

2 次曲線上に頂点をもつ正三角形の 1 辺について

数実研会員 時岡郁夫

【2004 東京大】 xy 平面の放物線 $y=x^2$ 上の 3 点 P, Q, R が次の条件を満たしている。

$\triangle PQR$ は 1 辺の長さ a の正三角形であり, 点 P, Q を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。

このとき, a の値を求めよ。

この問題を一般化してみた。

xy 平面の次の 2 次曲線 C 上に 3 点 P, Q, R を, $\triangle PQR$ が正三角形になるようにとる。点 P, Q を通る直線の傾きが m のとき, 正三角形の 1 辺の長さを求めよ。

① C が放物線 $y=ax^2$ のとき

② C が楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ のとき

③ C が双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ のとき

④ C が直角双曲線 $xy=a$ のとき

補題

$P(x_1, mx_1+c)$, $Q(x_2, mx_2+c)$ ($x_1 < x_2$) のとき,

$$(1) \quad PQ = (x_2 - x_1)\sqrt{m^2 + 1}$$

(2) R (x_3, y_3) は, Q を P 中心に $\pm 60^\circ$ だけ回転させた点であるとき,

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2 \mp \sqrt{3}m(x_2 - x_1)}{2}, \quad y_3 = \frac{2c + m(x_1 + x_2) \pm \sqrt{3}(x_2 - x_1)}{2} \quad (\text{複号同順})$$

証明

(1) 2 点間の距離の公式により,

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \{(mx_2 + c) - (mx_1 + c)\}^2} = |x_2 - x_1|\sqrt{1 + m^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{m^2 + 1} \quad \text{終}$$

(2) 複素平面で考える。

$P(p)$, $Q(q)$, $R(r)$ とおくと, $p = x_1 + (mx_1 + c)i$, $q = x_2 + (mx_2 + c)i$ で, $r = x_3 + y_3i$ とおく。

R は, Q を P 中心に $\pm 60^\circ$ だけ回転させた点であるから, $r - p = (q - p)(\cos(\pm 60^\circ) + i\sin(\pm 60^\circ))$

$$r = x_1 + (mx_1 + c)i + \{x_2 + (mx_2 + c)i - \{x_1 + (mx_1 + c)i\}\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\}$$

$$= x_1 + (mx_1 + c)i + \frac{x_2 - x_1}{2}(1 + mi)(1 \pm \sqrt{3}i) = x_1 + (mx_1 + c)i + \frac{x_2 - x_1}{2}\{1 \mp \sqrt{3}m + (m \pm \sqrt{3})i\}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 \mp \sqrt{3}m(x_2 - x_1)}{2} + \frac{2c + m(x_1 + x_2) \pm \sqrt{3}(x_2 - x_1)}{2}i$$

$$\text{よって, } x_3 = \frac{x_1 + x_2 \mp \sqrt{3}m(x_2 - x_1)}{2}, \quad y_3 = \frac{2c + m(x_1 + x_2) \pm \sqrt{3}(x_2 - x_1)}{2} \quad (\text{複号同順}) \quad \text{終}$$

① C が放物線 $y=ax^2$ のとき

【解答】 放物線 $y=ax^2$ …① 点 P, Q を通る直線の方程式を, $y=mx+c$ …②とおく。

②を①に代入して, $mx+c=ax^2$

整理すると, $ax^2 - mx - c = 0$ …③

この x についての 2 次方程式の判別式を D とおく。

③は異なる 2 実解をもつから, $D = m^2 + 4ac > 0$ …④

このとき③より, $x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 4ac}}{2a}$

$P(x_1, mx_1 + c)$, $Q(x_2, mx_2 + c)$ ($x_1 < x_2$) とおくと,

[1] $a > 0$ のとき

$$x_1 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4ac}}{2a} \text{ であるから, } x_1 + x_2 = \frac{m}{a}, \quad x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{m^2 + 4ac}}{a} \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\text{正三角形の1辺PQは, 補題(1)より, } PQ = (x_2 - x_1)\sqrt{m^2 + 1} = \frac{\sqrt{m^2 + 4ac} \sqrt{m^2 + 1}}{a} \quad \dots \textcircled{6}$$

$R(x_3, y_3)$ は, Q を P 中心に $\pm 60^\circ$ だけ回転した点であるから, 補題(2)より,

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2 \mp \sqrt{3}m(x_2 - x_1)}{2}, \quad y_3 = \frac{2c + m(x_1 + x_2) \pm \sqrt{3}(x_2 - x_1)}{2} \quad (\text{複号同順}) \text{ であるから, } \textcircled{5} \text{ を代入して,}$$

$$x_3 = \frac{m \mp \sqrt{3}m\sqrt{m^2 + 4ac}}{2a}, \quad y_3 = \frac{2ac + m^2 \pm \sqrt{3}\sqrt{m^2 + 4ac}}{2a} \quad \dots \textcircled{7} \text{ となる。}$$

この $R(x_3, y_3)$ は①上の点であるから, $y_3 = ax_3^2$

$$\text{これに} \textcircled{7} \text{ を代入すると, } \frac{2ac + m^2 \pm \sqrt{3}\sqrt{m^2 + 4ac}}{2a} = a \left(\frac{m \mp \sqrt{3}m\sqrt{m^2 + 4ac}}{2a} \right)^2$$

$$\text{整理すると, } (3m^2 - 1)(m^2 + 4ac) = \mp 2\sqrt{3}(m^2 + 1)\sqrt{m^2 + 4ac}$$

$$\textcircled{4} \text{ より, } \sqrt{m^2 + 4ac} \neq 0 \text{ であるから, 両辺を } \sqrt{m^2 + 4ac} \text{ で割ると, } (3m^2 - 1)\sqrt{m^2 + 4ac} = \mp 2\sqrt{3}(m^2 + 1)$$

$$\text{両辺を2乗して整理すると, } 4ac(3m^2 - 1)^2 = -(m^2 - 3)(9m^4 + 9m^2 + 4) \quad \dots \textcircled{8}$$

ここで, $3m^2 - 1 \neq 0$ である。

($\because$) $3m^2 - 1 = 0 \therefore m = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき, 直線 PQ と x 軸とのなす角は, $\pm 30^\circ$ となるから, 直線 PR または QR

が y 軸と平行な直線となり, R は①上の点とならないから。

$$\textcircled{8} \text{ より, } c = -\frac{(m^2 - 3)(9m^4 + 9m^2 + 4)}{4a(3m^2 - 1)^2}$$

$$\text{これを} \textcircled{3} \text{ に代入して整理すると, } PQ = \frac{2\sqrt{3}}{a} \sqrt{\frac{(m^2 + 1)^3}{(3m^2 - 1)^2}} = \frac{2\sqrt{3}(m^2 + 1)\sqrt{m^2 + 1}}{a|3m^2 - 1|}$$

[2] $a < 0$ のとき

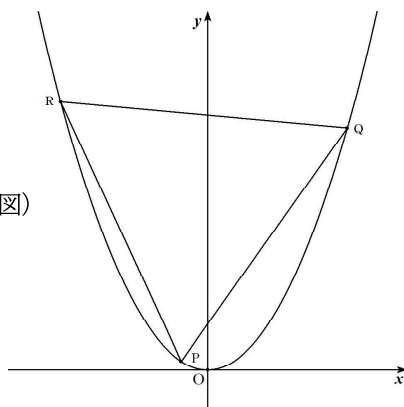
$$\text{同様に計算して, } PQ = -\frac{2\sqrt{3}(m^2 + 1)\sqrt{m^2 + 1}}{a|3m^2 - 1|} \text{ が得られる。}$$

$$\text{以上[1], [2]により, } PQ = \frac{2\sqrt{3}(m^2 + 1)\sqrt{m^2 + 1}}{|a(3m^2 - 1)|} \quad \text{図}$$

例 $a = 1, m = \sqrt{2}$ のとき, $PQ = \frac{18}{5}$ (冒頭の【2004 東京大】) (右は参考図)

$$P\left(\frac{5\sqrt{2} - 6\sqrt{3}}{10}, \frac{79 - 30\sqrt{6}}{50}\right), \quad Q\left(\frac{5\sqrt{2} + 6\sqrt{3}}{10}, \frac{79 + 30\sqrt{6}}{50}\right),$$

$$R\left(-\frac{13\sqrt{2}}{10}, \frac{169}{50}\right)$$



2 Cが楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ のとき

【解答】 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ …① 点 P, Q を通る直線の方程式を, $y = mx + c$ …②とおく。

②を①に代入して, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+c)^2}{b^2} = 1$

整理すると, $(a^2m^2+b^2)x^2 + 2a^2cmx + a^2(c^2-b^2) = 0$ …③

この x についての2方程式の判別式を D とおく。

③は異なる2実解をもつから, $\frac{D}{4} = (a^2cm)^2 - (a^2m^2+b^2)a^2(c^2-b^2) = a^2b^2(a^2m^2+b^2-c^2) > 0$ より,

$a^2m^2+b^2-c^2 > 0$ ($-\sqrt{a^2m^2+b^2} < c < \sqrt{a^2m^2+b^2}$) …④

このとき③より, $x = \frac{-a^2cm \pm ab\sqrt{a^2m^2+b^2-c^2}}{a^2m^2+b^2}$

P(x_1, mx_1+c), Q(x_2, mx_2+c) ($x_1 < x_2$) とおくと,

$x_1 = \frac{-a^2cm - ab\sqrt{a^2m^2+b^2-c^2}}{a^2m^2+b^2}$, $x_2 = \frac{-a^2cm + ab\sqrt{a^2m^2+b^2-c^2}}{a^2m^2+b^2}$ であるから,

$x_1+x_2 = -\frac{2a^2cm}{a^2m^2+b^2}$, $x_2-x_1 = \frac{2ab\sqrt{a^2m^2+b^2-c^2}}{a^2m^2+b^2}$ …⑤

正三角形の1辺PQは, 補題(1)より, $PQ = (x_2-x_1)\sqrt{m^2+1} = \frac{2ab\sqrt{a^2m^2+b^2-c^2}\sqrt{m^2+1}}{a^2m^2+b^2}$ …⑥

R(x_3, y_3)は, QをP中心に $\pm 60^\circ$ だけ回転した点であるから, 補題(2)より,

$x_3 = \frac{x_1+x_2 \mp \sqrt{3}m(x_2-x_1)}{2}$, $y_3 = \frac{2c+m(x_1+x_2) \pm \sqrt{3}(x_2-x_1)}{2}$ (複号同順) であるから, ⑤を代入して,

$x_3 = -\frac{am(ac \mp \sqrt{3}b\sqrt{a^2m^2+b^2-c^2})}{a^2m^2+b^2}$, $y_3 = \frac{b(bc \pm \sqrt{3}a\sqrt{a^2m^2+b^2-c^2})}{a^2m^2+b^2}$ …⑦となる。

このR(x_3, y_3)は①上の点であるから, $\frac{x_3^2}{a^2} + \frac{y_3^2}{b^2} = 1$

これに⑦を代入すると, $\left\{ -\frac{m(ac \mp \sqrt{3}b\sqrt{a^2m^2+b^2-c^2})}{a^2m^2+b^2} \right\}^2 + \left(\frac{bc \pm \sqrt{3}a\sqrt{a^2m^2+b^2-c^2}}{a^2m^2+b^2} \right)^2 = 1$

整理すると,

$$(3a^2-b^2)(c^2-b^2) + (-3a^4+2a^2b^2-3b^4-a^2c^2+3b^2c^2)m^2 + a^2(a^2-3b^2)m^4 = \pm 2\sqrt{3}abc(m^2+1)\sqrt{a^2m^2+b^2-c^2}$$

左辺を因数分解すると, $(a^2m^2+b^2-c^2)\{(a^2-3b^2)m^2-3a^2+b^2\} = \pm 2\sqrt{3}abc(m^2+1)\sqrt{a^2m^2+b^2-c^2}$

④より, $\sqrt{a^2m^2+b^2-c^2} \neq 0$ であるから, 両辺を $\sqrt{a^2m^2+b^2-c^2}$ で割ると,

$\{(a^2-3b^2)m^2-3a^2+b^2\}\sqrt{a^2m^2+b^2-c^2} = \pm 2\sqrt{3}abc(m^2+1)$ …⑧

両辺を2乗すると, $\{(a^2-3b^2)m^2-3a^2+b^2\}^2(a^2m^2+b^2-c^2) = 12a^2b^2c^2(m^2+1)^2$

$$\therefore c^2 = \frac{(a^2m^2+b^2)\{(a^2-3b^2)m^2-3a^2+b^2\}^2}{(a^2+3b^2)^2m^4-2(3a^4-22a^2b^2+3b^4)m^2+(3a^2+b^2)^2}$$

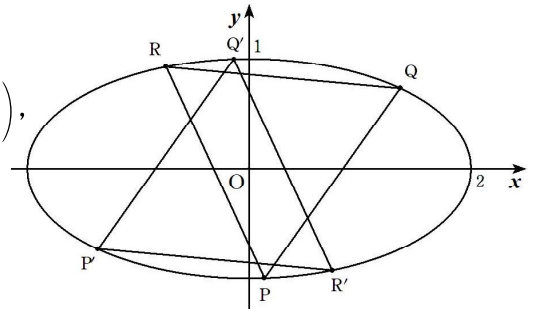
これを③に代入して, $PQ = \frac{4\sqrt{3}a^2b^2(m^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a^2m^2+b^2}\sqrt{(a^2+3b^2)^2m^4-2(3a^4-22a^2b^2+3b^4)m^2+(3a^2+b^2)^2}}$ 図

例 $a=2, b=1, m=\sqrt{2}$ のとき, $PQ=\frac{16}{\sqrt{57}}$ (右は参考図)

$$P\left(\frac{4(-2+\sqrt{6})}{3\sqrt{19}}, \frac{-8\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3\sqrt{19}}\right), Q\left(\frac{4(2+\sqrt{6})}{3\sqrt{19}}, \frac{8\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3\sqrt{19}}\right),$$

$$R\left(-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{57}}, \frac{7}{\sqrt{57}}\right) \text{ で, } P', Q', R' \text{ は原点に関して } Q, P, R \text{ と}$$

対称である。



3 Cが双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ のとき

解答 双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ …① 点 P, Q を通る直線の方程式を, $y=mx+c$ …②とおく。

$$\text{②を①に代入して, } \frac{x^2}{a^2} - \frac{(mx+c)^2}{b^2} = 1$$

$$\text{整理すると, } (a^2m^2 - b^2)x^2 + 2a^2cmx + a^2(b^2 + c^2) = 0 \quad \dots\text{③}$$

③は異なる2実解をもつので, $a^2m^2 - b^2 \neq 0$ で (すなわち, m は漸近線と同じ傾きでないということ。),

③の x についての2次方程式の判別式を D とおくと, ③は異なる2実解をもつから,

$$\frac{D}{4} = (a^2cm)^2 - (a^2m^2 - b^2)a^2(b^2 + c^2) = a^2b^2(-a^2m^2 + b^2 + c^2) > 0 \text{ より, } -a^2m^2 + b^2 + c^2 > 0 \quad \dots\text{④}$$

$$\text{このとき③より, } x = \frac{-a^2cm \pm ab\sqrt{-a^2m^2 + b^2 + c^2}}{a^2m^2 - b^2}$$

$P(x_1, mx_1 + c)$, $Q(x_2, mx_2 + c)$ とおく。

$$x_1 = \frac{-a^2cm - ab\sqrt{-a^2m^2 + b^2 + c^2}}{a^2m^2 - b^2}, \quad x_2 = \frac{-a^2cm + ab\sqrt{-a^2m^2 + b^2 + c^2}}{a^2m^2 - b^2} \text{ とすると,}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{2a^2cm}{a^2m^2 - b^2}, \quad x_2 - x_1 = \frac{2ab\sqrt{-a^2m^2 + b^2 + c^2}}{a^2m^2 - b^2} \quad \dots\text{⑤}$$

正三角形の1辺PQは,

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \{(mx_2 + c) - (mx_1 + c)\}^2} = |x_2 - x_1|\sqrt{m^2 + 1} = \frac{2ab\sqrt{-a^2m^2 + b^2 + c^2}\sqrt{m^2 + 1}}{|a^2m^2 - b^2|} \quad \dots\text{⑥}$$

$R(x_3, y_3)$ は, Q を P 中心に $\pm 60^\circ$ だけ回転した点であるから, 補題(2)より,

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2 \mp \sqrt{3}m(x_2 - x_1)}{2}, \quad y_3 = \frac{2c + m(x_1 + x_2) \pm \sqrt{3}(x_2 - x_1)}{2} \quad (\text{複号同順}) \text{ であるから, ⑤を代入して,}$$

$$x_3 = -\frac{am(ac \pm \sqrt{3}b\sqrt{-a^2m^2 + b^2 + c^2})}{a^2m^2 - b^2}, \quad y_3 = \frac{b(-bc \pm \sqrt{3}a\sqrt{-a^2m^2 + b^2 + c^2})}{a^2m^2 - b^2} \quad \dots\text{⑦となる。}$$

$$\text{この } R(x_3, y_3) \text{ は①上点であるから, } \frac{x_3^2}{a^2} - \frac{y_3^2}{b^2} = 1$$

$$\text{これに⑦を代入すると, } \left\{ -\frac{m(ac \pm \sqrt{3}b\sqrt{-a^2m^2 + b^2 + c^2})}{a^2m^2 - b^2} \right\}^2 - \left(\frac{-bc \pm \sqrt{3}a\sqrt{-a^2m^2 + b^2 + c^2}}{a^2m^2 - b^2} \right)^2 = 1$$

$$\text{整理すると, } (-a^2m^2 + b^2 + c^2)\{(a^2 + 3b^2)m^2 - 3a^2 - b^2\} = \mp 2\sqrt{3}abc(m^2 + 1)\sqrt{-a^2m^2 + b^2 + c^2}$$

④より, $\sqrt{-a^2m^2 + b^2 + c^2} \neq 0$ であるから, 両辺を $\sqrt{-a^2m^2 + b^2 + c^2}$ で割ると,

$$\{(a^2 + 3b^2)m^2 - 3a^2 - b^2\}\sqrt{-a^2m^2 + b^2 + c^2} = \mp 2\sqrt{3}abc(m^2 + 1) \quad \dots\text{⑧}$$

$$\text{両辺を2乗すると, } \{(a^2 + 3b^2)m^2 - 3a^2 - b^2\}^2(-a^2m^2 + b^2 + c^2) = 12a^2b^2c^2(m^2 + 1)^2$$

$$\therefore c^2 = \frac{(a^2 m^2 - b^2)((a^2 + 3b^2)m^2 - 3a^2 - b^2)^2}{\{(a^2 - 3b^2)m^2 - 8abm - 3a^2 + b^2\}[(a^2 - 3b^2)m^2 + 8abm - 3a^2 + b^2]}$$

これを⑥に代入して整理すると、

$$PQ = \frac{4\sqrt{3}a^2b^2(m^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(a^2m^2-b^2)((a^2-3b^2)m^2-8abm-3a^2+b^2)((a^2-3b^2)m^2+8abm-3a^2+b^2)}} \quad \text{答}$$

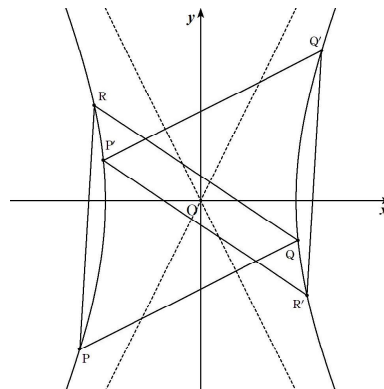
例 $a=1, b=2, m=\frac{1}{2}$ のとき, $PQ = \frac{16}{\sqrt{39}}$ (右は参考図)

$$P\left(\frac{-3\sqrt{65}-16\sqrt{195}}{195}, \frac{8(-3\sqrt{65}-\sqrt{195})}{195}\right),$$

$$Q\left(\frac{-3\sqrt{65}+16\sqrt{195}}{195}, \frac{8(-3\sqrt{65}+\sqrt{195})}{195}\right),$$

$$R\left(-\frac{9\sqrt{65}}{65}, \frac{8\sqrt{65}}{65}\right) \text{ で, } P', Q', R' \text{ は原点に}$$

関して Q, P, R と対称である。



4 Cが直角双曲線 $xy=a$ のとき

【解答】 直角双曲線 $xy=a$ …① 点 P, Q を通る直線の方程式を, $y=mx+c$ …②とおく。

②を①に代入して, $x(mx+c)=a \quad \therefore mx^2+cx-a=0$ …③

③は異なる2実解をもつので, $m \neq 0$ で,

③の x についての2次方程式の判別式を D とおくと, $D=c^2+4am > 0$ …④である。

$$\text{このとき③より, } x = \frac{-c \pm \sqrt{c^2+4am}}{2m}$$

$P(x_1, mx_1+c), Q(x_2, mx_2+c) \quad (x_1 < x_2)$ とおく。

[1] $m > 0$ のとき

$$x_1 = \frac{-c - \sqrt{c^2+4am}}{2m}, \quad x_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2+4am}}{2m} \quad \text{であるから,}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{c}{m}, \quad x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{c^2+4am}}{m} \quad \dots \text{⑤}$$

$$\text{正三角形の1辺 PQ は, 補題(1)より, } PQ = (x_2 - x_1)\sqrt{m^2+1} = \frac{\sqrt{c^2+4am}}{m} \sqrt{m^2+1} \quad \dots \text{⑥}$$

$R(x_3, y_3)$ は, Q を P 中心に $\pm 60^\circ$ だけ回転した点であるから, 補題(2)より,

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2 \mp \sqrt{3}m(x_2 - x_1)}{2}, \quad y_3 = \frac{2c + m(x_1 + x_2) \pm \sqrt{3}(x_2 - x_1)}{2} \quad (\text{複号同順}) \quad \text{であるから, ⑤を代入して,}$$

$$x_3 = -\frac{c \pm \sqrt{3}m\sqrt{c^2+4am}}{2m}, \quad y_3 = \frac{cm \pm \sqrt{3}\sqrt{c^2+4am}}{2m} \quad \dots \text{⑦となる。}$$

この $R(x_3, y_3)$ は①上の点であるから, $x_3y_3=a$

$$\text{これに⑦を代入すると, } -\frac{c \pm \sqrt{3}m\sqrt{c^2+4am}}{2m} \cdot \frac{cm \pm \sqrt{3}\sqrt{c^2+4am}}{2m} = a$$

$$\text{整理すると, } 4m(c^2+4am) = \mp \sqrt{3}c(m^2+1)\sqrt{c^2+4am}$$

④より, $\sqrt{c^2+4am} \neq 0$ であるから, 両辺を $\sqrt{c^2+4am}$ で割ると,

$$4m\sqrt{c^2+4am} = \mp \sqrt{3}c(m^2+1) \quad \dots \text{⑧}$$

$$\text{両辺を2乗すると, } 16m^2(c^2+4am) = 3c^2(m^2+1)^2 \quad \therefore c^2 = \frac{64am^3}{(m^2-3)(3m^2-1)}$$

これを⑥に代入して整理すると、 $PQ = 2\sqrt{3} \sqrt{\frac{a(m^2+1)^3}{m(m^2-3)(3m^2-1)}}$

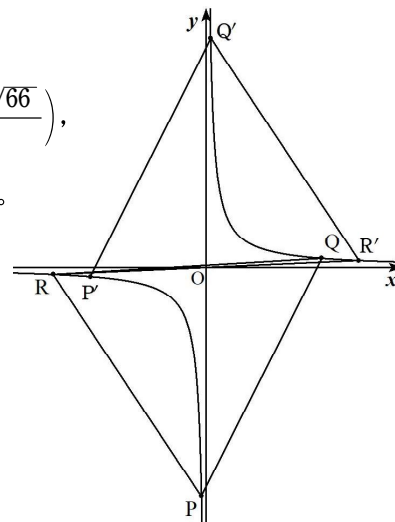
[2] $m < 0$ のとき、同様に計算して、 $PQ = 2\sqrt{3} \sqrt{\frac{a(m^2+1)^3}{m(m^2-3)(3m^2-1)}}$ が得られる。

以上, [1], [2] より, $PQ = 2\sqrt{3} \sqrt{\frac{a(m^2+1)^3}{m(m^2-3)(3m^2-1)}}$ 　□

例 $a = 1, m = 2$ のとき, $PQ = 5\sqrt{\frac{30}{11}}$ (右は参考図)

$P\left(\frac{8\sqrt{22}-5\sqrt{66}}{22}, \frac{-8\sqrt{22}-5\sqrt{66}}{11}\right), Q\left(\frac{8\sqrt{22}+5\sqrt{66}}{22}, \frac{-8\sqrt{22}+5\sqrt{66}}{11}\right),$

$R\left(-\sqrt{22}, -\frac{\sqrt{22}}{22}\right)$ で, P, Q, R' は原点に関して Q, P, R と対称である。



(2025/11/29 tokioka@i4.gmob.jp)