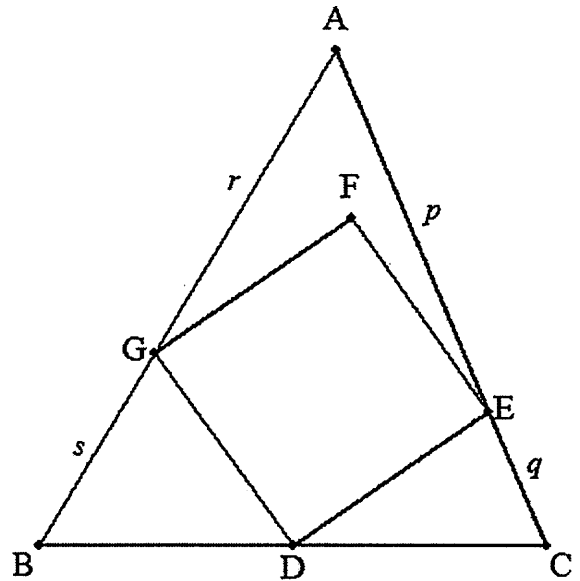


△ABC の辺 BC の中点を頂点に持つ内接正方形問題



△ABC について、BC の中点を D とし、CA 上に点 E を、△ABC 内に点 F を、AB 上に点 G を、四角形 DEFG が正方形になるようにとる。AE = p, EC = q, AG = r, GB = s とおくと、

- (1)  $p^2 + q^2 = r^2 + s^2$  を証明せよ。
- (2) 正方形の 1 辺を p, q, r, s を用いて表せ。
- (3) BC を p, q, r, s を用いて表せ。



(解) (1) (証明)

△ABC 内に点 L を、GB = GL, GB ⊥ GL となるようにとると、△GBD ≡ △GLF (2 辺夾角相等) であるから、BD = LF ……①, ∠BDG = ∠LFG ……② である。

また、△AGL は直角三角形となるから、 $AG^2 + GB^2 = AG^2 + GL^2 = AL^2$  ……③ である。

次に、△DCE と △FLE について

DC = DB = FL (①より) ……④

DE = FE (仮定より) ……⑤

$\angle EDC = 180^\circ - (\angle BDG + 90^\circ) = 90^\circ - \angle BDG = \angle EFG - \angle LFG = \angle EFL$  ……⑥

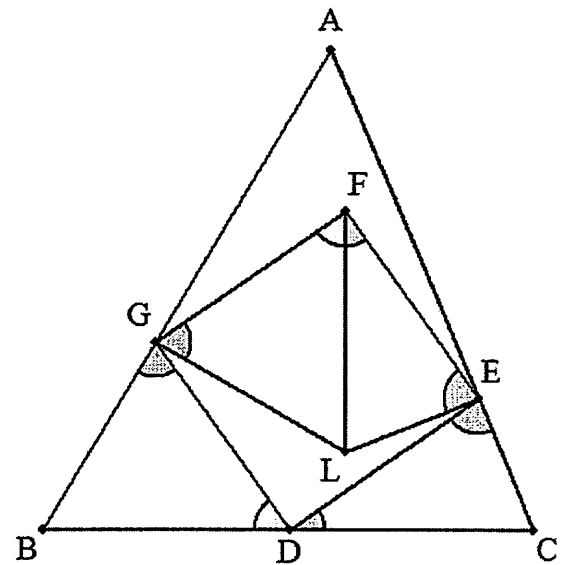
④～⑥より、2 辺夾角相等より、△DCE ≡ △FLE であるから EC = EL ……⑦

$\angle CEL = \angle CED + \angle DEL = \angle LEF + \angle DEL = 90^\circ$  より

△AEL は直角三角形となるから、

$AE^2 + EC^2 = AE^2 + EL^2 = AL^2$  ……⑧

③, ⑧より、 $AE^2 + EC^2 = AG^2 + GB^2$  ■



- (2) 図のように、BC と辺を共有し、E, A, G を通る長方形 HIJK をつくり、HD = x, DI = y とおくと、△GHD ≡ △DIE より、GH = y, EI = x である。

$\triangle GBH \sim \triangle GAK$ ,  $\triangle ECI \sim \triangle EAJ$  より

$$KH = \frac{r+s}{s}y, \quad JI = \frac{p+q}{q}x \text{ で, } KH=JI \text{ より}$$

$$\frac{r+s}{s}y = \frac{p+q}{q}x$$

$$x:y = \frac{r+s}{s} : \frac{p+q}{q} = q(r+s) : s(p+q)$$

$x = q(r+s)k, y = s(p+q)k \dots \textcircled{9}$  とおける。

ただし,  $k > 0$ 。

次に,  $KA = z$  とおくと,  $AJ = x + y - z$

$BH : AK = s : r$  より

$$BH = \frac{s}{r}AK = \frac{s}{r}z \dots \textcircled{10}$$

同様に,  $CI : AJ = q : p$  より  $CI = \frac{q}{p}AK = \frac{q}{p}(x + y - z) \dots \textcircled{11}$

$BD = DC$  であるから,  $BH + HD = DI + IC$

$\textcircled{10}$ ,  $\textcircled{11}$  より

$$\frac{s}{r}z + x = y + \frac{q}{p}(x + y - z)$$

$$z = \frac{\left(\frac{q}{p} - 1\right)x + \left(\frac{q}{p} + 1\right)y}{\frac{s}{r} + \frac{q}{p}} = \frac{r\{(q-p)x + (q+p)y\}}{ps + qr}$$

$\textcircled{9}$  より

$$z = \frac{r\{(q-p) \times q(r+s)k + (q+p) \times s(p+q)k\}}{ps + qr} = \frac{r\{q(q-p)(r+s) + s(p+q)^2\}}{ps + qr} k$$

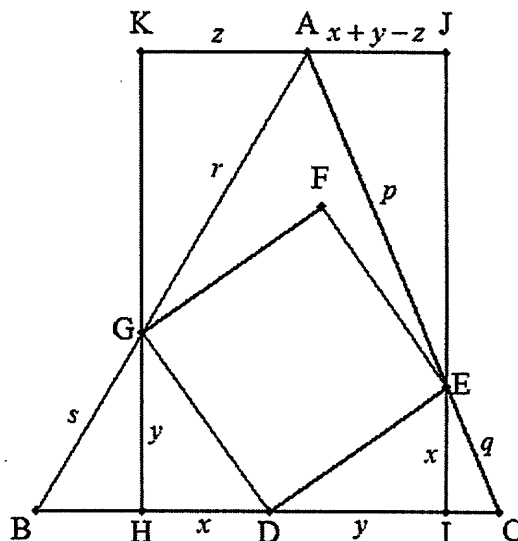
$$\textcircled{10} \text{ より, } BH = \frac{s\{q(q-p)(r+s) + s(p+q)^2\}}{ps + qr} k$$

$\triangle GBH$  は直角三角形であるから,  $BH^2 + GH^2 = GB^2$

$$\left[ \frac{s\{q(q-p)(r+s) + s(p+q)^2\}}{ps + qr} k \right]^2 + \{s(p+q)k\}^2 = s^2$$

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{s^2}{\left[ \frac{s\{q(q-p)(r+s) + s(p+q)^2\}}{ps + qr} \right]^2 + \{s(p+q)\}^2} = \frac{(ps + qr)^2}{\{q(q-p)(r+s) + s(p+q)^2\}^2 + \{(p+q)(ps + qr)\}^2} \\ &= \frac{(ps + qr)^2}{2(p^2 + q^2)(q^2r^2 + 2q^2rs + p^2s^2 + 2pqs^2 + 2q^2s^2)} = \frac{(ps + qr)^2}{2(p^2 + q^2)\{q^2(r+s)^2 + s^2(p+q)^2\}} \dots \textcircled{12} \end{aligned}$$

また,  $\triangle GDH$  は直角三角形であるから,  $\textcircled{12}$  より



$$GD^2 = DH^2 + GH^2 = x^2 + y^2 = \{q(r+s)k\}^2 + \{s(p+q)k\}^2 = \{q^2(r+s)^2 + s^2(p+q)^2\}k^2 = \frac{(ps+qr)^2}{2(p^2+q^2)}$$

GD > 0 であるから正方形の1辺は

$$GD = \frac{ps+qr}{\sqrt{2(p^2+q^2)}} \dots (\text{答})$$

(3) BC = 2 (BH + HD)

$$\begin{aligned} &= 2 \left[ \frac{s\{q(q-p)(r+s) + s(p+q)^2\}}{ps+qr} k + q(r+s)k \right] \\ &= \frac{2\{s\{q(q-p)(r+s) + s(p+q)^2\} + q(ps+qr)(r+s)\}}{ps+qr} k \\ &= \frac{2(q^2r^2 + 2q^2rs + p^2s^2 + 2pqs^2 + 2q^2s^2)}{ps+qr} k \\ &= \frac{2\{q^2(r+s)^2 + s^2(p+q)^2\}}{ps+qr} \times \frac{ps+qr}{\sqrt{2(p^2+q^2)\{q^2(r+s)^2 + s^2(p+q)^2\}}} \\ &= \sqrt{\frac{2\{(p+q)^2s^2 + (r+s)^2q^2\}}{p^2+q^2}} \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

【別解】

(1) 正方形の1辺を  $x$ ,  $BC = a$  とおくと,  $GE = \sqrt{2}x$ ,  $BD = DC = \frac{a}{2}$  である.

$\triangle AGE$  と  $\triangle ABC$  において  $\angle A$  が共通であるから,

$$\cos A = \frac{p^2 + r^2 - (\sqrt{2}x)^2}{2pr} = \frac{(p+q)^2 + (r+s)^2 - a^2}{2(p+q)(r+s)} \text{ より}$$

$$(p+q)(r+s)(p^2 + r^2 - 2x^2) - pr\{(p+q)^2 + (r+s)^2 - a^2\} = 0 \dots \textcircled{1}$$

$\triangle GBD$  と  $\triangle ABC$  において  $\angle B$  が共通であるから,

$$\cos B = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + s^2 - x^2}{2 \cdot \frac{a}{2} s} = \frac{a^2 + (r+s)^2 - (p+q)^2}{2a(r+s)} \text{ より}$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + s^2 - x^2 = \frac{s}{2(r+s)} \{a^2 + (r+s)^2 - (p+q)^2\} \dots \textcircled{2}$$

$\triangle EDC$  と  $\triangle ABC$  において  $\angle C$  が共通であるから,

$$\cos C = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + q^2 - x^2}{2 \cdot \frac{a}{2} q} = \frac{a^2 + (p+q)^2 - (r+s)^2}{2a(p+q)} \text{ より}$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + q^2 - x^2 = \frac{q}{2(p+q)} \{a^2 + (p+q)^2 - (r+s)^2\} \dots \textcircled{3}$$

②, ③は  $x^2$ ,  $a^2$  についての連立2元1次方程式である。

②-③から  $x^2$  を消去し,  $a^2$  について解く。

$$s^2 - q^2 = \left(\frac{s}{2(r+s)} - \frac{q}{2(p+q)}\right) a^2 - \left(\frac{s}{2(r+s)} + \frac{q}{2(p+q)}\right) \{(p+q)^2 - (r+s)^2\}$$

$$(ps - qr)a^2 = \{s(p+q) + q(r+s)\} \{(p+q)^2 - (r+s)^2\} + 2(p+q)(r+s)(s^2 - q^2) \dots \textcircled{4}$$

[1]  $ps - qr = 0$  のとき

$p:q = r:s$  より  $GE \parallel BC$  となるから,  $p=r, q=s$  より,  $p^2 + q^2 = r^2 + s^2$  は成り立つ。

[2]  $ps - qr \neq 0$  のとき, ④から

$$a^2 = \frac{p^3s + ps^3 + p^2qr + 4p^2qs + 3pq^2s - q^3r - qr^3 - pr^2s - 4qr^2s - 3qrs^2}{ps - qr} \dots \textcircled{5}$$

⑤を③に代入して,  $x^2$  について解くと

$$x^2 = \frac{p^3s + ps^3 + p^2qr + qrs^2 - q^3r - qr^3 - pq^2s - pr^2s}{4(ps - qr)} \dots \textcircled{6}$$

⑤, ⑥を①の左辺に代入すると,

$$\begin{aligned} & (p+q)(r+s) \left\{ p^2 + r^2 - 2 \times \frac{p^3s + ps^3 + p^2qr + qrs^2 - q^3r - qr^3 - pq^2s - pr^2s}{4(ps - qr)} \right\} \\ & - pr \left\{ (p+q)^2 + (r+s)^2 - \frac{p^3s + ps^3 + p^2qr + 4p^2qs + 3pq^2s - q^3r - qr^3 - pr^2s - 4qr^2s - 3qrs^2}{ps - qr} \right\} \\ & = \frac{(p+q)(r+s)(ps+qr)(p^2 + q^2 - r^2 - s^2)}{2(ps - qr)} \quad (\text{計算省略}) \end{aligned}$$

よって,  $\frac{(p+q)(r+s)(ps+qr)(p^2 + q^2 - r^2 - s^2)}{2(ps - qr)} = 0$  より

$$p^2 + q^2 - r^2 - s^2 = 0 \quad \therefore p^2 + q^2 = r^2 + s^2$$

以上[1], [2]より  $p^2 + q^2 = r^2 + s^2$  が成立する。

(2) ⑥の分子を  $s$  について整理すると

$$\begin{aligned}
 x^2 &= \frac{ps^3 + qrs^2 + p(p^2 - q^2 - r^2)s + qr(p^2 - q^2 - r^2)}{4(ps - qr)} = \frac{s^2(ps + qr) + (ps + qr)(p^2 - q^2 - r^2)}{4(ps - qr)} \\
 &= \frac{(ps + qr)(p^2 - q^2 - r^2 + s^2)}{4(ps - qr)} = \frac{(ps + qr)(p^2 - q^2 - r^2 + p^2 + q^2 - r^2)}{4(ps - qr)} = \frac{(ps + qr)(2p^2 - 2r^2)}{4(ps - qr)} \\
 &= \frac{(ps + qr)(p^2 - r^2)}{2(ps - qr)} \dots \textcircled{7} \\
 &= \frac{(ps + qr)^2(p^2 - r^2)}{2(ps - qr)(ps + qr)} = \frac{(ps + qr)^2(p^2 - r^2)}{2(p^2s^2 - q^2r^2)} = \frac{(ps + qr)^2(p^2 - r^2)}{2\{p^2(p^2 + q^2 - r^2) - q^2r^2\}} = \frac{(ps + qr)^2(p^2 - r^2)}{2(p^4 + p^2q^2 - p^2r^2 - q^2r^2)} \\
 &= \frac{(ps + qr)^2(p^2 - r^2)}{2\{p^2(p^2 + q^2) - r^2(p^2 + q^2)\}} = \frac{(ps + qr)^2(p^2 - r^2)}{2(p^2 + q^2)(p^2 - r^2)} = \frac{(ps + qr)^2}{2(p^2 + q^2)}
 \end{aligned}$$

$$x > 0 \text{ より, } x = \boxed{\frac{ps + qr}{\sqrt{2(p^2 + q^2)}}} \dots \text{(答)}$$

(3) ⑤で,  $a > 0$  より

$$a = \boxed{\sqrt{\frac{p^3s + ps^3 + p^2qr + 4p^2qs + 3pq^2s - q^3r - qr^3 - pr^2s - 4qr^2s - 3qrs^2}{ps - qr}}} \dots \text{(答)}$$

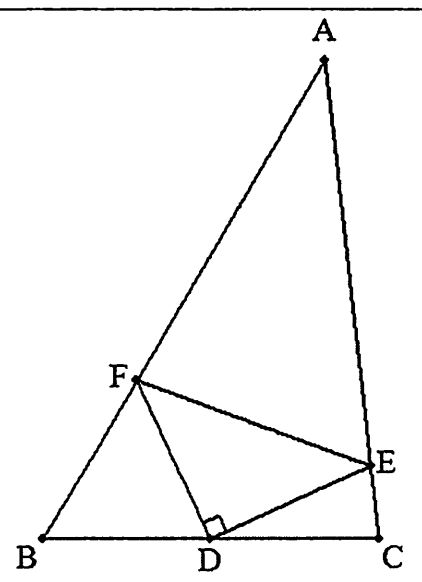
(補足) ⑦を用いて

$$\cos A = \frac{p^2 + r^2 - 2x^2}{2pr} = \frac{p^2 + r^2 - 2 \times \frac{(ps + qr)(p^2 - r^2)}{2(ps - qr)}}{2pr} = \boxed{\frac{pq - rs}{qr - ps}}$$

【例】趣味の数学問題集 A288 から (<http://www.phoenix-c.or.jp/~tokioka/>)

$\triangle ABC$  について,  $BC$  の中点を  $D$ ,  $CA$ ,  $AB$  上にそれぞれ, 点  $E$ ,  $F$  を, 図のように,  $\triangle DEF$  が直角二等辺三角形になるようにとる。  
 $AE = 11$ ,  $EC = 2$ ,  $AF = 10$  のとき,

- (1)  $DE$  を求めよ。
- (2)  $\triangle ABC$  の面積を求めよ。

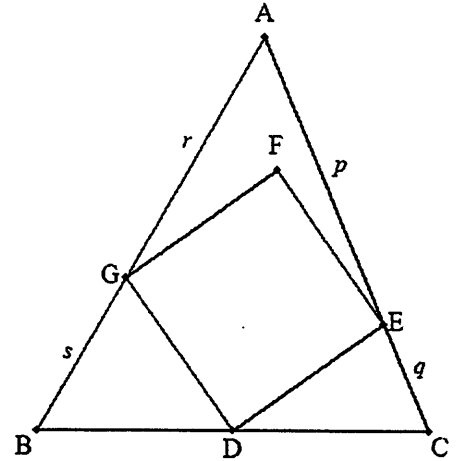


(答) (1)  $\frac{3\sqrt{10}}{2}$  (2)  $\frac{117}{2}$

パターン②

△ABC について、BC の中点を D とし、CA 上に点 E を、△ABC 内に点 F を、AB 上に点 G を、四角形 DEFG が正方形になるようにとる。

BC = a, CA = b, AB = c とおくと、正方形の 1 辺を a, b, c を用いて表せ。



(解) 正方形の 1 辺を x, EC = q, GB = s とおくと、AE = b - q, AG = c - s である。

パターン 1 の定理より、 $(b - q)^2 + q^2 = (c - s)^2 + s^2 \dots \textcircled{1}$

$$\cos B = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + s^2 - x^2}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot s} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \quad \therefore \frac{a^2}{4} + s^2 - x^2 = \frac{s}{2c}(a^2 - b^2 + c^2) \dots \textcircled{2}$$

$$\cos C = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + q^2 - x^2}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot q} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad \therefore \frac{a^2}{4} + q^2 - x^2 = \frac{q}{2b}(a^2 + b^2 - c^2) \dots \textcircled{3}$$

①より、 $2(s^2 - q^2) = 2(cs - bq) + b^2 - c^2 \dots \textcircled{4}$

②-③より、 $s^2 - q^2 = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}s - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}q \dots \textcircled{5}$

⑤を④に代入すると、 $2\left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}s - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}q\right) = 2(cs - bq) + b^2 - c^2$

s について解くと、 $s = \frac{c(-a^2 + b^2 + c^2)q - bc(b^2 - c^2)}{b(-a^2 + b^2 + c^2)} \dots \textcircled{6}$

⑥を④に代入すると、 $q = \frac{b\{3(a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 - b^2c^2) + \sqrt{3}(-a^2 + b^2 + 2c^2)\}}{4(-a^2 + b^2 + bc + c^2)(-a^2 + b^2 - bc + c^2)} \dots \textcircled{7}$

ただし、 $t = \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$  である。

⑦を③に代入すると

$$x = \frac{t\sqrt{a^6 - 2a^4(b^2 + c^2) + a^2(b^4 - 5b^2c^2) + 9b^2c^2(b^2 + c^2) - \sqrt{3}(-a^2 + b^2 + 2c^2)(-a^2 + 2b^2 + c^2)}}{2\sqrt{2}(-a^2 + b^2 + bc + c^2)(-a^2 + b^2 - bc + c^2)}$$

… (答)

$$(補足) s = \frac{c\{3(a^4 - 2a^2c^2 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2) + \sqrt{3}(-a^2 + 2b^2 + c^2)\}}{4(-a^2 + b^2 + bc + c^2)(-a^2 + b^2 - bc + c^2)}$$

【課題】  $\triangle ABC$  の辺  $BC$  の中点を頂点に持つ内接正三角形問題

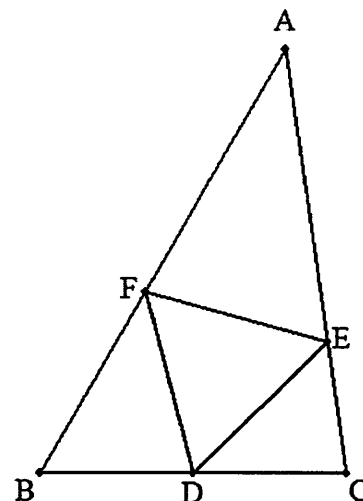
$\triangle ABC$  について、 $BC$  の中点を  $D$  とし、 $CA$  上に点  $E$  を、 $AB$  上に点  $F$  を、 $\triangle DEF$  が正三角形になるようにとる。

$AE = p$  ,  $EC = q$  ,  $AF = r$  ,  $FB = s$  とおくとき、次を証明せよ。

(1)  $3p^2 + q^2 = 3r^2 + s^2$

(2) (正三角形の1辺)  $\frac{ps + qr}{\sqrt{3p^2 + q^2}}$

(3)  $\cos A = \frac{rs - pq}{ps - qr}$



※2015年8月7日、北海道札幌南高等学校で開催される第97回全国算数・数学教育研究大会、高等学校分科会08 問題解決、数学的な見方・考え方において、発表予定です。

テーマ：「こだわり数学～難解、奇抜、爽快な問題の数々」