

四分円内の円と正三角形および円と正方形について

数実研会員 時岡郁夫

1. 半径1の四分円内に、図のように直径 a の円と1辺 a の正三角形を配置し、 a の値を求めてみた。(14通り)

ただし、●印：図形は四分円の中心角の二等分線に関して対称、

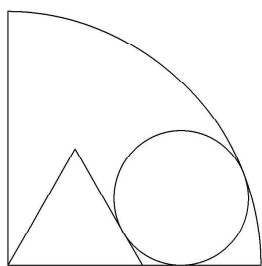
▲印：正三角形は四分円の中心角の二等分線に関して対称、

▼印：正三角形の1辺は四分円の1つの半径に垂直

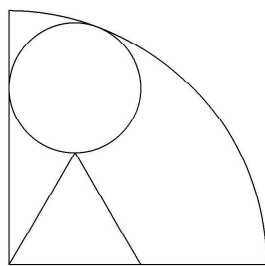
とする。

なお、(5)，(6)は a の満たす方程式が6次以上の高次方程式となり、求めることができなかった。

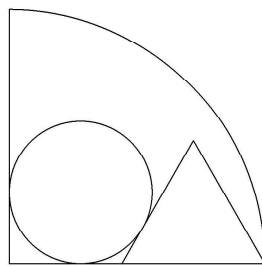
(1)



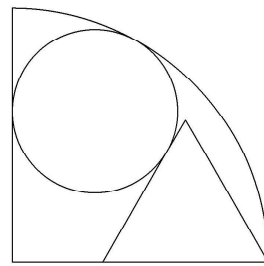
(2)



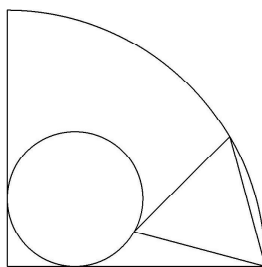
(3)



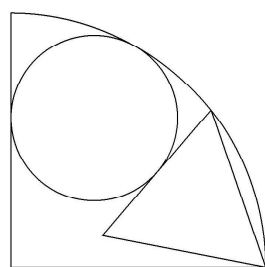
(4)



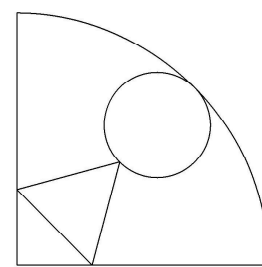
(5)



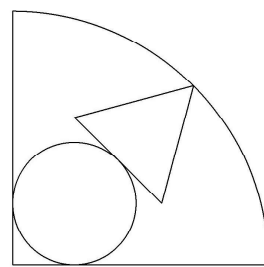
(6)



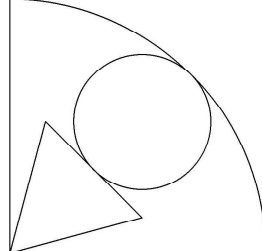
(7) ●



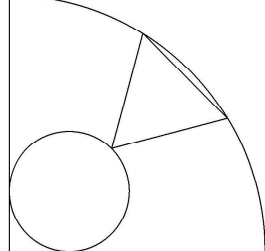
(8) ●



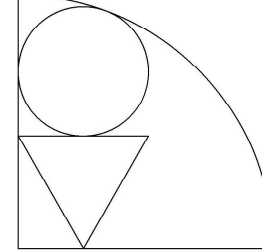
(9) ●



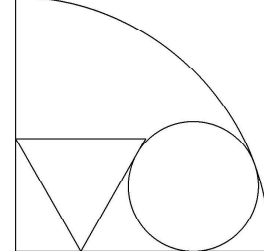
(10) ●



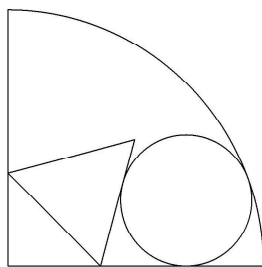
(11) ▼



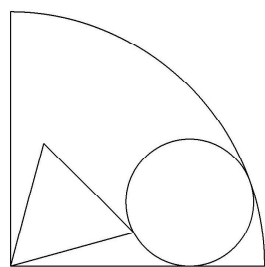
(12) ▼



(13) ▲



(14) ▲



答

$$(1) \quad a = \frac{2\{-39 + 12\sqrt{3} + 2\sqrt{3(556 - 199\sqrt{3})}\}}{121} \quad (\doteq 0.531272)$$

$$(2) \quad a = -2 + \sqrt{3} + \sqrt{11 - 6\sqrt{3}} \quad (\doteq 0.511599)$$

$$(3) \quad a = \frac{9 - \sqrt{3}}{13} \quad (\doteq 0.559073)$$

$$(4) \quad a = \frac{2\{176 - 34\sqrt{3} + \sqrt{2(823 + 364\sqrt{3})}\}}{529} \quad (\doteq 0.646602)$$

$$(5) \quad 8a^6 + 2(-3 + 5\sqrt{3})a^5 - 3a^4 + 8(4 - \sqrt{3})a^3 - 8a^2 - 32a + 16 = 0 \quad (a \text{ の近似値は, } a \doteq 0.525552)$$

$$(6) \quad 64 - 128a - 16(9 + 4\sqrt{3})a^2 - 16(-11 + 2\sqrt{3})a^3 + (105 + 152\sqrt{3})a^4 + 20(5 + 3\sqrt{3})a^5 + 38a^6 + 4(-1 + \sqrt{3})a^7 + a^8 = 0 \quad (a \text{ の近似値は, } a \doteq 0.65419)$$

$$(7) \quad a = \frac{3 - \sqrt{3}}{3} \quad (\doteq 0.42265)$$

$$(8) \quad a = \frac{2 + \sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} \quad (\doteq 0.482362)$$

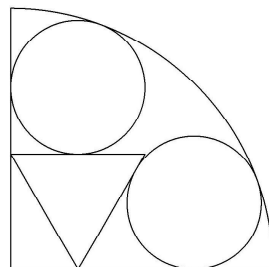
$$(9) \quad a = 2(2 - \sqrt{3}) \quad (\doteq 0.535898)$$

$$(10) \quad a = 2\sqrt{\frac{131 + 14\sqrt{2} - 26\sqrt{3} - 34\sqrt{6}}{409}} \quad (\doteq 0.468917)$$

$$(11) \quad a = -2 + \sqrt{3} + \sqrt{11 - 6\sqrt{3}} \quad (\doteq 0.511599)$$

$$(12) \quad a = -2 + \sqrt{3} + \sqrt{11 - 6\sqrt{3}} \quad (\doteq 0.511599)$$

参考 正三角形の1辺が四分円の1つの半径に垂直であるとき, 2円は等円となる。(右図)



$$(13) \quad a = \frac{2}{2209}\{-541 - 198\sqrt{2} + 92\sqrt{3} + 148\sqrt{6} + \sqrt{2(861487 + 366657\sqrt{2} - 209994\sqrt{3} - 261750\sqrt{6})}\} \\ (\doteq 0.513400)$$

$$(14) \quad a = \frac{1}{2}(-22 + 15\sqrt{2} + 12\sqrt{3} - 9\sqrt{6} + 2\sqrt{409 - 289\sqrt{2} - 236\sqrt{3} + 167\sqrt{6}} + \\ 2\sqrt{894 - 631\sqrt{2} - 515\sqrt{3} + 365\sqrt{6} - 3\sqrt{352168 - 249020\sqrt{2} - 203324\sqrt{3} + 143772\sqrt{6}}}) \quad (\doteq 0.502439)$$

2. 半径1の四分円内に、図のように直径 a の円と1辺 a の正方形を配置し、 a の値を求めてみた。(10通り)

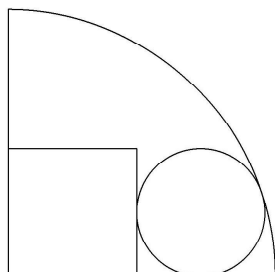
ただし、●印：図形は四分円の中心角の二等分線に関して対称、

■印：正方形は四分円の中心角の二等分線に関して対称

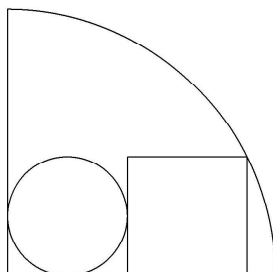
とする。

なお、(9)、(10)は a の満たす方程式が8次以上の高次方程式となり、求めることができなかった。

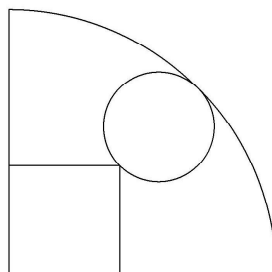
(1)



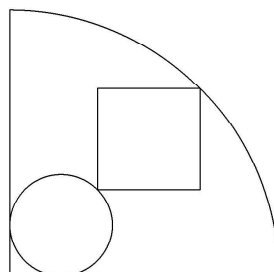
(2)



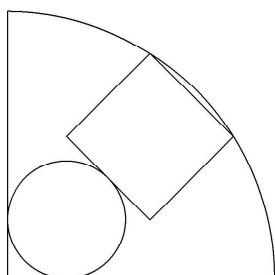
(3) ●



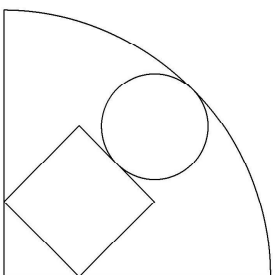
(4) ●



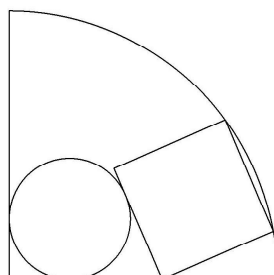
(5) ●



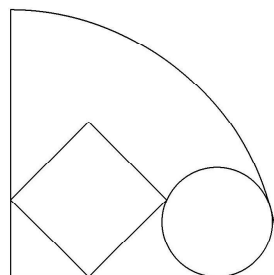
(6) ●



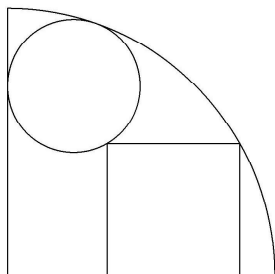
(7)



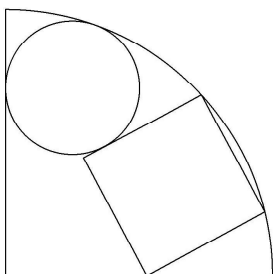
(8) ■



(9)



(10)



答

$$(1) \quad a = \frac{-2+2\sqrt{10}}{9} \quad (\doteq 0.480506)$$

$$(2) \quad a = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad (\doteq 0.447214)$$

$$(3) \quad a = -1 + \sqrt{2} \quad (\doteq 0.414214)$$

$$(4) \quad a = \frac{2(-1+3\sqrt{2})}{17} \quad (\doteq 0.381487)$$

$$(5) \quad a = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{3}} \quad (\doteq 0.441885)$$

$$(6) \quad a = \frac{2}{5} \quad (= 0.4)$$

$$(7) \quad a = \sqrt{\frac{2}{447}(\sqrt[3]{-225991+65262\sqrt{78}} + \sqrt[3]{-225991-65262\sqrt{78}} + 68)} \quad (\doteq 0.451573)$$

$$(8) \quad a = \frac{-101-57\sqrt{2}+4\sqrt{151+389\sqrt{2}}+\sqrt{125973+78044\sqrt{2}-24\sqrt{2(6488281+9320369\sqrt{2})}}}{529} \\ (\doteq 0.410675)$$

$$(9) \quad 169a^8 - 144a^7 + 40a^6 + 40a^5 - 24a^4 + 32a^3 - 16a^2 - 32a + 16 = 0 \quad (a \text{ の近似値は, } a \doteq 0.495811)$$

$$(10) \quad 65536 - 262144a - 196608a^2 + 1835008a^3 - 450560a^4 - 5357568a^5 + 2596864a^6 + 9072640a^7 - \\ 4379904a^8 - 10316800a^9 + 3638784a^{10} + 8030976a^{11} - 1307872a^{12} - 3886720a^{13} - 173072a^{14} + \\ 897328a^{15} + 231361a^{16} = 0 \quad (a \text{ の近似値は, } a \doteq 0.502092)$$

(2025/11/29 tokioka@i4.gmob.jp)