3(310\pm 156\sqrt{2}\mp 172\sqrt{3}-51\sqrt{6})}{1837}$ （複号同順）

近似値を計算すると，

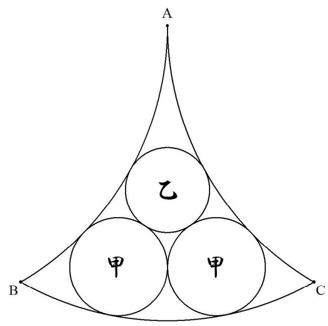
$\dfrac{3(310+156\sqrt{2}-172\sqrt{3}-51\sqrt{6})}{1837}\fallingdotseq 0.176$，$\dfrac{3(310-156\sqrt{2}+172\sqrt{3}-51\sqrt{6})}{1837}\fallingdotseq 0.428$

$r_2<r_1$ であるから，$r_2=\dfrac{3(310+156\sqrt{2}-172\sqrt{3}-51\sqrt{6})}{1837}$ （$\fallingdotseq 0.176016$）

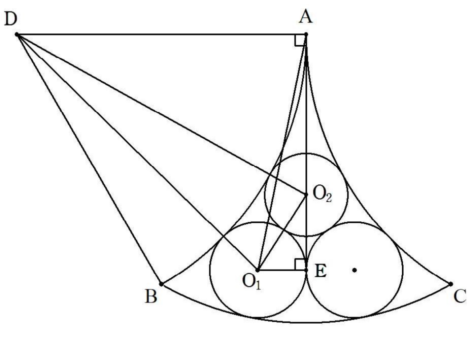
よって，求める甲乙円の半径は，甲：$\dfrac{-2+3\sqrt{6}}{25}$，乙：$\dfrac{3(310+156\sqrt{2}-172\sqrt{3}-51\sqrt{6})}{1837}$ 答

（2024/1/5，6/6　時岡）

9 A，B，C は１辺の長さが１の正三角形の頂点で，
弧 BC，弧 CA，弧 AB は半径１の円弧である。
弧 BC，弧 CA，弧 AB で囲まれた図形の中に互いに
接する甲円２個と乙円１個を内接させる。
甲円，乙円の半径をそれぞれ求めよ。



解答　左側の甲円を $O_1(r_1)$，乙円を $O_2(r_2)$ とおき，図のように記号を付ける。（△ADB は正三角形）



$\angle DAO_1=\alpha$，$\angle O_1AE=\beta$ とおくと，$\alpha+\beta=90^\circ$ である。

△ADO_1 に余弦定理を適用して，

$\cos\alpha=\dfrac{(1-r_1)^2+1^2-(1+r_1)^2}{2(1-r_1)\cdot 1}=\dfrac{1-4r_1}{2(1-r_1)}$ …①

△AO_1Eについて，$AO_1=1-r_1$，$O_1E=r_1$ であるから，

三平方の定理により，$AE=\sqrt{(1-r_1)^2-r_1{}^2}=\sqrt{1-2r_1}$

$\therefore\cos\beta=\dfrac{\sqrt{1-2r_1}}{1-r_1}=\sin\alpha$ …②

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ に，①，②を代入すると，$\left(\dfrac{\sqrt{1-2r_1}}{1-r_1}\right)^2+\left\{\dfrac{1-2r_1}{2(1-r_1)}\right\}^2=1$

両辺に $4(1-r_1)^2$ を掛けると，$4(1-2r_1)+(1-2r_1)^2=4(1-r_1)^2$

整理すると，$12r_1{}^2-8r_1+1=0$　$\therefore r_1=\dfrac{1}{6}$，$\dfrac{1}{2}$

$0 < r_1 < \frac{1}{4}$ より，$r_1 = \frac{1}{6}$ （$= 0.1\dot{6}$）

次に，△O_2O_1E について，$O_2O_1 = r_1 + r_2$，$O_1E = r_1$ であるから，

三平方の定理により，$O_2E = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - r_1{}^2} = \sqrt{2r_1r_2 + r_2{}^2}$

従って，△DO_2A について，

$AO_2 = AE - O_2E = \sqrt{1-2r_1} - \sqrt{2r_1r_2 + r_2{}^2}$，$AD = 1$，$DO_2 = 1 + r_2$ であるから，

三平方の定理により，$\left(\sqrt{1-2r_1} - \sqrt{2r_1r_2 + r_2{}^2}\right)^2 + 1^2 = (1 + r_2)^2$

展開して移項すると，$1 - 2r_1 - 2(1 - r_1)r_2 = 2\sqrt{1-2r_1}\sqrt{2r_1r_2 + r_2{}^2}$

両辺を 2 乗して r_2 について整理すると，$4r_1{}^2r_2{}^2 - 4(1 + r_1)(1 - 2r_1)r_2 + (1 - 2r_1)^2 = 0$

$r_1 = \frac{1}{6}$ を代入すると，$r_2{}^2 - 28r_2 + 4 = 0$　　$r_2 = 14 \pm 8\sqrt{3}$

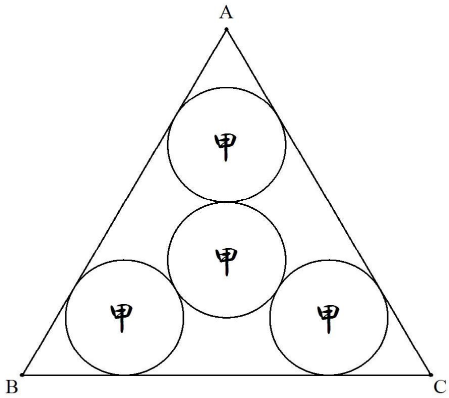
題意に適するのは，$r_2 = 14 - 8\sqrt{3}$ （$\fallingdotseq 0.143594$）

よって，求める甲乙円の半径は，甲：$\frac{1}{6}$，乙：$14 - 8\sqrt{3}$　答

（2024/1/5　時岡）

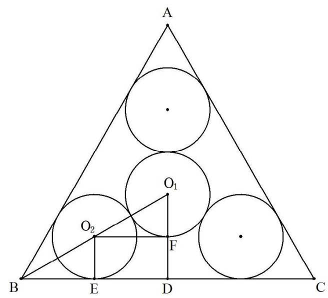
正三角形の辺や円弧によって囲まれる図形内の４個の甲円の半径について

1 　１辺の長さが１の正三角形ABC内に図のように４個の甲円を配置する。
甲円の半径を求めよ。

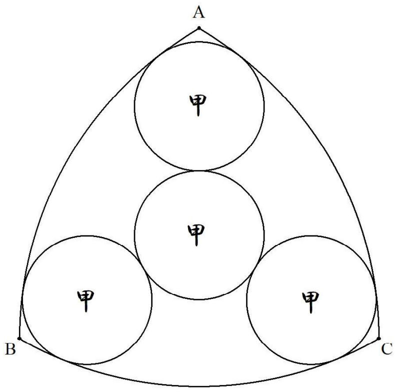


解答　中央の円をO1 (r)，左下の円をO2 (r) とおき，図のように記号を付ける。

BD＝BE＋ED＝$\sqrt{3}r+\sqrt{3}r=2\sqrt{3}r=\dfrac{1}{2}$ より，$r=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$　答



2 　A，B，Cは１辺の長さが１の正三角形の頂点で，
弧BC，弧CA，弧AB は半径１の円弧である。
弧BC，弧CA，弧ABで囲まれた図形の中に
甲円４個を図のように配置する。
甲円の半径を求めよ。



解答　４個の甲円を図のように $O_1(r)$，$O_2(r)$，$O_3(r)$，$O_4(r)$ とおき，
図のように記号を付ける。

$\triangle AO_2D$ について，$O_2D=\sqrt{3}r$，

O_1 は△ABCの外心であるから，正弦定理により，

$2\,AO_1=\dfrac{1}{\sin 60^\circ}$　$\therefore AO_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから，$AD=AO_1+O_1D=\dfrac{1}{\sqrt{3}}+r$，

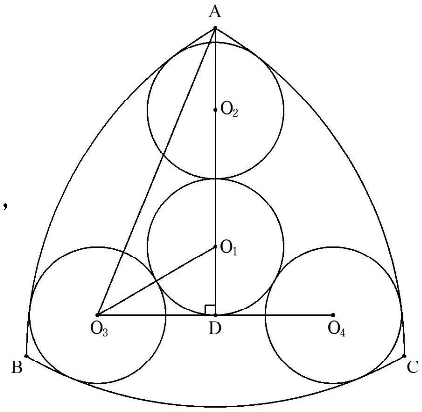
また，$AO_2=1-r$ より，

$\triangle AO_2D$ に三平方の定理を適用して，$(\sqrt{3}r)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}+r\right)^2=(1-r)^2$

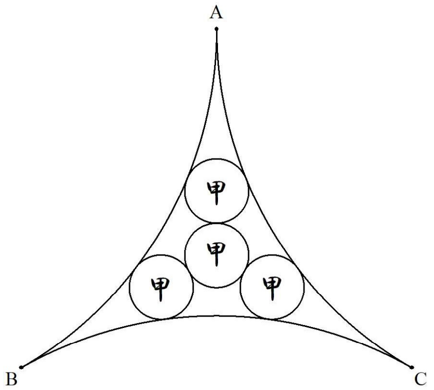
展開して整理すると，$9r^2+2(3+\sqrt{3})r-2=0$

$$\therefore r=\frac{-(3+\sqrt{3})\pm\sqrt{30+6\sqrt{3}}}{9}$$

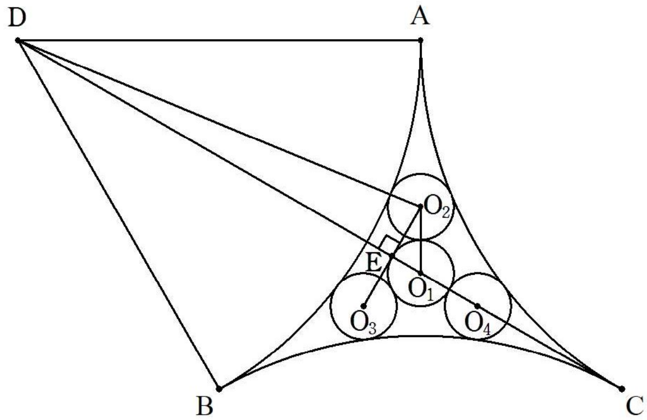
$r>0$ より，$r=\dfrac{-3-\sqrt{3}+\sqrt{6(5+\sqrt{3})}}{9}$　（≒ 0.180383）　答



3 A，B，Cは1辺の長さが1の正三角形の頂点で，
弧BC，弧CA，弧AB は半径1の円弧である。
弧BC，弧CA，弧ABで囲まれた図形の中に
甲円4個を図のように配置する。
甲円の半径を求めよ。



解答　4個の甲円を図のように $O_1(r)$，$O_2(r)$，$O_3(r)$，$O_4(r)$ とおき，図のように記号を付ける。
（△DBAは正三角形）

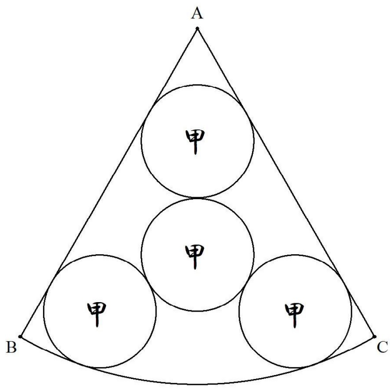


$\triangle DEO_2$ について，$EO_2=\sqrt{3}r$，
O_1 は△ABCの外心であるから，正弦定理により，
$2\,CO_1=\dfrac{1}{\sin 60^\circ}$　$\therefore CO_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから，
$DE=DC-O_1C-EO_1=\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}-r=\dfrac{2}{\sqrt{3}}-r$，
また，$O_2D=1+r$ より，
$\triangle DEO_2$ に三平方の定理を適用して，$(\sqrt{3}r)^2+\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}-r\right)^2=(1+r)^2$

展開して整理すると，$9r^2-2(3+2\sqrt{3})r+1=0$　$\therefore r=\dfrac{3+2\sqrt{3}\pm\sqrt{12+12\sqrt{3}}}{9}=\dfrac{3+2\sqrt{3}\pm2\sqrt{3(1+\sqrt{3})}}{9}$

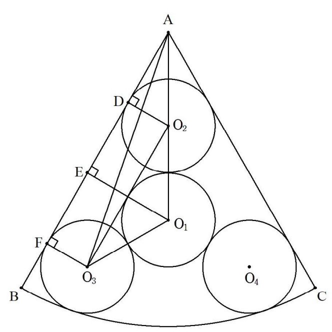
$r<\dfrac{1}{3}$ より，　$r=\dfrac{3+2\sqrt{3}-2\sqrt{3(1+\sqrt{3})}}{9}$　（≒ 0.180383）　答

4 A，B，Cは1辺の長さが1の正三角形の頂点で，
弧BCは半径1の円弧である。
弧BC，CA，ABで囲まれた図形の中に甲円4個
を図のように配置する。
甲円の半径を求めよ。

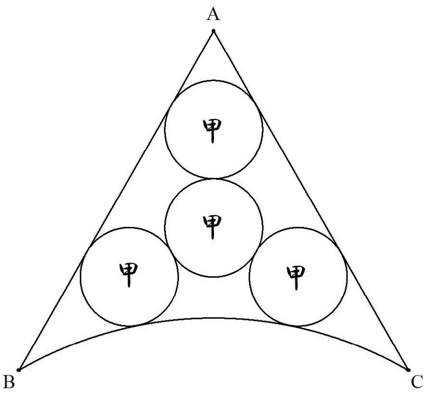


解答　4個の甲円を図のように $O_1(r)$，$O_2(r)$，$O_3(r)$，$O_4(r)$ とおき，
図のように記号を付ける。
$AD=DE=EF=\sqrt{3}r$ より，$AF=3\sqrt{3}r$
また，$FO_2=r$，$O_2A=1-r$ であるから，$\triangle AFO_2$ に三平方の定理を適用して，
$(3\sqrt{3}r)^2+r^2=(1-r)^2$　　$27r^2+2r-1=0$　　$r=\dfrac{-1\pm2\sqrt{7}}{27}$

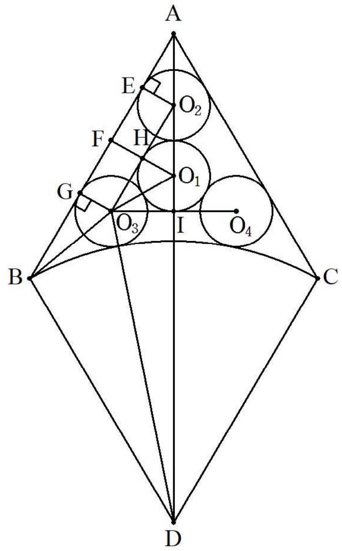
$r>0$ より，　$r=\dfrac{-1+2\sqrt{7}}{27}$　（≒ 0.158945）　答



5 A，B，Cは1辺の長さが1の正三角形の頂点で，
弧BCは半径1の円弧である。
弧BC，CA，ABで囲まれた図形の中に甲円4個
を図のように配置する。
甲円の半径を求めよ。



解答　4個の甲円を図のように $O_1(r)$，$O_2(r)$，$O_3(r)$，$O_4(r)$ とおき，
図のように記号を付ける。△BCDは正三角形である。



$AO_2=O_2O_1=2r$，$O_1I=r$，$AD=\sqrt{3}$ より，$ID=\sqrt{3}-5r$
また，$IO_3=\sqrt{3}r$，$O_3D=1+r$ であるから，$\triangle DIO_3$ に三平方の定理を適用して，

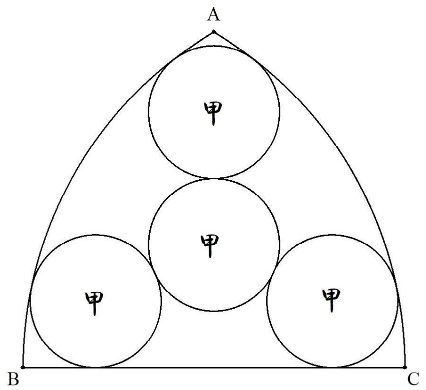
$(\sqrt{3}-5r)^2+(\sqrt{3}r)^2=(1+r)^2 \qquad 27r^2-2(1+5\sqrt{3})r+2=0$

$$r=\frac{1+5\sqrt{3}\pm\sqrt{22+10\sqrt{3}}}{27}$$

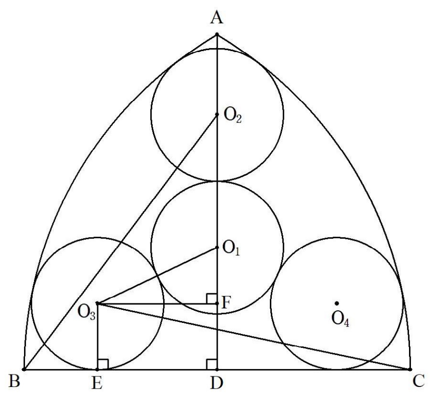
題意に適するのは，　$r=\dfrac{1+5\sqrt{3}-\sqrt{22+10\sqrt{3}}}{27}$　（≒ 0.125542）　答

$\left(\dfrac{1+5\sqrt{3}+\sqrt{22+10\sqrt{3}}}{27}\fallingdotseq 0.59\right)$

6 A，B，Cは1辺の長さが1の正三角形の頂点で，
弧CA，弧AB は半径1の円弧である。
BC，弧CA，弧ABで囲まれた図形の中に甲円4個
を図のように配置する。
甲円の半径を r とするとき，r の満たす実係数の
整方程式を求めよ。また，r の近似値を求めよ。



解答　4個の甲円を図のように $O_1(r)$，$O_2(r)$，$O_3(r)$，$O_4(r)$ とおき，
図のように記号を付ける。



$\triangle O_3EC$ について，$O_3E=r$，$CO_3=1-r$ より，
$\triangle O_3EC$ に三平方の定理を適用して，$EC=\sqrt{(1-r)^2-r^2}=\sqrt{1-2r}$
$\triangle O_1O_3F$ について，$O_1O_3=2r$，$O_3F=EC-DC=\sqrt{1-2r}-\dfrac{1}{2}$ より，
$\triangle O_1O_3F$ に三平方の定理を適用して，

$$O_1F=\sqrt{(2r)^2-\left(\sqrt{1-2r}-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{4r^2+2r-\frac{5}{4}+\sqrt{1-2r}}$$

$\triangle O_1BD$ について，$BD=\dfrac{1}{2}$，$DO_1=3r+\sqrt{4r^2+2r-\dfrac{5}{4}+\sqrt{1-2r}}$，$O_1B=1-r$ より，

$\triangle O_1BD$ に三平方の定理を適用して，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(3r+\sqrt{4r^2+2r-\dfrac{5}{4}+\sqrt{1-2r}}\right)^2=(1-r)^2$

展開して移項すると，$2-4r-12-\sqrt{1-2r}=3r\sqrt{-5+8r+16r^2+4\sqrt{1-2r}}$

両辺を２乗して移項すると，$5-18r+13r^2+24r^3=4(1-2r+3r^2)\sqrt{1-2r}$

両辺を２乗して移項すると，$576r^6+912r^5-1223r^4+284r^3+166r^2-84r+9=0$

因数分解すると，$(8r-3)(72r^5+141r^4-100r^3-2r^2+20r-3)=0$

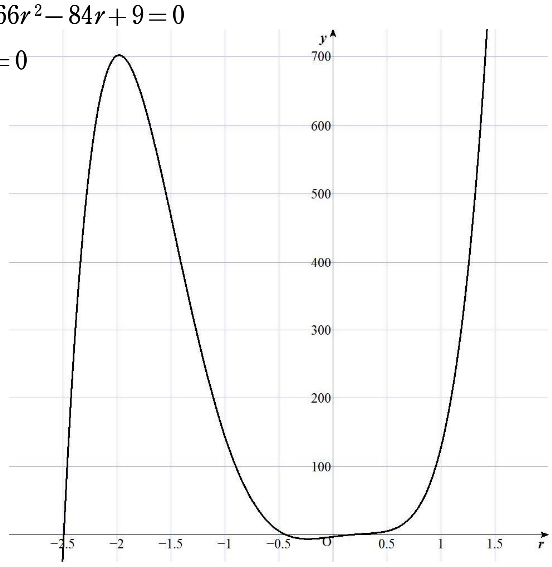
$0<r<\dfrac{1}{4}$ より，$r=\dfrac{3}{8}$ は不適。

$72r^5+141r^4-100r^3-2r^2+20r-3=0$ 答

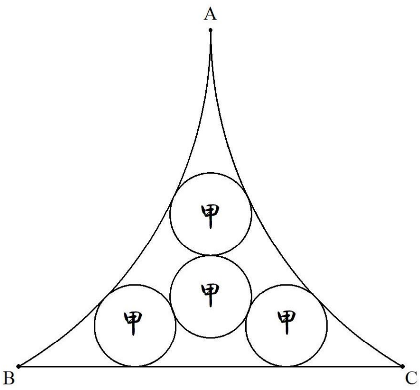
これは５次方程式なので一般に解けない。

右の $y=72r^5+141r^4-100r^3-2r^2+20r-3$ のグラフより（Grapes），実数解は３個あり，$r>0$ より，

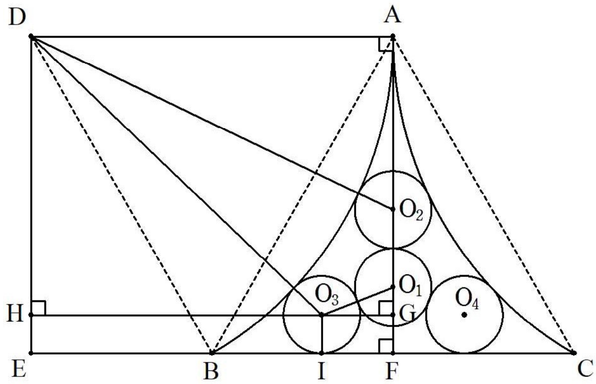
題意に適する r の近似値は，$r\fallingdotseq 0.171543$ 答



7 A，B，C は１辺の長さが１の正三角形の頂点で，弧 CA，弧 AB は半径１の円弧である。
BC，弧 CA，弧 AB で囲まれた図形の中に甲円４個を図のように配置する。
甲円の半径を r とするとき，r の満たす実係数の整方程式を求めよ。また，r の近似値を求めよ。



解答　４個の甲円を図のように $O_1(r)$，$O_2(r)$，$O_3(r)$，$O_4(r)$ とおき，図のように記号を付ける。



$\triangle O_2AD$ について，$AD=1$，$DO_2=1+r$ より，

$\triangle O_2AD$ に三平方の定理を適用して，

$AO_2=\sqrt{(1+r)^2-1^2}=\sqrt{2r+r^2}$

$O_1G=AF-AO_2-O_2O_1-GF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2r+r^2}-2r-r$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-3r-\sqrt{2r+r^2}$

$\triangle O_1O_3G$ について，$O_1O_3=2r$，$O_1G=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-3r-\sqrt{2r+r^2}$ より，

$\triangle O_1O_3G$ に三平方の定理を適用して，$O_3G=\sqrt{(2r)^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-3r-\sqrt{2r+r^2}\right)^2}$ であるから，

$HO_3=1-\sqrt{(2r)^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-3r-\sqrt{2r+r^2}\right)^2}$

また，，$O_3D=1+r$，$DH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-r$ より，

$\triangle DHO_3$ に三平方の定理を適用して，$\left\{1-\sqrt{(2r)^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-3r-\sqrt{2r+r^2}\right)^2}\right\}^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-r\right)^2=(1+r)^2$

展開して移項すると，$-2(2-\sqrt{3})r-6r^2+(\sqrt{3}-6r)\sqrt{2r+r^2}=2\sqrt{(2r)^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-3r-\sqrt{2r+r^2}\right)^2}$

両辺を 2 乗して移項すると，$3-2(-7+6\sqrt{3})r-5(-11+8\sqrt{3})r^2+12(10-3\sqrt{3})r^3+72r^4=4\{\sqrt{3}-(9-2\sqrt{3})r$
$+3(-4+3\sqrt{3})r^2-18r^3\}\sqrt{2r+r^2}$

両辺を 2 乗して移項すると，

$144(7+4\sqrt{3})r^6-24(170+89\sqrt{3})r^5+(1489+544\sqrt{3})r^4-4(-61+112\sqrt{3})r^3+526r^2-12(1+6\sqrt{3})r+9=0$

両辺に $7-4\sqrt{3}$ を掛けると，

$144r^6-24(122-57\sqrt{3})r^5+(3895-2148\sqrt{3})r^4-4(-1771+1028\sqrt{3})r^3+526(7-4\sqrt{3})r^2-12(-65+38\sqrt{3})r$
$+9(7-4\sqrt{3})=0$

因数分解すると，$\{4r-3(2-\sqrt{3})\}\times$

$\{36r^5-3(226-105\sqrt{3})r^4+4(-188+111\sqrt{3})r^3-2(178-101\sqrt{3})r^2+4(-17+11\sqrt{3})r-3(2-\sqrt{3})\}=0$

目視で，$3r<\dfrac{1}{2}$ であるから，$r=\dfrac{3(2-\sqrt{3})}{4}\fallingdotseq 0.200962$ は不適。

よって，

$36r^5-3(226-105\sqrt{3})r^4+4(-188+111\sqrt{3})r^3-2(178-101\sqrt{3})r^2+4(-17+11\sqrt{3})r-3(2-\sqrt{3})=0$ 答

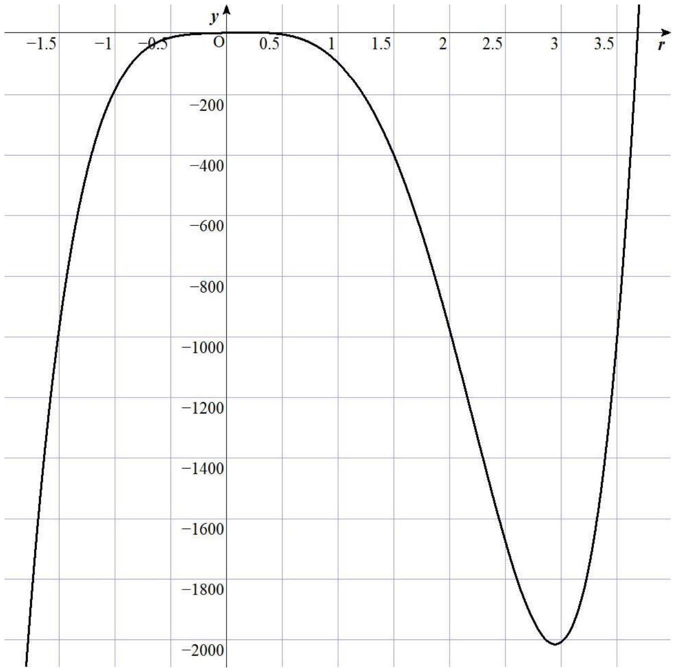
これは 5 次方程式なので一般に解けない。

右の $y=36r^5-3(226-105\sqrt{3})r^4+4(-188+111\sqrt{3})r^3-2(178-101\sqrt{3})r^2+4(-17+11\sqrt{3})r-3(2-\sqrt{3})$ のグラフ（Grapes）から，実数解の近似値は，

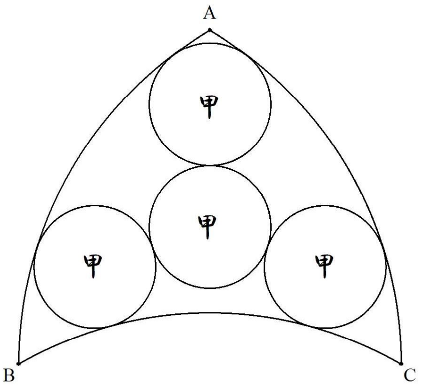
$r\fallingdotseq 0.11$， 0.37， 3.5

よって，題意に適する近似値は，

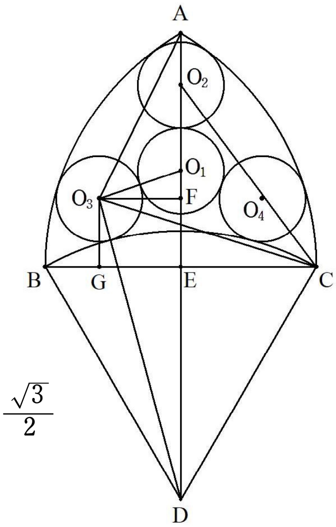
$r\fallingdotseq 0.105759$ 答



8 A，B，Cは1辺の長さが1の正三角形の頂点で，
弧BC，弧CA，弧AB は半径1の円弧である。
弧BC，弧CA，弧ABで囲まれた図形の中に
甲円4個を図のように配置する。
甲円の半径を r とするとき，r の満たす実係数の
整方程式を求めよ。また，r の近似値を求めよ。



解答 4個の甲円を図のように $O_1(r)$，$O_2(r)$，$O_3(r)$，$O_4(r)$ とおき，
図のように記号を付ける。
また，便宜的に $O_3F=GE=x$ とおく。



$\triangle O_3GC$ について，$GC=x+\dfrac{1}{2}$，$CO_3=1-r$ より，

$\triangle O_3GC$ に三平方の定理を適用して，$O_3G=\sqrt{(1-r)^2-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2}$

$\triangle O_3DF$ について，$O_3D=1+r$，$O_3F=x$ より，

$\triangle O_3DF$ に三平方の定理を適用して，$DF=\sqrt{(1+r)^2-x^2}$

また，$O_3G=FE=FD-ED$であるから，$\sqrt{(1-r)^2-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{(1+r)^2-x^2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

両辺を2乗して移項すると，$\sqrt{3}\sqrt{(1+r)^2-x^2}=1+4r+x$

両辺を2乗して x について整理すると，$4x^2+2(1+4r)x+(1+4r)^2-3(1+r)^2=0$

この x について の2次方程式の判別式を D とおくと，

$\dfrac{D}{4}=(1+4r)^2-4\{(1+4r)^2-3(1+r)^2\}=9(1-4r^2)$ より，$x=\dfrac{-(1+4r)\pm3\sqrt{1-4r^2}}{4}$

$x>0$ より，$x=\dfrac{-(1+4r)+3\sqrt{1-4r^2}}{4}$ …①

次に，$\triangle O_2EC$ について，$EC=\dfrac{1}{2}$，$CO_2=1-r$ より，$\triangle O_2EC$ に三平方の定理を適用して，

$O_2E=\sqrt{(1-r)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}$

また，$\triangle O_1O_3F$ について，$O_1O_3=2r$，O3F$=x$ より，$\triangle O_1O_3F$ に三平方の定理を適用して，$O_1F=\sqrt{(2r)^2-x^2}$ で

あるから，$O_2E=O_2O_1+O_1F+FE$ より，$\sqrt{(1-r)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=2r+\sqrt{(2r)^2-x^2}+\sqrt{(1-r)^2-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2}$

便宜的に，$\sqrt{(1-r)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}-2r=s$ …②とおくと，$s-\sqrt{4r^2-x^2}=\sqrt{(1-r)^2-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2}$

両辺を2乗して移項すると，$-3+8r+12r^2+4s^2+4x=8s\sqrt{4r^2-x^2}$

両辺を2乗して整理すると，$9-48r-8r^2+192r^3+144r^4-24s^2+64rs^2-160r^2s^2+16s^4-24x+64rx+96r^2x$
$+32s^2x+16x^2+64s^2x^2=0$

②を代入して移項すると，$4r^2x+x^2-2rx^2+5r^2x^2=rx(1+2r)\sqrt{3-8r+4r^2}$

$x\neq0$ であるから，両辺を x で割ると，，$4r^2+x-2rx+5r^2x=r(1+2r)\sqrt{3-8r+4r^2}$

両辺を2乗して整理すると，

$-3r^2+8r^3+12r^4-4r^2x+16r^3x+24r^4x+x^2-4rx^2+2r^2x^2+12r^3x^2+9r^4x^2=0$

①を代入して移項すると， $5-16r-32r^2+172r^3-7r^4-276r^5-90r^6=3(-1+3r^2)(-1+3r^2+12r^3)\sqrt{1-4r^2}$

両辺を 2 乗して整理すると，

$4-40r+20r^2+740r^3-1367r^4-4088r^5+9896r^6+7936r^7$

$-20198r^8-14064r^9+9396r^{10}+18252r^{11}+13689r^{12}=0$ 答

これは 12 次方程式なので一般に解けない。

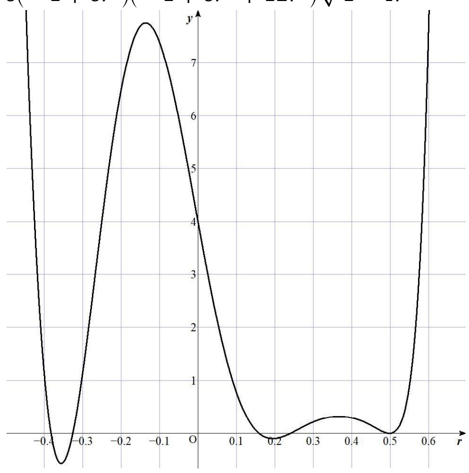
右の $y=4-40r+20r^2+740r^3-1367r^4-4088r^5+9896r^6+7936r^7$

$-20198r^8-14064r^9+9396r^{10}+18252r^{11}+13689r^{12}$ のグラフ

より（Grapes），正の実数解の近似値は，

$r \fallingdotseq 0.159$， 0.241， 0.497， 0.499 （ 4 個）。

よって，題意に適する近似値は， $r \fallingdotseq 0.159383$ 答



9 A，B，C は 1 辺の長さが 1 の正三角形の頂点で，

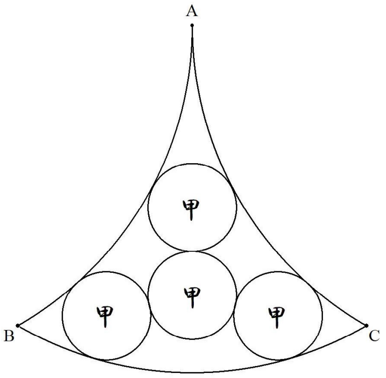
弧 BC，弧 CA，弧 AB は半径 1 の円弧である。

弧 BC，弧 CA，弧 AB で囲まれた図形の中に

甲円 4 個を図のように配置する。

甲円の半径を r とするとき， r の満たす実係数の

整方程式を求めよ。また， r の近似値を求めよ。



解答 4 個の甲円を図のように $O_1(r)$，$O_2(r)$，$O_3(r)$，

$O_4(r)$ とおき，図のように記号を付ける。

$\triangle O_2AD$ について，$AD=1$，$DO_2=1+r$ より，

$\triangle O_2AD$ に三平方の定理を適用して，

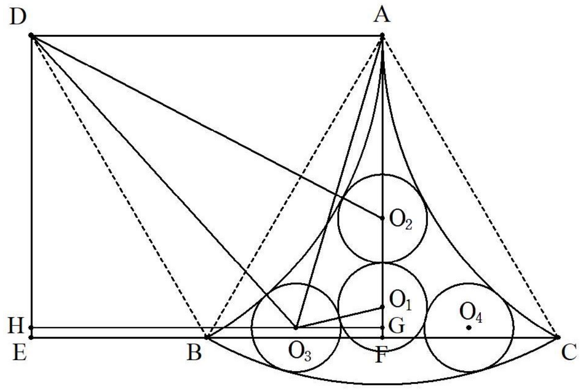
$AO_2=\sqrt{(1+r)^2-1^2}=\sqrt{2r+r^2}$

$O_3G=x$ とおく。

$\triangle DHO_3$ について，$HO_3=1-x$，$O_3D=1+r$ より，

$\triangle DHO_3$ に三平方の定理を適用して，

$DH^2=(1+r)^2-(1-x)^2$ …①



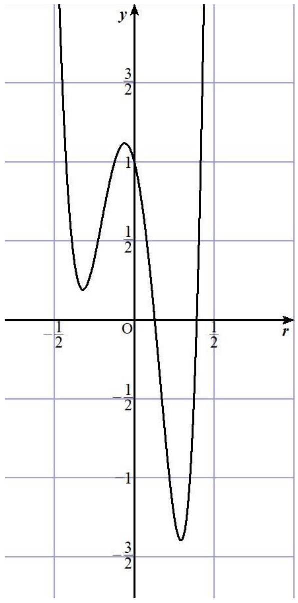
また，$\triangle AGO_3$ について，$O_3G=x$，$AO_3=1-r$ より，$\triangle AGO_3$ に三平方の定理を適用して，

$AG^2=(1-r)^2-x^2$ …②

HD＝AGであるから，①，②より，$(1+r)^2-(1-x)^2=(1-r)^2-x^2$ $\therefore x=\dfrac{1-4r}{2}$ …③

$\triangle O_1O_3G$ について，$O_1O_3=2r$ より，$\triangle O_1O_3G$ に三平方の定理を適用して，$O_1G=\sqrt{(2r)-x^2}$

従って，AG＝AO$_2$＋O$_2$O$_1$＋O$_1$G より， $\sqrt{(1-r)^2-x^2}=\sqrt{2r+r^2}+2r+\sqrt{(2r)^2-x^2}$



便宜的に $\sqrt{2r+r^2}+2r=s$ …④とおくと， $\sqrt{(1-r)^2-x^2}=s+\sqrt{(2r)^2-x^2}$

両辺を 2 乗して移項すると，$1-2r-3r^2-s^2=2s\sqrt{4r^2-x^2}$

両辺を 2 乗すると， $1-4r-2r^2+12r^3+9r^4-2s^2+4rs^2-10r^2s^2+s^4+4s^2x^2=0$

③を代入して整理すると， $1-4r-2r^2+12r^3+9r^4-s^2-4rs^2+6r^2s^2+s^4=0$

④を代入して移項すると， $1-6r-11r^2+56r^3+80r^4=4r(1-16r^2)\sqrt{2r+r^2}$

両辺を因数分解すると，$(1-4r)(1-2r-19r^2-20r^3)=4r(1-4r)(1+4r)\sqrt{2r+r^2}$

$r\neq\dfrac{1}{4}$ であるから， 両辺を $1-4r$ で割り，両辺を 2 乗して整理すると，

$1-4r-34r^2+4r^3+169r^4+120r^5+144r^6=0$ 答

これは 6 次方程式なので一般に解けない。

右の $y=1-4r-34r^2+4r^3+169r^4+120r^5+144r^6$ のグラフ（Grapes）より，

実数解は 2 個であることがわかる。

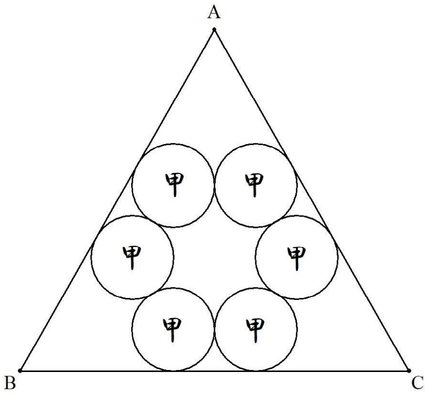
その近似値は， $r\fallingdotseq 0.127$ ， 0.390

よって，題意に適する近似値は， $r\fallingdotseq 0.127031$ 答

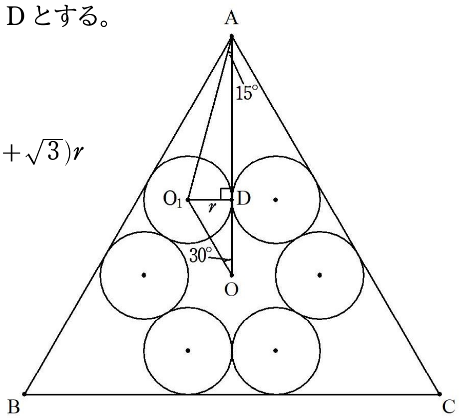
（2024/1/19　時岡）

正三角形の辺や円弧によって囲まれる図形内の6個の甲円の半径について

$\boxed{1}$ 1辺の長さが1の正三角形ABC内に
図のように6個の甲円を配置する。
甲円の半径を求めよ。



解答　三角形の外心をO，左上の甲円を$O_1(r)$とし，上側の2円の接点をDとする。



正弦定理により，$2\,AO=\dfrac{1}{\sin 60^\circ}$　$\therefore AO=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\triangle AO_1D$について，$O_1D=r$，$\angle O_1AD=15^\circ$より，$AD=\dfrac{r}{\tan 15^\circ}=(2+\sqrt{3})r$

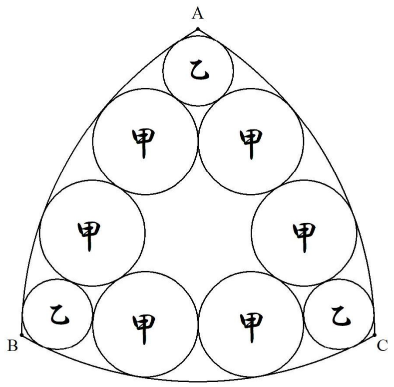
$\triangle O_1OD$について，$O_1D=r$，$\angle O_1OD=30^\circ$より，$DO=\sqrt{3}\,r$

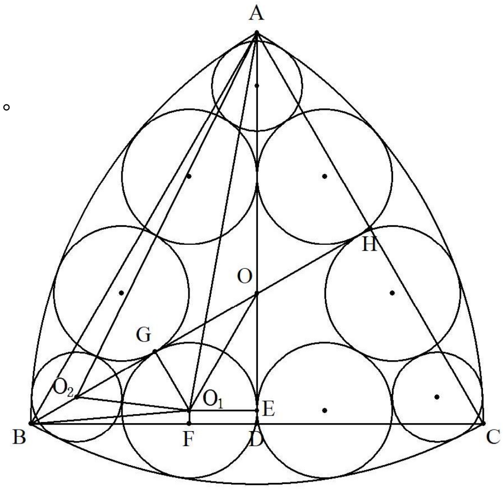
$AO=AD+DO$より，$\dfrac{1}{\sqrt{3}}=(2+\sqrt{3})r+\sqrt{3}\,r$

$\therefore r=\dfrac{1}{\sqrt{3}(2+2\sqrt{3})}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{12}$

よって，甲円の半径は，$\dfrac{3-\sqrt{3}}{12}$　答

$\boxed{2}$ A，B，Cは1辺の長さが1の正三角形の頂点で，
弧BC，弧CA，弧ABは半径1の円弧である。
弧BC，弧CA，弧ABで囲まれた図形の中に
図のように甲円6個と乙円3個を配置する。
甲乙円の半径をそれぞれ求めよ。





解答 △ABCの重心をO，BC，CAの中点をそれぞれD，Hとし，左下の甲円，乙円をそれぞれ$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$とおく。

O_1からAD，BD，BOに下した垂線の足をそれぞれE，F，Gとする。

$\triangle AO_1E$について，$AO_1=1-r_1$，$O_1E=r_1$より，

三平方の定理を適用して，$AE=\sqrt{(1-r_1)^2-r_1^2}=\sqrt{1-2r_1}$

$ED=AD-AE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{1-2r_1}$

Oは△ABCの重心であるから，AO:OD＝2:1

$AD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$であるから，$AO=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$OD=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

6個の甲円の中心は正六角形の頂点をなすから，$\angle GO_1E=120^\circ$

$\angle OO_1E=\dfrac{1}{2}\angle GO_1E=60^\circ$より，$OE=\sqrt{3}r_1$

AE＝AO＋OEより，$\sqrt{1-2r_1}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}r_1$

両辺を2乗して整理すると，$(3r_1)^2+4(3r_1)-2=0$　…①　$3r_1=-2\pm\sqrt{6}$

$r_1>0$より，$r_1=\dfrac{-2+\sqrt{6}}{3}$　（$\fallingdotseq 0.14983$）

次に，$\triangle O_2O_1G$について，$O_2O_1=r_1+r_2$，$O_1G=r_1$より，

$\triangle O_2O_1G$に三平方の定理を適用して，$O_2G=\sqrt{(r_1+r_2)^2-r_1^2}=\sqrt{2r_1r_2+r_2^2}$

また，$GO=OE=\sqrt{3}r_1$，$OH=OD=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$であるから，

$\triangle AO_2H$について，$O_2H=O_2G+GO+OH=\sqrt{2r_1r_2+r_2^2}+\sqrt{3}r_1+\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，$HA=\dfrac{1}{2}$，$AO_2=1-r_2$より，

$\triangle AO_2H$に三平方の定理を適用して，$\left(\sqrt{2r_1r_2+r_2^2}+\sqrt{3}r_1+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=(1-r_2)^2$

展開して整理すると，$2-3r_1-9r_1^2-6(1+r_1)r_2=\sqrt{3}(1+6r_1)\sqrt{2r_1r_2+r_2^2}$

両辺を2乗して，r_2について整理すると，

$3(11+12r_1-24r_1^2)r_2^2-6(4-r_1-12r_1^2+18r_1^3)r_2+(1-3r_1)^2(2+3r_1)^2=0$

①を利用して，$r_1=\dfrac{-2+\sqrt{6}}{3}$を代入すると，$(-71+44\sqrt{6})r_2^2-6(-38+17\sqrt{6})r_2+6(3-\sqrt{6})^2=0$

両辺に$71+44\sqrt{6}$を掛けると，$263(5r_2)^2-6(358-93\sqrt{6})\cdot 5r_2+18(-173+78\sqrt{6})=0$

$5r_2$についての2次方程式の判別式をDとすると，

$\dfrac{D}{4}=\{-3(358-73\sqrt{6})\}^2-263\cdot 18(-173+78\sqrt{6})=432(59-19\sqrt{6})^2=\{12(59\sqrt{3}-57\sqrt{2})\}^2$より，

$5r_2=\dfrac{3(358-93\sqrt{6})\pm 12(59\sqrt{3}-57\sqrt{2})}{263}$

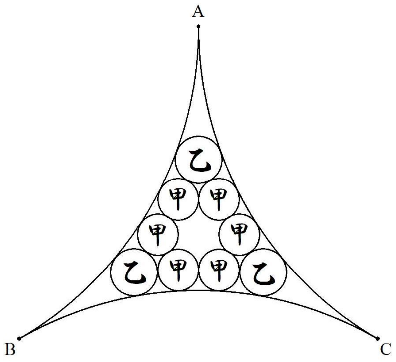
近似値を計算すると，

$r_2=\dfrac{3(358-93\sqrt{6})-12(59\sqrt{3}-57\sqrt{2})}{1315}\fallingdotseq 0.10$，$r_2=\dfrac{3(358-93\sqrt{6})+12(59\sqrt{3}-57\sqrt{2})}{1315}\fallingdotseq 0.49$

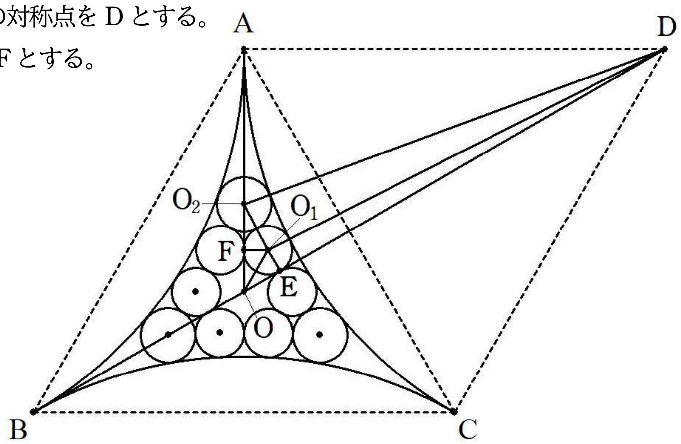
$r_2<r_1$より，$r_2=\dfrac{3(358-93\sqrt{6})-12(59\sqrt{3}-57\sqrt{2})}{1315}=\dfrac{3(358+228\sqrt{2}-236\sqrt{3}-93\sqrt{6})}{1315}$　（$\fallingdotseq 0.100093$）

よって，求める甲乙円の半径は，甲：$\dfrac{-2+\sqrt{6}}{3}$，乙：$\dfrac{3(358+228\sqrt{2}-236\sqrt{3}-93\sqrt{6})}{1315}$　答

3 A，B，Cは1辺の長さが1の正三角形の頂点で，
弧BC，弧CA，弧AB は半径1の円弧である。
弧BC，弧CA，弧ABで囲まれた図形の中に
甲円6個と乙円3個を図のように配置する。
甲乙円の半径をそれぞれ求めよ。



解答　正三角形ABCの外心をO，ACに関するBの対称点をDとする。
O1からBD，AOに下した垂線の足をそれぞれE，Fとする。
右上の甲円を$O_1(r_1)$，上の乙円を$O_2(r_2)$とおく。
6個の甲円の中心は正六角形の頂点であるから，



$\mathrm{OE}=\sqrt{3}r_1$

$\triangle \mathrm{O_1ED}$について，$\mathrm{O_1E}=r_1$，$\mathrm{DO_1}=1+r_1$より，

$\triangle \mathrm{O_1ED}$に三平方の定理を適用して，

$\mathrm{ED}=\sqrt{(1+r_1)^2-r_1{}^2}=\sqrt{1+2r_1}$

$\therefore \mathrm{OD}=\mathrm{OE}+\mathrm{ED}=\sqrt{3}r_1+\sqrt{1+2r_1}$　…①

また，正弦定理により，$2\,\mathrm{BO}=\dfrac{1}{\sin 60^\circ}$

$\therefore \mathrm{BO}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\mathrm{OD}=\mathrm{BD}-\mathrm{BO}=\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　…②

①，②より，$\sqrt{3}r_1+\sqrt{1+2r_1}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

移項すると，$\sqrt{1+2r_1}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}r_1$

両辺を2乗して整理すると，$(3r_1)^2-6(3r_1)+1=0$　$3r_1=3\pm 2\sqrt{2}$　$\therefore r_1=\dfrac{3\pm 2\sqrt{2}}{3}$

$r_1<1$ より，$r_1=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3}$　（≒0.057191）

次に，

$\triangle \mathrm{O_2DA}$について，$\mathrm{O_2D}=1+r_2$，$\mathrm{DA}=1$より，

$\triangle \mathrm{O_2DA}$に三平方の定理を適用して，$\mathrm{AO_2}=\sqrt{(1+r_2)^2-1^2}=\sqrt{2r_2+r_2{}^2}$

$\triangle \mathrm{O_2FO_1}$について，$\mathrm{FO_1}=r_1$，$\mathrm{O_1O_2}=r_1+r_2$より，

$\triangle \mathrm{O_2FO_1}$に三平方の定理を適用して，$\mathrm{O_2F}=\sqrt{(r_1+r_2)^2-r_1{}^2}=\sqrt{2r_1r_2+r_2{}^2}$

$\mathrm{FO}=\mathrm{OE}=\sqrt{3}r_1$，$\mathrm{AO}=\mathrm{BO}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$であるから，

$\mathrm{AO}=\mathrm{AO_2}+\mathrm{O_2F}+\mathrm{FO}=\sqrt{2r_2+r_2{}^2}+\sqrt{2r_1r_2+r_2{}^2}+\sqrt{3}r_1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

移項すると，$\sqrt{2r_1r_2+r_2^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}r_1-\sqrt{2r_2+r_2^2}$

両辺を２乗して整理すると，$(1-3r_1)^2+6(1-r_1)r_2=2\sqrt{3}(1-3r_1)\sqrt{2r_2+r_2^2}$

さらに，両辺を２乗して整理すると，$24(1-3r_1^2)r_2^2-12(1+r_1)(1-3r_1)^2r_2+(1-3r_1)^4=0$

両辺を$(1-3r_1)^4$で割り，$\dfrac{2r_2}{(1-3r_1)^2}=x$とおくと，$6(1-3r_1^2)x^2-6(1+r_1)x+1=0$

xについての２次方程式の判別式をDとおくと，$\dfrac{D}{4}=\{-3(1+r_1)\}^2-6(1-3r_1^2)=3(1+3r_1)^2$であるから，

$x=\dfrac{3(1+r_1)\pm\sqrt{3}(1+3r_1)}{6(1-3r_1^2)}=\dfrac{2r_2}{(1-3r_1)^2}$より，$\therefore r_2=\dfrac{(1-3r_1)^2\{3(1+r_1)\pm\sqrt{3}(1+3r_1)\}}{12(1-3r_1^2)}$

$r_1=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3}$を代入すると，

$$r_2=\frac{13-9\sqrt{2}-10\sqrt{3}+7\sqrt{6}}{-7+6\sqrt{2}},\quad \frac{13-9\sqrt{2}+10\sqrt{3}-7\sqrt{6}}{-7+6\sqrt{2}}$$

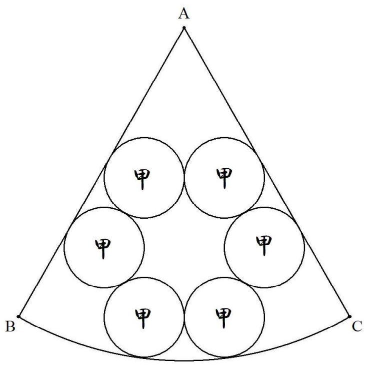
$$=\frac{-17+15\sqrt{2}+14\sqrt{3}-11\sqrt{6}}{23},\quad \frac{-17+15\sqrt{2}-14\sqrt{3}+11\sqrt{6}}{23}$$

$\fallingdotseq 0.07,\ 0.3$

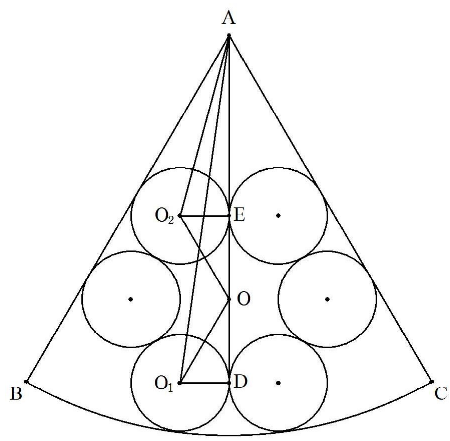
題意に適するのは，$r_2=\dfrac{-17+15\sqrt{2}+14\sqrt{3}-11\sqrt{6}}{23}$　（$\fallingdotseq 0.0659795$）

よって，甲乙円の半径は，甲：$\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3}$，乙：$\dfrac{-17+15\sqrt{2}+14\sqrt{3}-11\sqrt{6}}{23}$　答

4 A，B，C は１辺の長さが１の正三角形の頂点で，
弧 BC は半径１の円弧である。
弧 BC，CA，AB で囲まれた図形の中に甲円６個を図のように配置する。
甲円の半径を求めよ。



解答　６個の甲円の中心でできる正六角形の中心を O，
左下の甲円を $O_1(r)$，左上の甲円を $O_2(r)$ とおき，
O_1，O_2 から直線 AO に下した垂線の足をそれぞれ D，E とする。



$\triangle AO_1D$ について，$AO_1=1-r$，$O_1D=r$ より，
$\triangle AO_1D$ に三平方の定理を適用して，$AD=\sqrt{(1-r)^2-r^2}=\sqrt{1-2r}$
$\triangle AO_2E$ について，$O_2E=r$，$\angle O_2AE=15^\circ$ より，
$AE=\dfrac{r}{\tan 15^\circ}=(2+\sqrt{3})r$
また，$\triangle OO_1D\equiv\triangle OO_2E$ で，$\angle OO_1D=30^\circ$，$O_1D=r$ より，
$OD=OE=\sqrt{3}r$
$AD=AE+EO+OD$ であるから，
$\sqrt{1-2r}=(2+\sqrt{3})r+\sqrt{3}r+\sqrt{3}r$　$\therefore\ \sqrt{1-2r}=(2+3\sqrt{3})r$

両辺を2乗して整理すると，$(31+12\sqrt{3})r^2+2r-1=0$

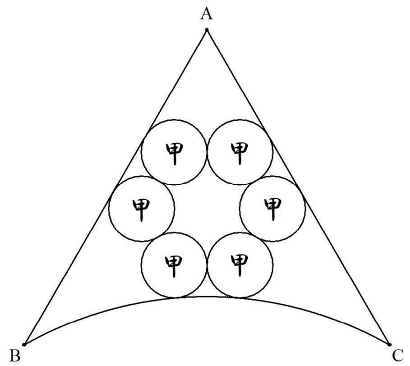
両辺に $31-12\sqrt{3}$ を掛けると，$529r^2+2(31-12\sqrt{3})r-(31-12\sqrt{3})=0$

$r>0$ より，

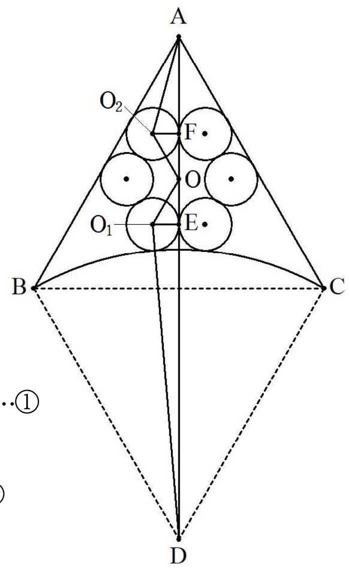
$$r=\frac{-(31-12\sqrt{3})+\sqrt{(31-12\sqrt{3})^2+529(31-12\sqrt{3})}}{529}=\frac{-31+12\sqrt{3}+2\sqrt{4448-1773\sqrt{3}}}{529}\quad(\fallingdotseq 0.120988)$$

よって，甲円の半径は，$\dfrac{-31+12\sqrt{3}+2\sqrt{4448-1773\sqrt{3}}}{529}$ 答

5 A，B，Cは1辺の長さが1の正三角形の頂点で，
弧BCは半径1の円弧である。
弧BC，CA，ABで囲まれた図形の中に甲円6個を図のように配置する。
甲円の半径を求めよ。



解答 BCに関するAの対称点をDとし，6個の甲円の中心でできる正六角形の中心をO，左下の甲円を$O_1(r)$，左上の甲円を$O_2(r)$とおき，O_1，O_2からADに下した垂線の足をそれぞれE，Fとする。



$\triangle EO_1D$について，$EO_1=r$，$O_1D=1+r$ より，

$\triangle EO_1D$に三平方の定理を適用して，$ED=\sqrt{(1+r)^2-r^2}=\sqrt{1+2r}$

$\triangle AO_2F$について，$O_2F=r$，$\angle O_2AF=15^\circ$ より，$AF=\dfrac{r}{\tan 15^\circ}=(2+\sqrt{3})r$

また，$\triangle OO_1E\equiv\triangle OO_2F$で，$\angle O_1OE=30^\circ$，$O_1E=r$より，$OE=OF=\sqrt{3}r$

$AD=AF+FO+OE+ED$ であるから，

$\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})r+\sqrt{3}r+\sqrt{3}r+\sqrt{1+2r}$ $\quad\therefore\ \sqrt{3}-(2+3\sqrt{3})r=\sqrt{1+2r}$ $\quad\cdots$①

両辺を2乗して整理すると，$(31+12\sqrt{3})r^2-4(5+\sqrt{3})r+2=0$

両辺に $31-12\sqrt{3}$ を掛けると，$529r^2-4(119-29\sqrt{3})r+2(31-12\sqrt{3})=0$ $\quad\cdots$②

$$r=\frac{2(119-29\sqrt{3})\pm\sqrt{\{-2(119-29\sqrt{3})\}^2-529\cdot 2(31-12\sqrt{3})}}{529}$$

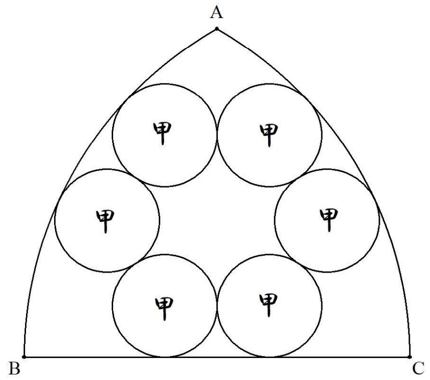
$$=\frac{238-58\sqrt{3}\pm\sqrt{2(16969-7456\sqrt{3})}}{529}$$

ここで，①より，$\sqrt{3}-(2+3\sqrt{3})r=\sqrt{1+2r}>0$ $\quad\therefore\ r<\dfrac{\sqrt{3}}{2+3\sqrt{3}}=\dfrac{9-2\sqrt{3}}{23}<\dfrac{1}{4}$ であるから，

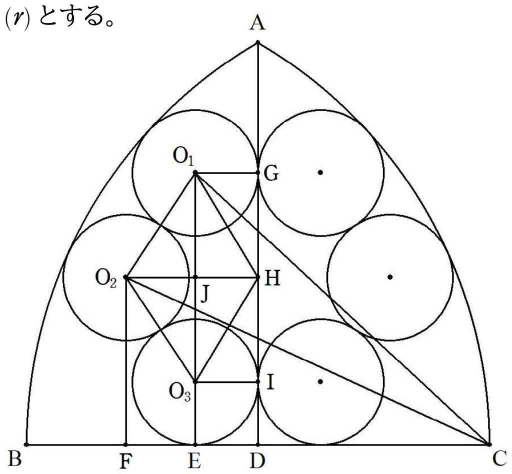
$$r=\frac{238-58\sqrt{3}-\sqrt{2(16969-7456\sqrt{3})}}{529}\quad(\fallingdotseq 0.0897683)$$

よって，甲円の半径は，$\dfrac{238-58\sqrt{3}-\sqrt{2(16969-7456\sqrt{3})}}{529}$ 答

$\boxed{6}$ A，B，Cは１辺の長さが１の正三角形の頂点で，
弧CA，弧AB は半径１の円弧である。
BC，弧CA，弧ABで囲まれた図形の中に甲円６個を図のように配置する。
甲円の半径を r とするとき，r の満たす実係数の整方程式を求めよ。また，r の近似値を求めよ。



解答　BCの中点をD，左側の甲円を上から順に $O_1(r)$，$O_2(r)$，$O_3(r)$ とする。
O_1，O_2 からBCに下した垂線の足をそれぞれE，F，
O_1，O_2，O_3 からADに下した垂線の足をそれぞれG，H，I，
O_1O_3 と O_2H の交点をJとおく。



$\triangle O_1EC$ について，$EC = r + \dfrac{1}{2}$，$CO_1 = 1 - r$ より，
$\triangle O_1EC$ に三平方の定理を適用して，

$$O_1E = \sqrt{(1-r)^2 - \left(r + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{1-4r}}{2}$$

$\triangle O_1O_2J \equiv \triangle O_3O_2J$ であるから，$JO_1 = JO_3$ より，
$O_1E = O_1J + JO_2 + O_2E = 2\,JO_3 + O_2E$ から，

$$JO_3 = \frac{1}{2}(O_1E - O_2E) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1-4r}}{2} - r\right) = \frac{\sqrt{3}\sqrt{1-4r} - 2r}{4}$$

$$\therefore O_2F = JO_3 + O_3E = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1-4r}}{2} - r\right) + r = \frac{\sqrt{3}\sqrt{1-4r} + 2r}{4} \quad \cdots①$$

また，$\triangle O_2O_3J$ について，$O_2O_3 = 2r$，$JO_3 = \dfrac{\sqrt{3}\sqrt{1-4r} - 2r}{4}$ より，

$\triangle O_2O_3J$ に三平方の定理を適用して，

$$O_2J = \sqrt{(2r)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1-4r} - 2r}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{-3 + 12r + 60r^2 + 4\sqrt{3}\,r\sqrt{1-4r}}}{4}$$

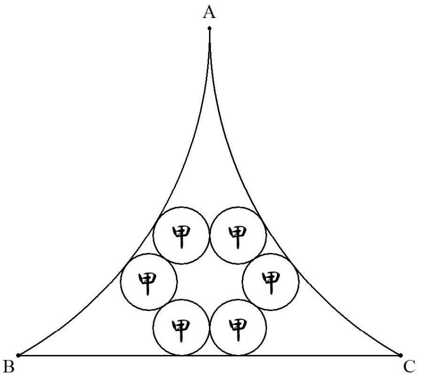
$$FC = FE + ED + DC = O_2J + O_3I + DC = \frac{\sqrt{-3 + 12r + 60r^2 + 4\sqrt{3}\,r\sqrt{1-4r}}}{4} + r + \frac{1}{2} \quad \cdots②$$

$\triangle O_2FC$ について，①，②，$CO_2 = 1 - r$ より，$\triangle O_2FC$ に三平方の定理を適用して，

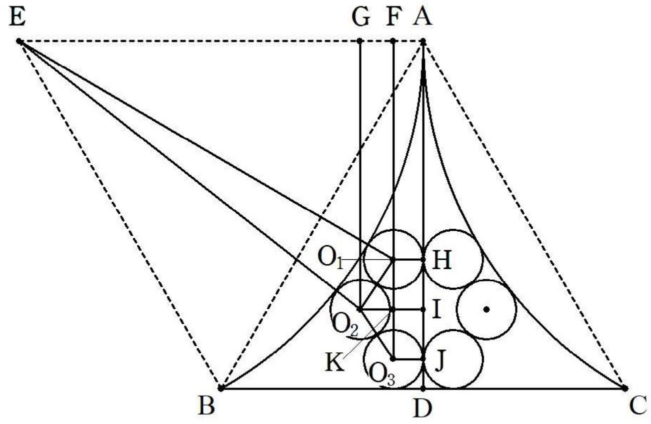
$$\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{1-4r} + 2r}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-3 + 12r + 60r^2 + 4\sqrt{3}\sqrt{1-4r}}}{4} + r + \frac{1}{2}\right)^2 = (1-r)^2$$

展開して整理すると，$(1+2r)\sqrt{-3 + 12r + 60r^2 + 4\sqrt{3}\,r\sqrt{1-4r}} = 3 - 12r - 16r^2 - 2\sqrt{3}\,r\sqrt{1-4r}$
両辺を２乗して整理すると，$3 - 18r - 9r^2 + 12r^3 + 4r^4 = 4\sqrt{3}\,r(1+r)(1-3r)\sqrt{1-4r}$
さらに，両辺を２乗して整理すると，$16r^8 + 1824r^7 + 1944r^6 - 1320r^5 - 999r^4 + 780r^3 + 222r^2 - 108r + 9 = 0$ 答
これは５次以上の方程式であるから，一般に解くことはできない。
題意に適する近似値は，$r \fallingdotseq 0.135438$ 答

7 A，B，C は 1 辺の長さが 1 の正三角形の頂点で，
弧 CA，弧 AB は半径 1 の円弧である。
BC，弧 CA，弧 AB で囲まれた図形の中に甲円 6 個
を図のように配置する。
甲円の半径を r とするとき，r の満たす実係数の
整方程式を求めよ。また，r の近似値を求めよ。



解答　BC の中点を D，AB に関する C の対称点を E，
AD の左側の甲円を上から順に $O_1(r)$，$O_2(r)$，$O_3(r)$
とする。
O_3，O_2 から AE に下した垂線の足をそれぞれ F，G，
O_1，O_2，O_3 から AD に下した垂線の足をそれぞれ
H，I，J とし，O_2I と O_1O_3 の交点を K とする。
$\triangle O_1FE$ について，$FE=1-r$，$EO_1=1+r$ より，
$\triangle O_1FE$ に三平方の定理を適用して，



$$FO_1=\sqrt{(1+r)^2-(1-r)^2}=2\sqrt{r}$$

$\triangle O_2IH\equiv\triangle O_2IJ$ より，IH＝IJ であるから，

$$HI=\frac{1}{2}HJ=\frac{1}{2}(AD-AH-JD)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-2\sqrt{r}-r\right)=\frac{\sqrt{3}-4\sqrt{r}-2r}{4}$$

$\triangle O_1O_2K$ について，$O_1O_2=2r$，$HI=\dfrac{\sqrt{3}-4\sqrt{r}-2r}{4}$ より，$\triangle O_1O_2K$ に三平方の定理を適用して，

$$O_2K=\sqrt{(2r)^2-\left(\frac{\sqrt{3}-4\sqrt{r}-2r}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{-3-4(4-\sqrt{3})r+60r^2+8(\sqrt{3}-2r)\sqrt{r}}}{4}$$

$\triangle O_2GE$ について，$O_2G=HI+FO_1=\dfrac{\sqrt{3}-4\sqrt{r}-2r}{4}+2\sqrt{r}=\dfrac{\sqrt{3}+4\sqrt{r}-2r}{4}$，

$GE=AE-AF-FG=1-r-\dfrac{\sqrt{-3-4(4-\sqrt{3})r+60r^2+8(\sqrt{3}-2r)\sqrt{r}}}{4}$，$EO_2=1+r$ より，

$\triangle O_2GE$ に三平方の定理を適用して，

$$\left(\frac{\sqrt{3}+4\sqrt{r}-2r}{4}\right)^2+\left(1-r-\frac{\sqrt{-3-4(4-\sqrt{3})r+60r^2+8(\sqrt{3}-2r)\sqrt{r}}}{4}\right)^2=(1+r)^2$$

展開して整理すると，$-8r+8r^2+2(\sqrt{3}-2r)\sqrt{r}=(1-r)\sqrt{-3-4(4-\sqrt{3})r+60r^2+8(\sqrt{3}-2r)\sqrt{r}}$

両辺を 2 乗して整理すると，

$$3+2(11-2\sqrt{3})r-(25+8\sqrt{3})r^2+4(6-\sqrt{3})r^3+4r^4=\{8\sqrt{3}+16(-1+\sqrt{3})r-8(4+3\sqrt{3})r^2+48r^3\}\sqrt{r}$$

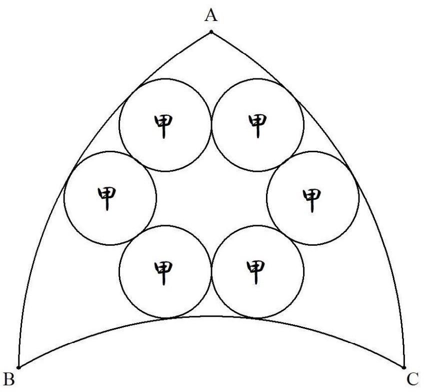
両辺を 2 乗して整理すると，

$$9-12(5+2\sqrt{3})r-2(193-16\sqrt{3})r^2+212(-3+4\sqrt{3})r^3+3(1091-160\sqrt{3})r^4-8(256+411\sqrt{3})r^5+8(437+256\sqrt{3})r^6-32(66+\sqrt{3})r^7+16r^8=0$$ 答

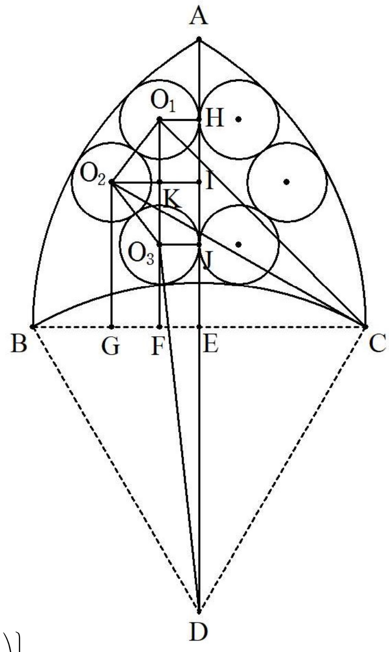
これは 5 次以上の方程式なので，一般に解くことはできない。

題意に適する近似値は，$r\fallingdotseq 0.0745096$　答

8 A，B，Cは1辺の長さが1の正三角形の頂点で，
弧BC，弧CA，弧AB は半径1の円弧である。
弧BC，弧CA，弧ABで囲まれた図形の中に甲円6個を図のように配置する。
甲円の半径をrとするとき，rの満たす実係数の整方程式を求めよ。また，rの近似値を求めよ。



解答　BCに関するAの対称点をD，BCの中点をD，
AEの左側の甲円を上から順に$O_1(r)$，$O_2(r)$，$O_3(r)$とする。
O_1，O_2からBEに下した垂線の足をそれぞれF，G，
O_1，O_2，O_3からAEに下した垂線の足をそれぞれH，I，Jとし，O_2IとO_1O_3の交点をKとする。



$\triangle O_1FC$について，$FC=\dfrac{1}{2}+r$，$CO_1=1-r$ より，
$\triangle O_1FC$に三平方の定理を適用して，

$$O_1F=HE=\sqrt{(1-r)^2-\left(\frac{1}{2}+r\right)^2}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{1-4r}}{2}\quad\cdots①$$

$\triangle O_3DJ$について，$O_3D=1+r$，$O_3J=r$より，
$\triangle O_3DJ$に三平方の定理を適用して，$JD=\sqrt{(1+r)^2-r^2}=\sqrt{1+2r}$

$$JE=JD-ED=\sqrt{1+2r}-\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\cdots②$$

①，②より，$IJ=\dfrac{1}{2}HJ=\dfrac{1}{2}(HE-JE)=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\sqrt{3}\sqrt{1-4r}}{2}-\left(\sqrt{1+2r}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$

$$=\frac{\sqrt{3}\sqrt{1-4r}-2\sqrt{1+2r}+\sqrt{3}}{4}=x\quad\cdots③\text{とおく。}$$

$\triangle O_2O_3K$について，$O_2O_3=2r$，$O_3K=IJ=x$より，
$\triangle O_2O_3K$に三平方の定理を適用して，$O_2K=\sqrt{(2r)^2-x^2}=GF$

$\triangle O_2GC$について，$O_2G=IE=IJ+JD-ED=x+\sqrt{1+2r}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$GC=GF+FE+EC=\sqrt{(2r)^2-x^2}+r+\dfrac{1}{2}$，$CO_2=1-r$ より，

$\triangle O_2GC$に三平方の定理を適用して，$\left(x+\sqrt{1+2r}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\sqrt{4r^2-x^2}+r+\dfrac{1}{2}\right)^2=(1-r)^2$

展開して整理すると，$(1+2r)\sqrt{4r^2-x^2}=(\sqrt{3}-2\sqrt{1+2r})x-(1+5r+4r^2-\sqrt{3}\sqrt{1+2r})$

両辺を2乗して整理すると，$4(2+3r+r^2-\sqrt{3}\sqrt{1+2r})x^2-2\{\sqrt{3}(3+9r+4r^2)-(5+10r+8r^2)\sqrt{1+2r}\}x+4$
$+16r+29r^2-24r^3-2\sqrt{3}(1+5r+4r^2)\sqrt{1+2r}=0$

$x=\dfrac{\sqrt{3}\sqrt{1-4r}-2\sqrt{1+2r}+\sqrt{3}}{4}$ を代入し，$\sqrt{1-4r}$ でまとめると，

$5-12r-11r^2+14r^3-2\sqrt{3}(1-r)^2\sqrt{1+2r}=(1+r)(1-3r)(-3+2\sqrt{3}\sqrt{1+2r})\sqrt{1-4r}$

両辺を2乗し，$\sqrt{1+2r}$ でまとめると，

$4-23r^2-64r^3+10r^4+352r^5+265r^6=2\sqrt{3}(1+r-12r^2-18r^3+39r^4+61r^5)\sqrt{1+2r}$

両辺を2乗して整理すると，$4-48r+44r^2+760r^3-183r^4-6288r^5-3532r^6+28704r^7+19786r^8+67776r^9-29640r^{10}+97256r^{11}+70225r^{12}=0$ 答

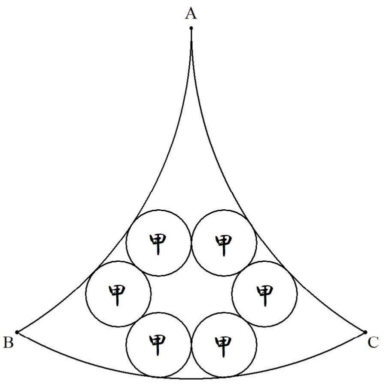
これは5次以上の方程式なので一般的に代数的に解くことはできない。

題意に適する r の近似値は， $r \fallingdotseq 0.119411$ 答

補足

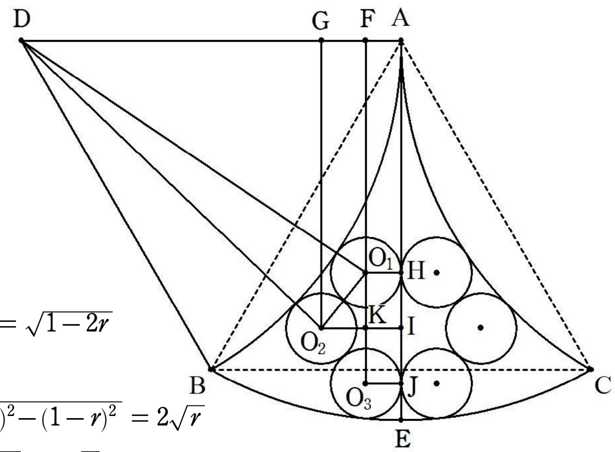
```
In[ ]:= NSolve[4 - 48 r + 44 r^2 + 760 r^3 - 183 r^4 - 6288 r^5 - 3532 r^6 + 28 704 r^7 +
数値解
        19 786 r^8 - 67 776 r^9 - 29 640 r^10 + 97 256 r^11 + 70 225 r^12 == 0, r]

Out[ ]= {{r → -0.946173 - 0.24856 i}, {r → -0.946173 + 0.24856 i},
  {r → -0.499505}, {r → -0.499465}, {r → -0.29745 - 0.297857 i},
  {r → -0.29745 + 0.297857 i}, {r → 0.119411}, {r → 0.191297},
  {r → 0.382265 - 0.0467345 i}, {r → 0.382265 + 0.0467345 i},
  {r → 0.513028 - 0.366329 i}, {r → 0.513028 + 0.366329 i}}
```

$\boxed{9}$ A，B，Cは1辺の長さが1の正三角形の頂点で，弧BC，弧CA，弧AB は半径1の円弧である。弧BC，弧CA，弧ABで囲まれた図形の中に甲円6個を図のように配置する。甲円の半径を r とするとき， r の満たす実係数の整方程式を求めよ。また， r の近似値を求めよ。



解答　ABに関するCの対称点をD，弧BCの中点をE，AEの左側の甲円を上から順に $O_1(r)$，$O_2(r)$，$O_3(r)$ とする。

O_1，O_2 からADに下した垂線の足をそれぞれF，G，O_1，O_2，O_3 からAEに下した垂線の足をそれぞれH，I，Jとし，O_2I と O_1O_3 の交点をKとする。



$\triangle AO_3J$ について，$AO_3=1-r$，$O_3J=r$ より，

$\triangle AO_3J$ に三平方の定理を適用して，$AJ=\sqrt{(1-r)^2-r^2}=\sqrt{1-2r}$

$\triangle DO_1F$ について，$FD=1-r$，$DO_1=1+r$ より，

$\triangle DO_1F$ に三平方の定理を適用して，$FO_1=AH=\sqrt{(1+r)^2-(1-r)^2}=2\sqrt{r}$

$HJ=AJ-AH=\sqrt{1-2r}-2\sqrt{r}$ より，$HI=IJ=\dfrac{\sqrt{1-2r}-2\sqrt{r}}{2}$

$\triangle O_1O_2K$ について，O1O2$=2r$，$O_1K=HI=\dfrac{\sqrt{1-2r}-2\sqrt{r}}{2}$ より，

$\triangle O_1O_2K$ にに三平方の定理を適用して，$O_2K=\sqrt{(2r)^2-\left(\dfrac{\sqrt{1-2r}-2\sqrt{r}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{-1-2r+16r^2+4\sqrt{r(1-2r)}}}{2}$

最後に，$\triangle DO_2G$ について，$DO_2=1+r$，$DG=DA-FA-GF=1-r-\dfrac{\sqrt{-1-2r+16r^2+4\sqrt{r(1-2r)}}}{2}$，

$GO_2=AH+HI=2\sqrt{r}+\dfrac{\sqrt{1-2r}-2\sqrt{r}}{2}=\dfrac{\sqrt{1-2r}+2\sqrt{r}}{2}$ であるから，$\triangle DO_2G$ に三平方の定理を適用して，

$$\left\{1-r-\frac{\sqrt{-1-2r+16r^2+4\sqrt{r(1-2r)}}}{2}\right\}^2+\left(\frac{\sqrt{1-2r}+2\sqrt{r}}{2}\right)^2=(1+r)^2$$

展開して整理すると，$-4r+4r^2+2\sqrt{r(1-2r)}=(1-r)\sqrt{-1-2r+16r^2+4\sqrt{r(1-2r)}}$

両辺を 2 乗して，$\sqrt{r(1-2r)}$ についてまとめると，$1+4r-11r^2+2r^3=4(1+2r-3r^2)\sqrt{r(1-2r)}$

両辺を 2 乗して整理すると，$1-8r-38r^2+76r^3+265r^4-572r^5+292r^6=0$　答

これは 5 次以上の方程式なので一般的に代数的に解くことはできない。

題意に適する r の近似値は，$r \fallingdotseq 0.0933617$　答

補足

```
In[1]:= NSolve[1 - 8 r - 38 r^2 + 76 r^3 + 265 r^4 - 572 r^5 + 292 r^6 == 0, r]
        数値解

Out[1]= {{r → -0.260146 - 0.0988966 i}, {r → -0.260146 + 0.0988966 i}, {r → 0.0933617},
         {r → 0.486884}, {r → 0.949475 - 0.26677 i}, {r → 0.949475 + 0.26677 i}}
```