

三角形 ABC の辺 BC の中点を頂点に持つ内接正多角形について

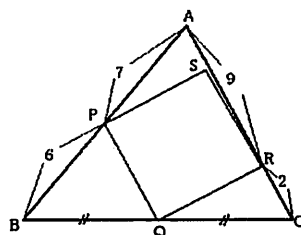
1 はじめに

前回の発表の続きである。

次の問題は、Website「ヨッシーの算数・数学の部屋」質問・問題に答えるコーナー(平面図形に関する問題)にある。解答を見ると、中学生レベルで求められる。

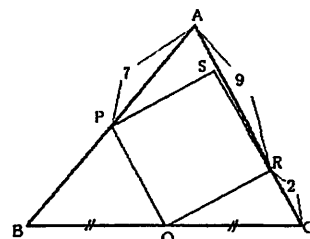
A 図のように三角形 ABC の内部に正方形 PQRS が 3 点 P, Q, R で接していて、BQ = QC です。このとき、正方形 PQRS の面積を求めなさい。

(A 図)



(答)  $\frac{136}{5}$

(B 図)



この問題を、さらに難しくして B 図のようにしたらどうなるだろう。中学生レベルで求められるだろうか。

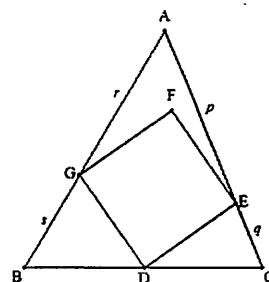
2 この問題を考えて分かったこと

以下、正方形 PQRS の記号を変えてある。

△ABC について、BC の中点を D とし、CA 上に点 E を、△ABC 内に点 F を、AB 上に点 G を、四角形 DEFG が正方形になるようにとる。AE = p, EC = q, AG = r, GB = s とおくと、次が成り立つ。

(1)  $p^2 + q^2 = r^2 + s^2$  (定理)

(2) (正方形の 1 辺)  $\frac{ps + qr}{\sqrt{2(p^2 + q^2)}}$



この定理や公式 (証明は前回の資料) を使うと、B 図の問題は

GB<sup>2</sup> = 9<sup>2</sup> + 2<sup>2</sup> - 7<sup>2</sup> = 36 より GB = 6。正方形の 1 辺は、 $\frac{9 \cdot 6 + 2 \cdot 7}{\sqrt{2(9^2 + 2^2)}} = \frac{2\sqrt{170}}{5}$  であるから、面積は  $\frac{136}{5}$

内接正方形を内接正三角形、内接正五角形、... に変えても似たような定理は得られるだろうか。また、正多角形の 1 辺はどうなるか、次に考えてみる。

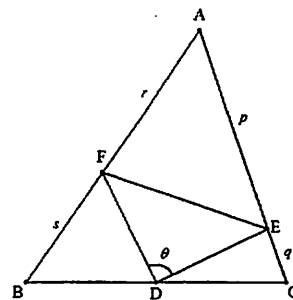
3 △ABC の辺 BC の中点を頂点に持つ二等辺三角形について (補題)

三角形 ABC の辺 BC の中点を D とし、辺 CA 上に点 E を、AB 上に点 F を、DE = DF となるようにとる。DE = DF = x, ∠FDE = θ, AE = p, EC = q, AF = r, FB = s とおくと、次が成り立つ。

(1)  $\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} p^2 + q^2 = \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} r^2 + s^2$  (定理)

(2)  $x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(ps + qr)(p^2 - q^2 - r^2 + s^2)}{ps - qr}} = \frac{ps + qr}{2 \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} p^2 + q^2}}$

(3)  $\cos A = \frac{rs - pq}{ps - qr}$

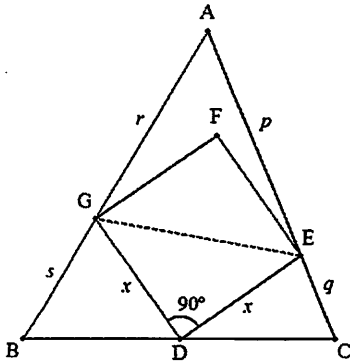


証明はホームページを参照 (こだわり数学 78)

4  $\triangle ABC$  の辺  $BC$  の中点を頂点に持つ内接正多角形について

3 の補題を使うと、次のとおり求めることができる。ただし、それぞれ内接正多角形が存在する場合の結果である。

(1) 内接正方形の場合 (補題で,  $\theta = 90^\circ$  の場合)

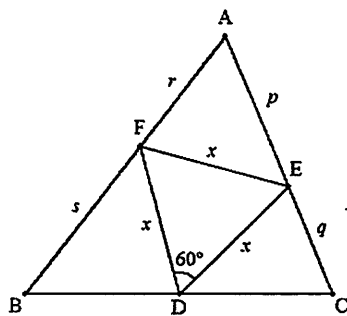


$$(1) p^2 + q^2 = r^2 + s^2$$

$$(2) x = \frac{ps + qr}{\sqrt{2(p^2 + q^2)}}$$

$$(3) \cos A = \frac{rs - pq}{ps - qr}$$

(2) 内接正三角形の場合 (補題で,  $\theta = 60^\circ$  の場合)



$$(1) 3p^2 + q^2 = 3r^2 + s^2$$

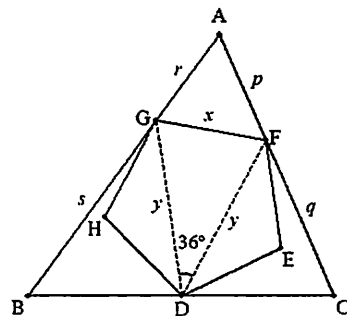
$$(2) x = \frac{ps + qr}{\sqrt{3p^2 + q^2}}$$

$$(3) \cos A = \frac{rs - pq}{ps - qr}$$

(3) 内接正五角形の場合

まず,  $\triangle ABC$  の辺  $BC$  の中点を頂点に持つ内接正五角形  $DEFGH$  の場合の図を書いてみる。次の 3 通りを考えれば十分である。

[1]  $\triangle ABC$  の 3 辺にある正五角形の頂点が  $D, F, G$  の場合 (補題で,  $\theta = 36^\circ$  の場合)



正五角形の 1 辺を  $x$ , 対角線を  $y$  とすると,  

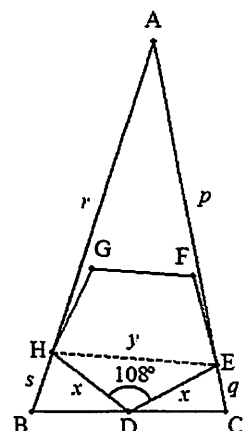
$$y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} x$$
 となる。

$$(1) (5 + 2\sqrt{5})p^2 + q^2 = (5 + 2\sqrt{5})r^2 + s^2$$

$$(2) x = \frac{(1 + \sqrt{5})(ps + qr)}{2\sqrt{(5 + 2\sqrt{5})p^2 + q^2}}$$

[2], [3] も同様。 (3)  $\cos A = \frac{rs - pq}{ps - qr}$

[2]  $\triangle ABC$  の 3 辺にある正五角形の頂点が  $D, E, H$  の場合 (補題で,  $\theta = 108^\circ$  の場合)

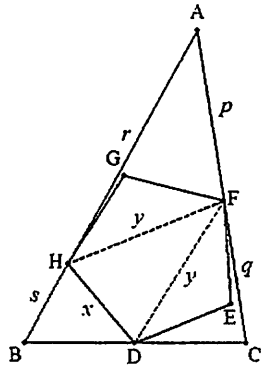


$$(1) (5 + 2\sqrt{5})p^2 + q^2 = (5 + 2\sqrt{5})r^2 + s^2$$

$$(2) x = \frac{(-1 + \sqrt{5})(ps + qr)}{2\sqrt{(5 - 2\sqrt{5})p^2 + q^2}}$$

$$(3) \cos A = \frac{rs - pq}{ps - qr}$$

[3]  $\triangle ABC$  の3辺にある正五角形の頂点が D, F, H の場合

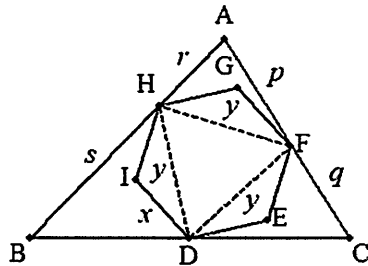


$$(1) \quad 2(13+5\sqrt{5})p^2 + 8(2+\sqrt{5})pq + 2(7+3\sqrt{5})q^2 = 4(5+2\sqrt{5})x^2 + \{(3+\sqrt{5})s - (1+\sqrt{5})y\}^2$$

$$(2) \quad x^2 = \frac{(ps+qr)(p^2-q^2-r^2+s^2)}{(5+\sqrt{5})(ps-qr) - (1+\sqrt{5})(pr-qs)}$$

(4) 内接正六角形の場合

[1]  $\triangle ABC$  の3辺にある正六角形の頂点が D, F, H の場合 (補題で,  $\theta = 60^\circ$  の場合)

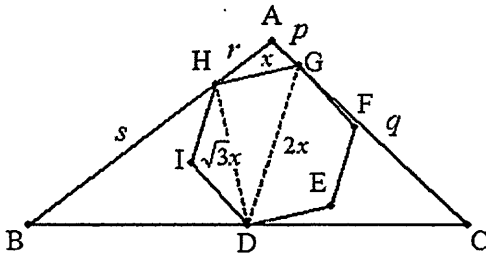


$$(1) \quad 3p^2 + q^2 = 3r^2 + s^2$$

$$(2) \quad x = \frac{ps+qr}{\sqrt{3(3p^2+q^2)}}$$

$$(3) \quad \cos A = \frac{rs-pq}{ps-qr}$$

[2]  $\triangle ABC$  の3辺にある正六角形の頂点が D, G, H の場合



$$(1) \quad 12p^2 + (p+q)^2 = 12r^2 + (r-s)^2$$

$$(2) \quad x^2 = \frac{(ps+qr)(p^2-q^2-r^2+s^2)}{2(7ps+qs-7qr-pr)}$$

$$(3) \quad \cos A = -\frac{(p+q)^2 + 12(pq-rs) + (r-s)^2}{2(7ps+qs-7qr-pr)}$$

## 5 具体的な問題例

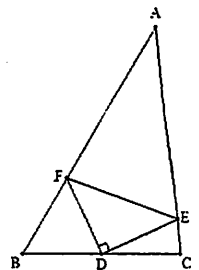
A288

$\triangle ABC$  について, BC の中点を D, CA, AB 上にそれぞれ, 点 E, F を, 図のように,  $\triangle DEF$  が直角二等辺三角形になるようにとる。

AE=11, EC=2, AF=10 のとき,

(1) DE を求めよ。

(2)  $\triangle ABC$  の面積を求めよ。

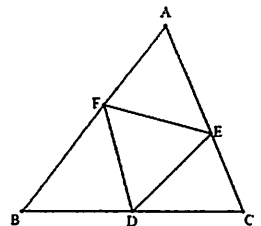


A325

$\triangle ABC$  の辺 BC の中点を D とし, 辺 CA, AB 上にそれぞれ点 E, F を,  $\triangle DEF$  が正三角形になるようにとる。このとき,

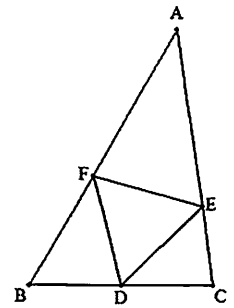
(1)  $3AE^2 + EC^2 = 3AF^2 + FB^2$  を証明せよ。

(2) AE=7, EC=5, AF=6 のとき, 正三角形の1辺および BC を求めよ



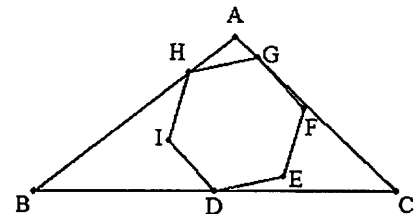
A326

BC=5, CA=7, AB=8 である△ABC の辺 BC の中点を D とし、辺 CA, AB 上にそれぞれ点 E, F を、△DEF が正三角形になるようにとる。このとき、正三角形の 1 辺を求めよ。



A327

△ABC の辺 BC の中点を D とし、三角形内に正六角形 DEFGHI を図のように頂点 G, H が三角形の辺上にあるようにつくる。AG=2, GC=13, AH=4 のとき、正六角形の 1 辺を求めよ。



6 終わりに

はじめに、 $p^2 + q^2 = r^2 + s^2$  という定理を発見したが、この定理はどこかで紹介されているだろうか。

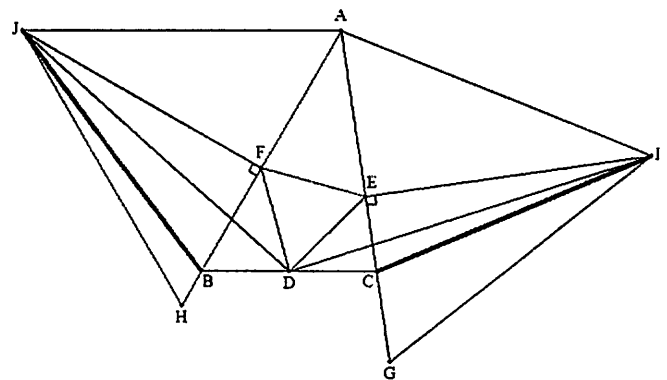
また、内接正方形の場合は、中学生レベルで  $p^2 + q^2 = r^2 + s^2$  を証明することができた。内接正三角形の場合も中学生レベルで  $3p^2 + q^2 = 3r^2 + s^2$  を証明することができないか考えているが、現時点で分からない。

たとえば、右図で、AE の延長上に点 G を  $2AE = AG$  となるように、AF の延長上に点 H を  $2AF = AH$  となるようにそれぞれとる。図のように、AG, AH を 1 辺とする正三角形 AGI, AHJ をつくる。

$$CI^2 = 3p^2 + q^2, \quad BJ^2 = 3r^2 + s^2$$

となるから、 $CI = BJ$  を示すことができれば証明できたことになる。ご教示をお願いしたい。

また、3 の補題の別証明を見つけた方、是非ご教示をお願いしたい。



【参考文献】

- [1] Website 「ヨッシーの算数・数学の部屋」 質問・問題に答えるコーナー (平面図形に関する問題) [http://yosshy.sansu.org/faq/chu\\_heimen.htm](http://yosshy.sansu.org/faq/chu_heimen.htm)
- [2] 時岡郁夫の Website (<http://www.phoenix-c.or.jp/~tokioka/>) のこだわり数学
  - 76. △ABC の辺 BC の中点を頂点に持つ内接正方形問題(PDF)
  - 77. △ABC の辺 BC の中点を頂点に持つ内接正三角形問題(PDF)
  - 78. △ABC の辺 BC の中点を頂点に持つ内接正多角形問題(PDF)
- [3] 時岡郁夫の Website (<http://www.phoenix-c.or.jp/~tokioka/>) の趣味の数学問題集