第 94 回数学教育実践研究会資料　(2015/10/3　於札幌市立大通高等学校)
立命館慶祥中学校・高等学校　時岡郁夫
tokioka@spc.ritsumei.ac.jp

三角形 ABC の辺 BC の中点を頂点に持つ内接正多角形について

1　はじめに

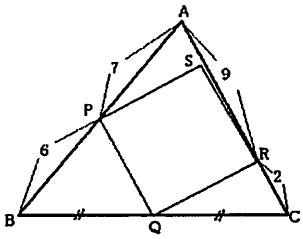
前回の発表の続きである。

次の問題は，Website「ヨッシーの算数・数学の部屋」質問・問題に答えるコーナー(平面図形に関する問題)にある。解答を見ると，中学生レベルで求められる。

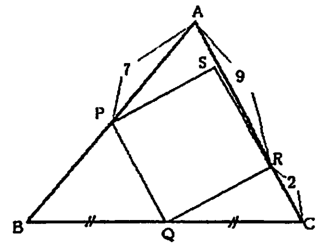
Ａ図のように三角形ＡＢＣの内部に正方形ＰＱＲＳが３点Ｐ，Ｑ，Ｒで接していて，ＢＱ＝ＱＣです。このとき，正方形ＰＱＲＳの面積を求めなさい。

(答)　$\frac{136}{5}$

(Ａ図)



(Ｂ図)



この問題を，さらに難しくしてＢ図のようにしたらどうなるだろう。中学生レベルで求められるだろうか。

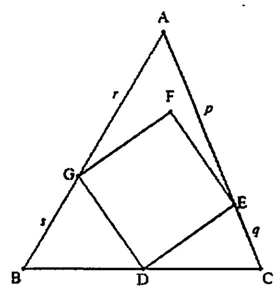
2　この問題を考えて分かったこと

以下，正方形 PQRS の記号を変えてある。

△ABC について，BC の中点を D とし，CA 上に点 E を，△ABC 内に点 F を，AB 上に点 G を，四角形 DEFG が正方形になるようにとる。AE＝p，EC＝q，AG＝r，GB＝s とおくと，次が成り立つ。

(1)　$p^2+q^2=r^2+s^2$　(定理)

(2)　(正方形の１辺)　$\dfrac{ps+qr}{\sqrt{2(p^2+q^2)}}$



この定理や公式（証明は前回の資料）を使うと，Ｂ図の問題は

GB²＝$9^2+2^2-7^2=36$ より GB＝6。正方形の１辺は，$\dfrac{9\cdot6+2\cdot7}{\sqrt{2(9^2+2^2)}}=\dfrac{2\sqrt{170}}{5}$ であるから，面積は $\dfrac{136}{5}$

内接正方形を内接正三角形，内接正五角形，・・・に変えても似たような定理は得られるだろうか。また，正多角形の１辺はどうなるか，次に考えてみる。

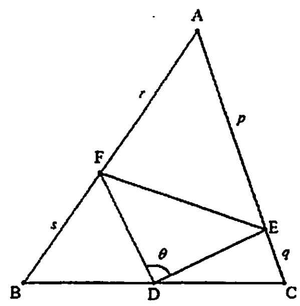
3　△ABC の辺 BC の中点を頂点に持つ二等辺三角形について（補題）

三角形 ABC の辺 BC の中点を D とし，辺 CA 上に点 E を，AB 上に点 F を，DE＝DF となるようにとる。DE＝DF＝x，∠FDE＝θ，AE＝p，EC＝q，AF＝r，FB＝s とおくと，次が成り立つ。

(1)　$\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}p^2+q^2=\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}r^2+s^2$　(定理)

(2)　$x=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(ps+qr)(p^2-q^2-r^2+s^2)}{ps-qr}}=\dfrac{ps+qr}{2\sin\dfrac{\theta}{2}\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}p^2+q^2}}$

(3)　$\cos A=\dfrac{rs-pq}{ps-qr}$

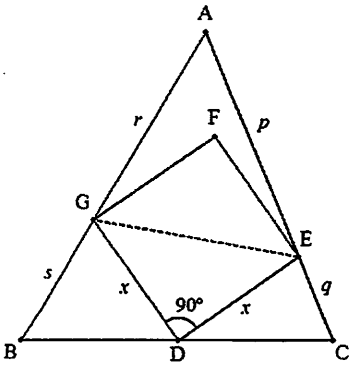


証明はホームページを参照（こだわり数学 78）

4　△ABC の辺 BC の中点を頂点に持つ内接正多角形について

3 の補題を使うと，次のとおり求めることができる。ただし，それぞれ内接正多角形が存在する場合の結果である。

(1)　内接正方形の場合（補題で，$\theta = 90°$ の場合）

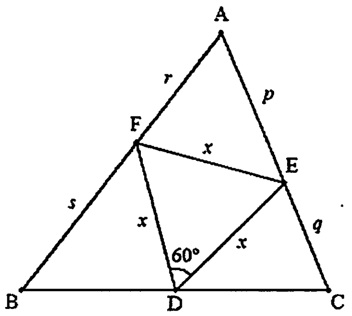


(1)　$p^2 + q^2 = r^2 + s^2$

(2)　$x = \dfrac{ps + qr}{\sqrt{2(p^2 + q^2)}}$

(3)　$\cos A = \dfrac{rs - pq}{ps - qr}$

(2)　内接正三角形の場合（補題で，$\theta = 60°$ の場合）



(1)　$3p^2 + q^2 = 3r^2 + s^2$

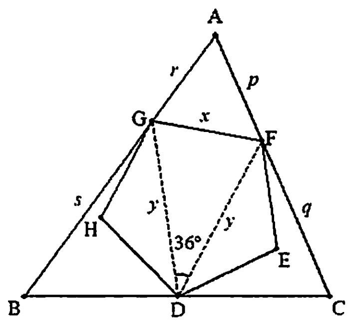
(2)　$x = \dfrac{ps + qr}{\sqrt{3p^2 + q^2}}$

(3)　$\cos A = \dfrac{rs - pq}{ps - qr}$

(3)　内接正五角形の場合

まず，△ABC の辺 BC の中点を頂点に持つ内接正五角形 DEFGH の場合の図を書いてみる。次の 3 通りを考えれば十分である。

[1] △ABC の 3 辺にある正五角形の頂点が D，F，G の場合（補題で，$\theta = 36°$ の場合）



正五角形の 1 辺を x，対角線を y とすると，

$y = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} x$

となる。

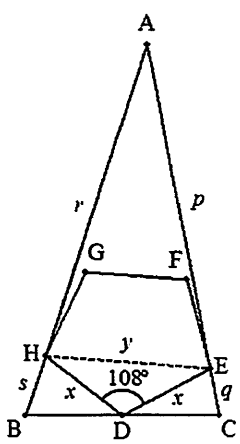
[2]，[3] も同様。

(1)　$(5 + 2\sqrt{5})p^2 + q^2 = (5 + 2\sqrt{5})r^2 + s^2$

(2)　$x = \dfrac{(1 + \sqrt{5})(ps + qr)}{2\sqrt{(5 + 2\sqrt{5})p^2 + q^2}}$

(3)　$\cos A = \dfrac{rs - pq}{ps - qr}$

[2] △ABC の 3 辺にある正五角形の頂点が D，E，H の場合（補題で，$\theta = 108°$ の場合）

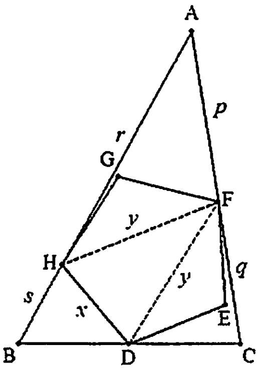


(1)　$(5 + 2\sqrt{5})p^2 + q^2 = (5 + 2\sqrt{5})r^2 + s^2$

(2)　$x = \dfrac{(-1 + \sqrt{5})(ps + qr)}{2\sqrt{(5 - 2\sqrt{5})p^2 + q^2}}$

(3)　$\cos A = \dfrac{rs - pq}{ps - qr}$

[3] △ABC の 3 辺にある正五角形の頂点が D，F，H の場合



(1)

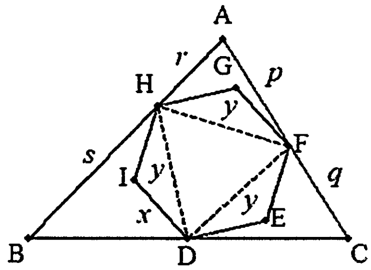
$$2\left(13+5\sqrt{5}\right)p^2+8\left(2+\sqrt{5}\right)pq+2\left(7+3\sqrt{5}\right)q^2$$
$$=4\left(5+2\sqrt{5}\right)r^2+\left\{\left(3+\sqrt{5}\right)s-\left(1+\sqrt{5}\right)r\right\}^2$$

(2)

$$x^2=\frac{(ps+qr)\left(p^2-q^2-r^2+s^2\right)}{\left(5+\sqrt{5}\right)(ps-qr)-\left(1+\sqrt{5}\right)(pr-qs)}$$

(4) 内接正六角形の場合

[1] △ABC の 3 辺にある正六角形の頂点が D，F，H の場合（補題で，$\theta=60°$ の場合）

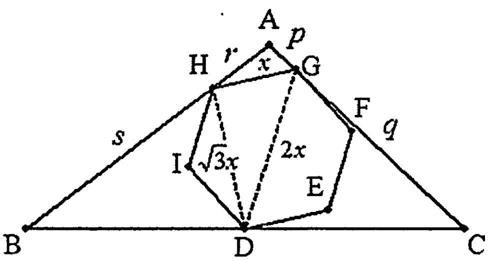


(1) $3p^2+q^2=3r^2+s^2$

(2) $x=\dfrac{ps+qr}{\sqrt{3\left(3p^2+q^2\right)}}$

(3) $\cos A=\dfrac{rs-pq}{ps-qr}$

[2] △ABC の 3 辺にある正六角形の頂点が D，G，H の場合



(1) $12p^2+(p+q)^2=12r^2+(r-s)^2$

(2) $x^2=\dfrac{(ps+qr)\left(p^2-q^2-r^2+s^2\right)}{2(7ps+qs-7qr-pr)}$

(3) $\cos A=-\dfrac{(p+q)^2+12(pq-rs)+(r-s)^2}{2(7ps+qs-7qr-pr)}$

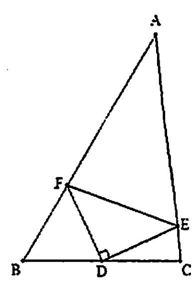
5　具体的な問題例

A288

△ABC について，BC の中点を D，CA，AB 上にそれぞれ，点 E，F を，図のように，△DEF が直角二等辺三角形になるようにとる。AE＝11，EC＝2，AF＝10 のとき，

(1)　DE を求めよ。

(2)　△ABC の面積を求めよ。

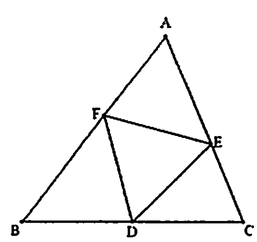


A325

△ABC の辺 BC の中点を D とし，辺 CA，AB 上にそれぞれ点 E，F を，△DEF が正三角形になるようにとる。このとき，

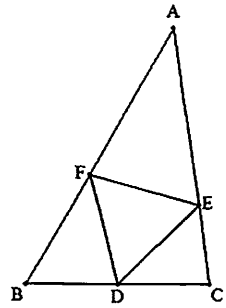
(1) $3AE^2+EC^2=3AF^2+FB^2$ を証明せよ。

(2) AE＝7，EC＝5，AF＝6 のとき，正三角形の 1 辺および BC を求めよ



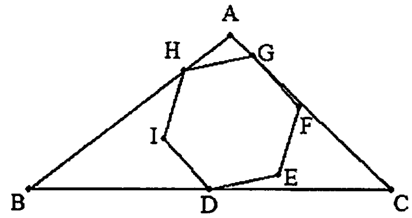
A326

BC=5, CA=7, AB=8 である△ABC の辺 BC の中点を D とし，辺 CA, AB 上にそれぞれ点 E, F を，△DEF が正三角形になるようにとる。このとき，正三角形の 1 辺を求めよ。



A327

△ABC の辺 BC の中点を D とし，三角形内に正六角形 DEFGHI を図のように頂点 G, H が三角形の辺上にあるようにつくる。AG＝2, GC＝13, AH＝4 のとき，正六角形の 1 辺を求めよ。



6　終わりに

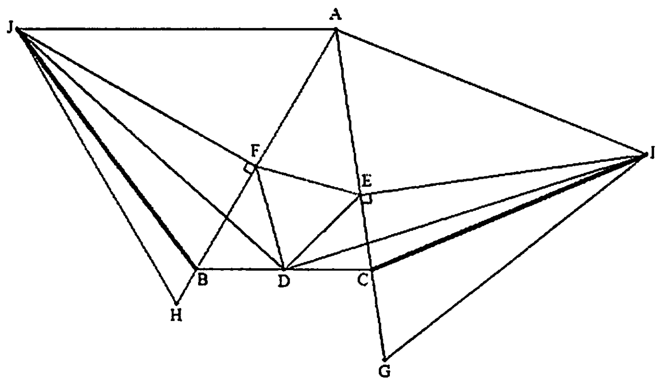
はじめに，$p^2+q^2=r^2+s^2$ という定理を発見したが，この定理はどこかで紹介されているだろうか。

また， 内接正方形の場合は，中学生レベルで $p^2+q^2=r^2+s^2$ を証明することができた。内接正三角形の場合も中学生レベルで $3p^2+q^2=3r^2+s^2$ を証明することができないか考えているが，現時点で分からない。

たとえば，右図で，AE の延長上に点 G を 2AE＝AG となるように，AF の延長上に点 H を 2AF＝AH となるようにそれぞれとる。図のように，AG, AH を 1 辺とする正三角形 AGI, AHJ をつくる。

$CI^2=3p^2+q^2$，$BJ^2=3r^2+s^2$

となるから，CI＝BJ を示すことができれば証明できたことになる。ご教示をお願いしたい。



また，3 の補題の別証明を見つけた方，是非ご教示をお願いしたい。

【参考文献】

［1］Website「ヨッシーの算数・数学の部屋」質問・問題に答えるコーナー
　　(平面図形に関する問題) http://yosshy.sansu.org/faq/chu_heimen.htm

［2］時岡郁夫の Website（http://www.phoenix-c.or.jp/~tokioka/）のこだわり数学
　　76.△ABC の辺 BC の中点を頂点に持つ内接正方形問題(PDF)
　　77.△ABC の辺 BC の中点を頂点に持つ内接正三角形問題(PDF)
　　78.△ABC の辺 BC の中点を頂点に持つ内接正多角形問題(PDF)

［3］時岡郁夫の Website（http://www.phoenix-c.or.jp/~tokioka/）の趣味の数学問題集