四分円内の正方形と正三角形の１辺について　Ⅲ

数実研会員　時岡郁夫

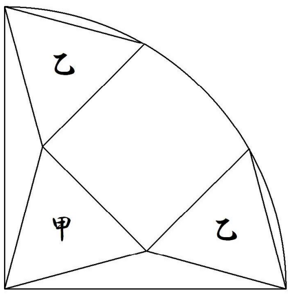
半径１の四分円内に正方形あるいは正三角形を３個以上いろいろな配置で内接させる。甲，乙，丙，…の１辺の長さをそれぞれ a，b，c，… とおいて求めてみた。

１．正三角形３個　　　　　　　　　４通り
２．正三角形２個，正方形１個　　　４通り
３．正三角形１個，正方形２個　　　３通り
４．正方形３個　　　　　　　　　　２通り
５．正三角形，正方形の合計４個以上　５通り

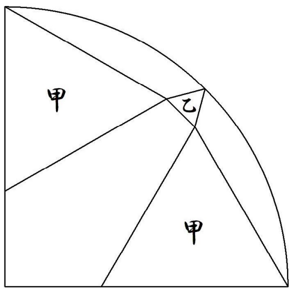
ただし，★印の問題は，a，b，c,… の値が複雑になるか或いは代数的に求めることができないことが分かった。

１．正三角形３個　　４通り

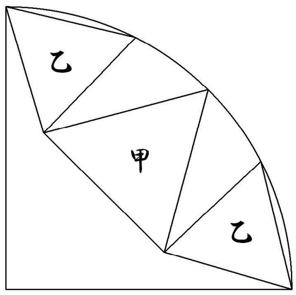
(1)



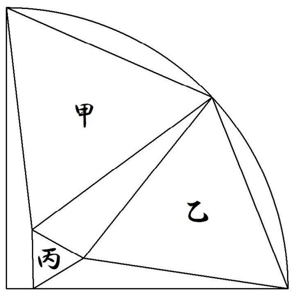
(2)



(3)

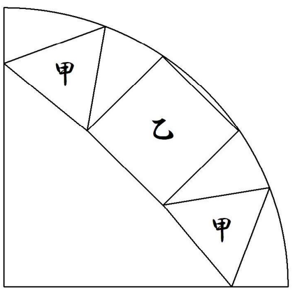


(4)

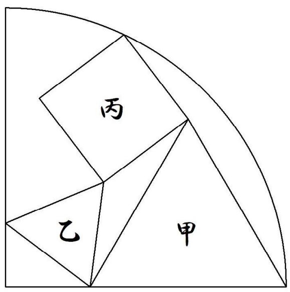


２．三角形２個，正方形１個　　４通り

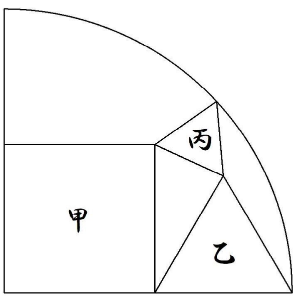
(1)　★



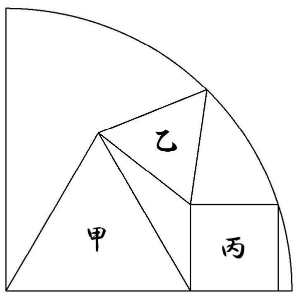
(2)



(3)



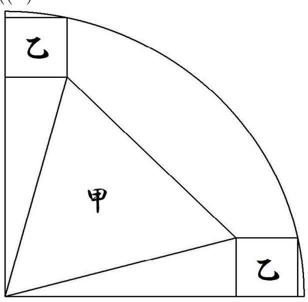
(4)



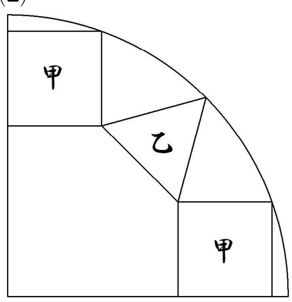
甲乙の１辺は等しい　　　乙丙の１辺は等しい

３．正三角形１個，正方形２個　　３通り

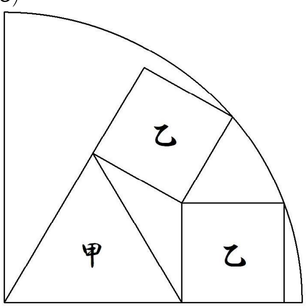
((1)



(2)

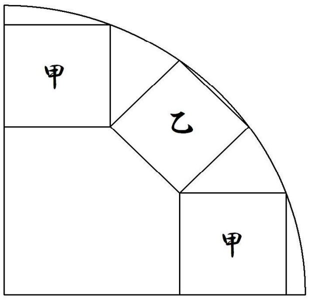


(3)

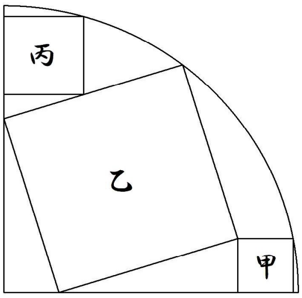


４．正方形３個　　２通り

(1)

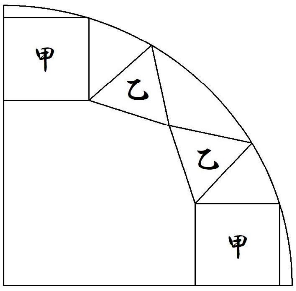


(2)

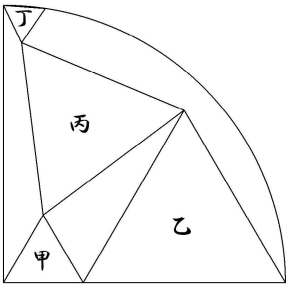


５．正三角形，正方形の合計４個以上　５通り

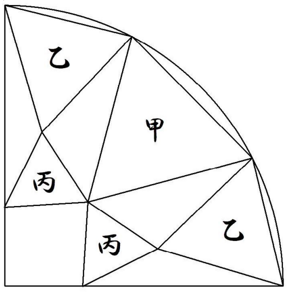
(1)　★



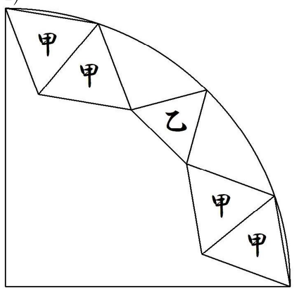
(2)



(3)

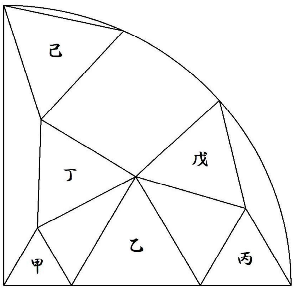


(4)



甲乙の１辺は等しい

(5)　★



６．答

１．(1)　甲：$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$　（≒ 0.517638），乙：甲と同じ

(2)　甲：$\dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$　（≒ 0.658919），乙：$\dfrac{1+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}$　（≒ 0.141281）

(3)　甲：$\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{5+10\sqrt{2}+8\sqrt{3}+2\sqrt{6}}}{2}}$　（≒ 0.594814），

乙：$\dfrac{\sqrt{6+\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}-2\sqrt{2+4\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{6}}}}{2}$　（≒ 0.466091）

(4)　甲：$\dfrac{\sqrt{6-2\sqrt{3}}}{2}$　（≒ 0.796225），乙：$\dfrac{\sqrt{8-2\sqrt{12-2\sqrt{3}}}}{2}$　（≒ 0.734294），

丙：$\dfrac{\sqrt{14-2\sqrt{3(9+4\sqrt{3})}}}{2}$　（≒ 0.208996）

２．(1)　$\sqrt{\dfrac{19+18\sqrt{3}+2\sqrt{241+450\sqrt{3}}\cos\left\{\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{1}{3}Arc\cos\dfrac{30439-3726\sqrt{3}}{(241+450\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}}\right\}}{39}}$　（≒ 0.379956）

(2)　甲：$\dfrac{136+33\sqrt{3}-\sqrt{3(1305-112\sqrt{3})}}{194}$　（≒ 0.698068），

乙：$\dfrac{\sqrt{22150-1180\sqrt{3}-6\sqrt{7856493-1067332\sqrt{3}}}}{194}$　（≒ 0.378775）

(3)　甲：$\dfrac{3(4-\sqrt{3})}{13}$　（≒ 0.523373），乙：$\dfrac{1+3\sqrt{3}}{13}$　（≒ 0.476627），

丙：$\dfrac{\sqrt{100-51\sqrt{3}}}{13}$　（≒ 0.262728）

(4)　甲：$\sqrt{\dfrac{304-11\sqrt{3}+\sqrt{38556+10966\sqrt{3}}}{1261}}$　（≒ 0.645144），

乙：$\sqrt{\dfrac{653+22\sqrt{3}-2\sqrt{38556+10966\sqrt{3}}}{1261}}$　（≒ 0.409362），

丙：$\sqrt{\dfrac{1169-146\sqrt{3}-\sqrt{562941-58884\sqrt{3}}}{2522}}$　（≒ 0.306671）

３．(1)　甲：$2\sqrt{\dfrac{8+\sqrt{3}}{61}}$　（≒ 0.798854），乙：$\sqrt{\dfrac{13-6\sqrt{3}}{61}}$　（≒ 0.206759）

(2)　甲：$\dfrac{3\sqrt{2}-8\sqrt{6}+\sqrt{707+331\sqrt{3}}}{61}$　（≒ 0.334887），

乙：$\dfrac{-7+39\sqrt{3}-2\sqrt{421-45\sqrt{3}}}{61}$　（≒ 0.38535）

(3)　甲：$\dfrac{\sqrt{39(5-2\sqrt{3})}}{13}$　（≒ 0.595347），乙：$\dfrac{\sqrt{13(5-2\sqrt{3})}}{13}$　（≒ 0.343724）

４．(1)　甲：$\sqrt{\dfrac{2(39-7\sqrt{3})}{221}}$　（≒ 0.352895），乙：$\sqrt{\dfrac{2(91-22\sqrt{3})}{221}}$　（≒ 0.325088）

(2)　甲：$\sqrt{\dfrac{5-2\sqrt{5}}{15}}$　（≒ 0.187592），乙：、$\sqrt{\dfrac{15-4\sqrt{5}}{15}}$　（≒ 0.635386），

丙：$\dfrac{\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{15}$　（≒ 0.271486）

5．(1)　1辺の長さ a の満たす高次方程式の1つは，

$4-64a^2+197a^4+92a^6-70a^8-1012a^{10}+997a^{12}=0$ （$a \fallingdotseq 0.293458$）

(2)　甲：$\dfrac{1-\sqrt{3}+\sqrt[4]{12}}{4}$ （$\fallingdotseq 0.28229$），乙：$\dfrac{3+\sqrt{3}-\sqrt[4]{12}}{4}$ （$\fallingdotseq 0.71771$），

丙：$\dfrac{\sqrt{4+3\sqrt{3}-3\sqrt{3+2\sqrt{3}}}}{2}$ （$\fallingdotseq 0.626253$），丁：$\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{3}-2\sqrt[4]{108}}}{2}$ （$\fallingdotseq 0.148727$）

(3)　甲：$\dfrac{15\sqrt{2}-19\sqrt{3}+2\sqrt{3(166+61\sqrt{3})}}{52}$ （$\fallingdotseq 0.610925$），

乙：$\sqrt{\dfrac{46+5\sqrt{3}-\sqrt{1775+356\sqrt{3}}}{26}}$ （$\fallingdotseq 0.470522$），

丙：$\dfrac{\sqrt{2(193+19\sqrt{3}-\sqrt{27347+11728\sqrt{3}})}}{13}$ （$\fallingdotseq 0.299825$）

(4)　甲：$\sqrt{\dfrac{9+\sqrt{3}-\sqrt{6}-\sqrt{6(9+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6})}}{6}}$ （$\fallingdotseq 0.330388$），

乙：$\dfrac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}-2\sqrt{9+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}}{4}$ （$\fallingdotseq 0.274969$）

(5)　甲の1辺 a は，$a=\dfrac{1}{63}\{\sqrt[3]{11429+3072\sqrt{3}-42\sqrt{6(2702-999\sqrt{3})}}$

$+\sqrt[3]{11429+3072\sqrt{3}+42\sqrt{6(2702-999\sqrt{3})}}+2-22\sqrt{3}\}$ （$\fallingdotseq 0.235805$）

乙の1辺 b は，$b=\dfrac{1}{63}\{\sqrt[3]{-\dfrac{3}{2}(15723-605\sqrt{3})-189\sqrt{\dfrac{1}{2}(27362+2635\sqrt{3})}}$

$+\sqrt[3]{-\dfrac{3}{2}(15723-605\sqrt{3})+189\sqrt{\dfrac{1}{2}(27362+2635\sqrt{3})}}+8(3+2\sqrt{3})\}$ （$\fallingdotseq 0.447981$）

丙：$1-a-b$ （$\fallingdotseq 0.316214$），

丁：$\sqrt{a^2-ab+b^2}$ （$\fallingdotseq 0.388143$），

戊：$\sqrt{a^2+3ab+3b^2-2a-3b+1}$ （$\fallingdotseq 0.398774$），

己：$\sqrt{3a^2+b^2-\sqrt{3}\,a-\sqrt{3}\,b+1}$ （$\fallingdotseq 0.427957$）

【お願い】他の配置があれば，ご連絡をお願いします。連絡先： tokioka@i4.gmobb.jp

【参考文献】特になし

(2024/11/30)