

ある連立方程式の別解について

数実研会員 時岡郁夫

数実研会員の村田 洋一先生の第132回と第130回のレポートに取り上げられている連立方程式の別解である。

前者は未知数 x, y, z , 3個の対称式の連立方程式である。示されている解答は、与えられた方程式を $x+y+z=a$ 等とおき、与えられた方程式を基本対称式で表し、求めている。 $a=0$ の場合、3次方程式が現れ、近似値が示されている。別解は、微分を利用して、3次方程式の解も Arccos を利用して求めた。

後者は、 $a_n = ac^n + bd^n$ とおくと、 $a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = \frac{1}{4}$ となる連立方程式である。別解は、漸化式を利用する解法である。

さらに、未知数の個数と次数を高くした類題を考えてみた。

1. 次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 20 \\ x^4 + y^4 + z^4 = 98 \end{cases}$$

出典：第130回数実研レポート（2024/8/24）

「私の数学の散歩道(50)シンプルな三元四次連立方程式を解いてみたが、それでも大変」（数実研会員 村田 洋）

解答 $a_n = x^n + y^n + z^n$ とおくと、 $a_2 = 14, a_3 = 20, a_4 = 98$ である。

x, y, z を解にもつ3次方程式を $X^3 + pX^2 + qX + r = 0$ とおく。

$f(X) = X^3 + pX^2 + qX + r$ とおくと、 $f'(X) = 3X^2 + 2pX + q$

$$\frac{Xf'(X)}{f(X)} = \frac{3X^3 + 2pX^2 + qX}{X^3 + pX^2 + qX + r} = a_0 + \frac{a_1}{X} + \frac{a_2}{X^2} + \frac{a_3}{X^3} + \frac{a_4}{X^4} + \dots \text{とおくことができる。} \quad (\times)$$

係数を掃き出して、 a_4 が得られるまで割り算を実行すると、

$$\begin{array}{r} 3, -p, p^2 - 2q, -p^3 + 3pq - 3r, p^4 - 4p^2q + 2q^2 + 4pr, \\ 1, p, q, r \overline{) 3, 2p, q, 0} \\ \hline 3, 3p, 3q, 3r \\ -p, -2q, -3r \\ \hline -p, -p^2, -pq, -pr \\ \hline p^2 - 2q, pq - 2r, pr \\ \hline p^2 - 2q, p^3 - 2pq, p^2q - 2q^2, p^2r - qr \\ \hline -p^3 + 3pq - 3r, -p^2q + 2q^2 + pr, -p^2r + 2qr \\ \hline -p^3 + 3pq - 3r, -p^4 + 3p^2q - 3pr, -p^3q + 3pq^2 - 3qr, -p^3r + 3pqr - 3r^2 \\ \hline p^4 - 4p^2q + 2q^2 + 4pr, \dots \end{array}$$

したがって、 $a_2 = p^2 - 2q = 14 \quad \dots ①, a_3 = -p^3 + 3pq - 3r = 20 \quad \dots ②, a_4 = p^4 - 4p^2q + 2q^2 + 4pr = 98 \quad \dots ③$

$$① \text{より, } q = \frac{p^2 - 14}{2} \quad \dots ④$$

$$④ \text{を} ② \text{に代入すると, } r = \frac{p^3 - 42p - 40}{6} \quad \dots ⑤$$

④, ⑤を③に代入して整理すると、 $p(p-2)(p-8)(p+10)=0 \quad \therefore p = 0, 2, 8, -10$

[1] $p=2$ のとき、 $(X+2)(X-1)(X-3)=0 \quad X=-2, 1, 3 \quad \therefore \{x, y, z\} = \{-2, 1, 3\}$

[2] $p=8$ のとき、 $(X-4)(X^2+4X+9)=0 \quad X=4, 2\pm\sqrt{5}i \quad \therefore \{x, y, z\} = \{4, 2\pm\sqrt{5}i\}$

$$[3] \quad p = -10 \text{ のとき, } (X+5)(X^2+5X+18)=0 \quad X = -5, \frac{-5 \pm \sqrt{47}i}{2} \quad \therefore \{x, y, z\} = \left\{ -5, \frac{-5 \pm \sqrt{47}i}{2} \right\}$$

$$[4] \quad p = 0 \text{ のとき, } X^3 - 7X - \frac{20}{3} = 0 \quad \dots ⑥$$

$$g(X) = X^3 - 7X - \frac{20}{3} \text{ とおくと, } g'(X) = 3X^2 - 7 = 0 \text{ より, } X = \pm \frac{\sqrt{21}}{3}$$

$$g\left(-\frac{\sqrt{21}}{3}\right) = \frac{2(-30 + 7\sqrt{21})}{9} > 0, \quad g\left(\frac{\sqrt{21}}{3}\right) = -\frac{2(30 + 7\sqrt{21})}{9} < 0$$

極値の積が負となるので、方程式 $g(X) = 0$ は異なる 3 つの実数解をもつ。

$$X = a \cos \theta \quad (a > 0, 0 \leq \theta \leq \pi) \text{ とおくと, ⑥より, } a^3 \cos^3 \theta - 7a \cos \theta = \frac{20}{3}$$

$$\text{両辺に } \frac{4}{a^3} \text{ を掛けると, } 4 \cos^3 \theta - \frac{28}{a^2} \cos \theta = \frac{80}{3a^3} \quad \dots ⑦$$

3 倍角の公式 $\cos 3\theta = 4\cos^4 \theta - 3\cos \theta$ が利用できるように a ($a > 0$) の値を定める。

$$-\frac{28}{a^2} = -3 \text{ より, } a = \frac{2\sqrt{21}}{3}$$

$$\text{このとき} ⑦ \text{ より, } 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta = \frac{10\sqrt{21}}{49} \quad \cos 3\theta = \frac{10\sqrt{21}}{49}$$

$$\therefore \theta = \frac{1}{3} \operatorname{Arc} \cos \frac{10\sqrt{21}}{49}, \quad \frac{2\pi}{3} \pm \frac{1}{3} \operatorname{Arccos} \frac{10\sqrt{21}}{49}$$

したがって、

$$X = \frac{2\sqrt{21}}{3} \cos \frac{1}{3} \operatorname{Arc} \cos \frac{10\sqrt{21}}{49} \doteq 3.03285,$$

$$X = \frac{2\sqrt{21}}{3} \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{3} \operatorname{Arccos} \frac{10\sqrt{21}}{49} \right) \doteq -1.19802,$$

$$X = \frac{2\sqrt{21}}{3} \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{3} \operatorname{Arccos} \frac{10\sqrt{21}}{49} \right) \doteq -1.83483$$

$$\{x, y, z\} = \left\{ \frac{2\sqrt{21}}{3} \cos \frac{1}{3} \operatorname{Arccos} \frac{10\sqrt{21}}{49}, \frac{2\sqrt{21}}{3} \cos \left(\frac{2\pi}{3} \pm \frac{1}{3} \operatorname{Arccos} \frac{10\sqrt{21}}{49} \right) \right\}$$

よって、以上 [1] ~ [4] により、

$$\begin{aligned} \{x, y, z\} &= \{-2, 1, 3\}, \quad \{4, 2 \pm \sqrt{5}i\}, \quad \{x, y, z\} = \left\{ -5, \frac{-5 \pm \sqrt{47}i}{2} \right\}, \\ &\quad \left\{ \frac{2\sqrt{21}}{3} \cos \frac{1}{3} \operatorname{Arccos} \frac{10\sqrt{21}}{49}, \frac{2\sqrt{21}}{3} \cos \left(\frac{2\pi}{3} \pm \frac{1}{3} \operatorname{Arccos} \frac{10\sqrt{21}}{49} \right) \right\} \quad \text{□} \end{aligned}$$

ただし、 $\{x, y, z\} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ は、

6通りの解 $\{x, y, z\} = (\alpha, \beta, \gamma), (\alpha, \gamma, \beta), (\beta, \gamma, \alpha), (\beta, \alpha, \gamma), (\gamma, \alpha, \beta), (\gamma, \beta, \alpha)$ を表すものとする。

(※)

$f(X) = (X-x)(X-y)(X-z)$ とおく。

絶対値を取り、対数を取ると、 $\log|f(X)| = \log|(X-x)(X-y)(X-z)| = \log|X-x| + \log|X-y| + \log|X-z|$

両辺を X で微分すると、

$$\frac{f'(X)}{f(X)} = \frac{1}{X-x} + \frac{1}{X-y} + \frac{1}{X-z}$$

両辺に X を掛けると、

$$\frac{Xf'(X)}{f(X)} = \frac{X}{X-x} + \frac{X}{X-y} + \frac{X}{X-z} = \frac{1}{1 - \frac{x}{X}} + \frac{1}{1 - \frac{y}{X}} + \frac{1}{1 - \frac{z}{X}}$$

$\max\left(\left|\frac{x}{X}\right|, \left|\frac{y}{X}\right|, \left|\frac{z}{X}\right|\right) < 1$ なる X について,

$$\begin{aligned} \frac{Xf'(X)}{f(X)} &= \left(1 + \frac{x}{X} + \frac{x^2}{X^2} + \frac{x^3}{X^3} + \dots\right) + \left(1 + \frac{y}{X} + \frac{y^2}{X^2} + \frac{y^3}{X^3} + \dots\right) + \left(1 + \frac{z}{X} + \frac{z^2}{X^2} + \frac{z^3}{X^3} + \dots\right) \\ &= 3 + \frac{x+y+z}{X} + \frac{x^2+y^2+z^2}{X^2} + \frac{x^3+y^3+z^3}{X^3} + \dots = a_0 + \frac{a_1}{X} + \frac{a_2}{X^2} + \frac{a_3}{X^3} + \dots \quad \text{總} \end{aligned}$$

2. 次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} a+b=1 \\ ac+bd=\frac{1}{2} \\ ac^2+bd^2=\frac{1}{3} \\ ac^3+bd^3=\frac{1}{4} \end{cases}$$

出典：第132回数実研レポート（2025/2/5）

私の数学の散歩道(51)見掛け上簡単な四元四次連立方程式を解いてみたが結構大変。（数実研会員 村田 洋一）

解答 $a_n = ac^n + bd^n$ とおくと, $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{1}{4}$ …①

c, d を解にもつ2次方程式を, $x^2 + px + q = 0$ …②とおく。

c は②の解であるから, $c^2 + pc + q = 0$

この両辺に ac^n を掛けると, $ac^{n+2} + p \cdot ac^{n+1} + q \cdot ac^n = 0$ …③

同様に, d は②の解であるから, $d^2 + pd + q = 0$

この両辺に bd^n を掛けると, $bd^{n+2} + p \cdot bd^{n+1} + q \cdot bd^n = 0$ …④

③+④より, $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ …⑤

漸化式⑤で, $n=0$ とおくと, $\frac{1}{3} + p \cdot \frac{1}{2} + q \cdot 1 = 0$ …⑥

$n=1$ とおくと, $\frac{1}{4} + p \cdot \frac{1}{3} + q \cdot \frac{1}{2} = 0$ …⑦

⑥, ⑦より, $p = -1$, $q = \frac{1}{6}$

このとき, ②より, c, d は, $x^2 - x + \frac{1}{6} = 0$ の2解である。

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6} \text{ より, } (c, d) = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}\right), \left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}, \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$$

次に, ①より, $b = 1 - a$

$$\text{これを②に代入すると, } ac + (1-a)d = \frac{1}{2}$$

$$c \neq d \text{ であるから, } a = \frac{\frac{1}{2} - d}{c - d}$$

$$[1] \quad (c, d) = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}\right) \text{ のとき, } a = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3+\sqrt{3}}{6}}{\frac{3-\sqrt{3}}{6} - \frac{3+\sqrt{3}}{6}} = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2}$$

$$[2] \quad (c, d) = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}, \frac{3-\sqrt{3}}{6} \right) のとき, \quad a = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3-\sqrt{3}}{6}}{\frac{3+\sqrt{3}}{6} - \frac{3-\sqrt{3}}{6}} = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2}$$

よって, $(a, b, c, d) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}, \frac{3-\sqrt{3}}{6} \right)$ 答

補足 $ac^4 + bd^4$ の値

$$ac^4 + bd^4 = a_4 \text{ であるから, 漸化式⑤で, } n=2 \text{ とおくと, } a_4 + (-1) \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = 0 \quad \therefore a_4 = ac^4 + bd^4 = \frac{7}{36}$$

3. 次の連立 6 元 6 次方程式を解け。

$$\begin{cases} p+q+r=3 \\ px+qy+rz=5 \\ px^2+qy^2+rz^3=7 \\ px^3+qy^3+rz^3=11 \\ px^4+qy^4+rz^4=13 \\ px^5+qy^5+rz^5=17 \end{cases}$$

解答

$px^n + qy^n + rz^n = a_n$ とおくと, $a_0 = 3, a_1 = 5, a_2 = 7, a_3 = 11, a_4 = 13, a_5 = 17$ である。

x, y, z を解にもつ 3 次方程式を $t^3 + kt^2 + lt + m = 0 \dots ①$ とおく。

x は①の解であるから, $x^3 + kx^2 + lx + m = 0$

両辺に ax^n を掛けると, $ax^{n+3} + k \cdot ax^{n+2} + l \cdot ax^{n+1} + m \cdot ax^n = 0 \dots ②$

同様に, y は①の解であるから, $y^3 + ky^2 + ly + m = 0$

両辺に by^n を掛けると, $by^{n+3} + k \cdot by^{n+2} + l \cdot by^{n+1} + m \cdot by^n = 0 \dots ③$

z も①の解であるから, $z^3 + kz^2 + lz + m = 0$

両辺に cz^n を掛けると, $cz^{n+3} + k \cdot cz^{n+2} + l \cdot cz^{n+1} + m \cdot cz^n = 0 \dots ④$

②+③+④より, $a_{n+3} + ka_{n+2} + la_{n+1} + ma_n = 0 \dots ⑤$

漸化式⑤に,

$n=0$ を代入すると, $11 + 7k + 5l + 3m = 0 \dots ⑥$

$n=1$ を代入すると, $13 + 11k + 7l + 5m = 0 \dots ⑦$

$n=2$ を代入すると, $17 + 13k + 11l + 7m = 0 \dots ⑧$

⑥, ⑦, ⑧を連立させて解くと, $k = -2, l = -3, m = 6$

したがって, 漸化式⑤は, $a_{n+3} - 2a_{n+2} - 3a_{n+1} + 6a_n = 0 \dots ⑤'$

また, $k = -2, l = -3, m = 6$ のとき, ①は, $(t-2)(t^2-3) = 0 \quad \therefore t = 2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$

$\{x, y, z\} = \{2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

[1] $x, y, z = (2, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$ のとき, $a_n = p \cdot 2^n + q(\sqrt{3})^n + r(-\sqrt{3})^n$ より,

$$a_0 = p + q + r = 3, \quad a_1 = 2p + \sqrt{3}q - \sqrt{3}r = 5, \quad a_2 = 4p + 3q + 3r = 7$$

$$\text{この 3 式を連立させて解くと, } p = -2, \quad q = \frac{5+3\sqrt{3}}{2}, \quad r = \frac{5-3\sqrt{3}}{2}$$

同様に,

[2] $x, y, z = (2, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$ のとき, $p = -2, \quad q = \frac{5-3\sqrt{3}}{2}, \quad r = \frac{5+3\sqrt{3}}{2}$

$$[3] \quad x, y, z = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 2) のとき, \quad p = \frac{5+3\sqrt{3}}{2}, \quad q = \frac{5-3\sqrt{3}}{2}, \quad r = -2$$

$$[4] \quad x, y, z = (\sqrt{3}, 2, -\sqrt{3}) のとき, \quad p = \frac{5+3\sqrt{3}}{2}, \quad q = -2, \quad r = \frac{5-3\sqrt{3}}{2}$$

$$[5] \quad x, y, z = (-\sqrt{3}, 2, \sqrt{3}) のとき, \quad p = \frac{5-3\sqrt{3}}{2}, \quad q = -2, \quad r = \frac{5+3\sqrt{3}}{2}$$

$$[6] \quad x, y, z = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2) のとき, \quad p = \frac{5-3\sqrt{3}}{2}, \quad q = \frac{5+3\sqrt{3}}{2}, \quad r = -2$$

よって、求める解は次の6組である。

$$(x, y, z, p, q, r) =$$

$$\left(2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, -2, \frac{5+3\sqrt{3}}{2}, \frac{5-3\sqrt{3}}{2}\right), \quad \left(2, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, -2, \frac{5-3\sqrt{3}}{2}, \frac{5+3\sqrt{3}}{2}\right), \\ \left(\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 2, \frac{5+3\sqrt{3}}{2}, \frac{5-3\sqrt{3}}{2}, -2\right), \quad \left(\sqrt{3}, 2, -\sqrt{3}, \frac{5+3\sqrt{3}}{2}, -2, \frac{5-3\sqrt{3}}{2}\right), \\ \left(-\sqrt{3}, 2, \sqrt{3}, \frac{5-3\sqrt{3}}{2}, -2, \frac{5+3\sqrt{3}}{2}\right), \quad \left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2, \frac{5-3\sqrt{3}}{2}, \frac{5+3\sqrt{3}}{2}, -2\right) \quad \text{□}$$

補足 $px^n + qy^n + rz^n$ の値について

漸化式⑤を利用して、 a_n の値を次々と求められる。

$$\dots, \quad a_{-2} = \frac{3}{4}, \quad a_{-1} = \frac{7}{6}, \quad a_6 = 7, \quad a_7 = -13, \quad \dots$$

また、[1]のとき、

$$a_n = px^n + qy^n + rz^n = -2 \cdot 2^n + \frac{5+3\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3})^n + \frac{5-3\sqrt{3}}{2}(-\sqrt{3})^n$$

$$= \frac{1}{2}[(5+3\sqrt{3})(\sqrt{3})^n + (5-3\sqrt{3})(-\sqrt{3})^n - 2^{n+2}]$$

$$[2] \sim [6] のときも、 \quad a_n = \frac{1}{2}[(5+3\sqrt{3})(\sqrt{3})^n + (5-3\sqrt{3})(-\sqrt{3})^n - 2^{n+2}] となるから、$$

$$px^n + qy^n + rz^n = \frac{1}{2}[(5+3\sqrt{3})(\sqrt{3})^n + (5-3\sqrt{3})(-\sqrt{3})^n - 2^{n+2}] \quad (n \text{ は整数})$$

$$4. \text{ 連立 } 8 \text{ 元 } 8 \text{ 次方程式} \quad \left\{ \begin{array}{l} a+b+c+d=2 \\ ap+bq+cr+ds=3 \\ ap^2+bq^2+cr^2+ds^2=5 \\ ap^3+bq^3+cr^3+ds^3=7 \\ ap^4+bq^4+cr^4+ds^5=11 \\ ap^5+bq^5+cr^5+ds^5=13 \\ ap^6+bq^6+cr^6+ds^6=19 \\ ap^7+bq^7+cr^7+ds^7=23 \end{array} \right. \quad \text{を満たす } a, b, c, d, p, q, r, s \text{ について,}$$

$ap^8 + bq^8 + cr^8 + dr^8$ の値を求めよ。

解答 $ap^n + bq^n + cr^n + ds^n = a_n$ とおくと、 $a_0 = 2, a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 7, a_4 = 11, a_5 = 13, a_6 = 19, a_7 = 23$ である。

p, q, r, s を解にもつ4次方程式を $x^4 + ex^3 + fx^2 + gx + h = 0$ ……①とおく。

p は①の解であるから、 $p^4 + ep^3 + fp^2 + gp + h = 0$

両辺に ap^n を掛けると, $ap^{n+4} + e \cdot ap^{n+3} + f \cdot ap^{n+2} + g \cdot ap^{n+1} + h \cdot ap^n = 0 \quad \dots(2)$

同様に, q, r, s も①の解であるから, $bq^{n+4} + e \cdot bq^{n+3} + f \cdot bq^{n+2} + g \cdot bq^{n+1} + h \cdot bq^n = 0 \quad \dots(3)$

$cr^{n+4} + e \cdot cr^{n+3} + f \cdot cr^{n+2} + g \cdot cr^{n+1} + h \cdot cr^n = 0 \quad \dots(4)$

$ds^{n+4} + e \cdot ds^{n+3} + f \cdot ds^{n+2} + g \cdot ds^{n+1} + h \cdot ds^n = 0 \quad \dots(5)$

②+③+④+⑤より, $a_{n+4} + ea_{n+3} + fa_{n+2} + ga_{n+1} + ha_n = 0 \quad \dots(6)$

漸化式⑥に,

$n=0$ を代入すると, $11 + 7e + 5f + 3g + 2h = 0 \quad \dots(7)$

$n=1$ を代入すると, $13 + 11e + 7f + 5g + 3h = 0 \quad \dots(8)$

$n=2$ を代入すると, $19 + 13e + 11f + 7g + 5h = 0 \quad \dots(9)$

$n=3$ を代入すると, $23 + 19e + 13f + 11g + 7h = 0 \quad \dots(10)$

⑦, ⑧, ⑨, ⑩を連立させて解くと, $e = -6, f = 6, g = 19, h = -28$

このとき⑥は, $a_{n+4} - 6a_{n+3} + 6a_{n+2} + 19a_{n+1} - 28a_n = 0$

これに $n=4$ を代入すると, $a_8 - 6 \cdot 23 + 6 \cdot 19 + 19 \cdot 13 - 28 \cdot 11 = 0 \quad \therefore a_8 = 85$

よって, $ap^8 + bq^8 + cr^8 + dr^8 = 85 \quad \text{答}$

(2025/5/28 tokioka@i4.gmobb.jp)