立命館慶祥中学校・高等学校　時岡郁夫
tokioka@spc.ritsumei.ac.jp

1次不定方程式の解法について

1　解法例

数学のいずみのトップページの項目のプリント倉庫「1 次不定方程式の整数解」を見た。別な解法を紹介したい。

問題 (A309) 52 円切手 x 枚と 82 円切手 y 枚を購入したら，代金が 2,300 円であった。x, y の値を求めよ。

（解 1）教科書の解法

	1	2	1	1	1
3	4	11	15	26	41
	3	8	11	15	26
	1	3	4	11	15

題意より　$52x+82y=2300$

簡単にすると　$26x+41y=1150 \cdots$①

この不定方程式の整数解を求めるために右辺を 1 にした　$26x+41y=1 \cdots$②

を考える。右のユークリッドの互除法から

41＝26×1＋15…③，26＝15×1＋11…④，15＝11×1＋4…⑤，11＝4×2＋3…⑥，4＝3×1＋1…⑦

である。⑦より

1＝4－3×1＝4－(11－4×2)×1　⑥より

＝4×3－11×1＝(15－11×1)×3－11×1　⑤より

＝15×3－11×4＝15×3－(26－15×1)×4　④より

＝15×7－26×4＝(41－26×1)×7－26×4　③より

＝41×7－26×11

よって　26×(−11)＋41×7＝1 となるので，②の 1 組の整数解は，$x=-11, y=7$ となるから，①の 1 組の整数解は，$x=-11\times1150=-12650, y=7\times1150=8050$　となる。

従って，①のすべての解は　$x=41k-12650 \cdots$⑧，$y=-26k+8050 \cdots$⑨（k は整数）

$x>0, y>0$ であるから

$x>0$ とおくと，$k>\dfrac{12650}{41}=308.5$

$y>0$ とおくと，$k<\dfrac{8050}{26}=309.6$

よって，$k=309$

これを⑧，⑨に代入して

$x=19, y=16 \cdots$（答）

（解 2）　（解 1）の点線で囲ってある部分を，次のとおり，計算することができる。

26＝a，41＝b とおいて，上のユークリッドの互除法と同じ計算をすると

-11a+7b=1 となるから，

26×(−11)＋41×7＝1

	1	2	1	1	1
8a-5b	-3a+2b	2a-b	-a+b	a	b
	8a-5b	-6a+4b	2a-b	-a+b	a
	-11a+7b	8a-5b	-3a+2b	2a-b	-a+b

（解 3）　（解 1）の点線で囲ってある部分を，次のとおり，連分数を使っても計算できる。

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{3}{4}}=1+\frac{4}{7}=\frac{11}{7}$$ となるので

$$\frac{41}{26}-\frac{11}{7}=\frac{41\times7-26\times11}{26\times7}=\frac{1}{26\times7}$$

（証明略）

α が $\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3} + \ddots}}$ と連分数展開されるとき，この α の n 次近似分数を $\dfrac{p_n}{q_n}$ とすると，

$\dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{q_n q_{n-1}}$ となる。(証明は参考文献［2］p304～参照)

(解 4)　題意より　$52x + 82y = 2300$

簡単にすると　$26x + 41y = 1150$

xについて解くと　$x = \dfrac{-41y + 1150}{26} = \dfrac{26(-2y) + 11y + 26 \cdot 44 + 6}{26} = -2y + 44 + \dfrac{11y + 6}{26} \cdots ①$

$\dfrac{11y + 6}{26} = k_1$ (整数) とおける。

y について解くと　$y = \dfrac{26k_1 - 6}{11} = \dfrac{11 \cdot 2k_1 + 4k_1 - 6}{11} = 2k_1 + \dfrac{4k_1 - 6}{11} \cdots ②$

$\dfrac{4k_1 - 6}{11} = k_2$ (整数) とおける。

k_1 について解くと　$k_1 = \dfrac{11k_2 + 6}{4} = \dfrac{4 \cdot 3k_2 - k_2 + 4 + 2}{4} = 3k_2 + 1 + \dfrac{-k_2 + 2}{4} \quad \cdots ③$

$\dfrac{-k_2 + 2}{4} = k$ (整数) とおける。

k_2 について解くと　$k_2 = -4k + 2$

③より　$k_1 = 3(-4k + 2) + 1 + k = -11k + 7$

②より　$y = 2(-11k + 7) + (-4k + 2) = -26k + 16 \cdots ④$

①より　$x = -2(-26k + 16) + 44 + (-11k + 7) = 41k + 19 \cdots ⑤$

$x > 0, y > 0$ であるから

$x > 0$ とおくと，$k > -\dfrac{19}{41}$

$y > 0$ とおくと，$k < \dfrac{7}{11}$

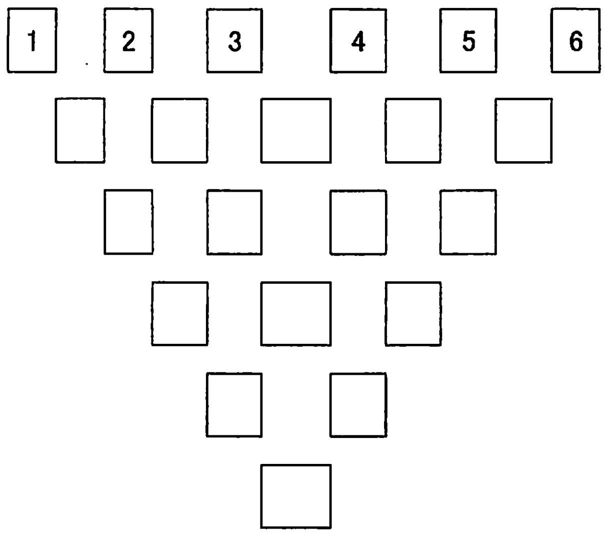
よって　$k = 0$

これを，⑤，④に代入して　$x = 19, y = 16 \cdots$ (答)

※この方法は，1組の整数解を求めないで，いきなりすべての整数解が求められる。

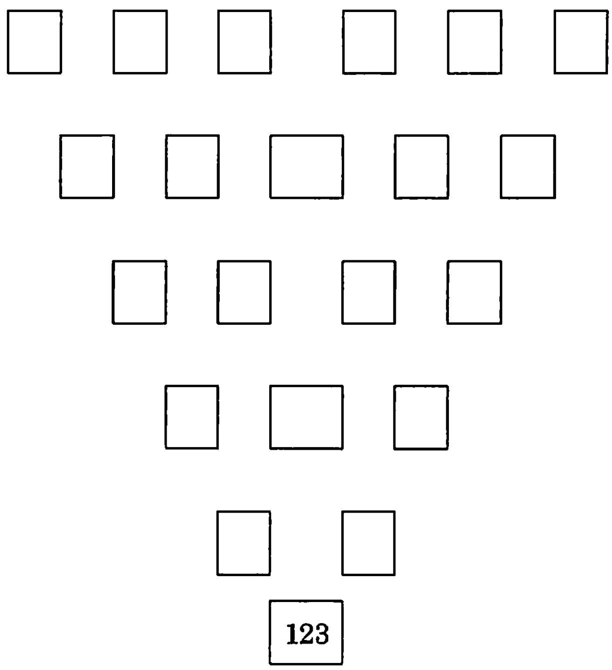
2　逆ピラミッド型の足し算パズル

(1)　隣同士の数字の和を下に記入し，これを続けていく。最後の答を求めよ。



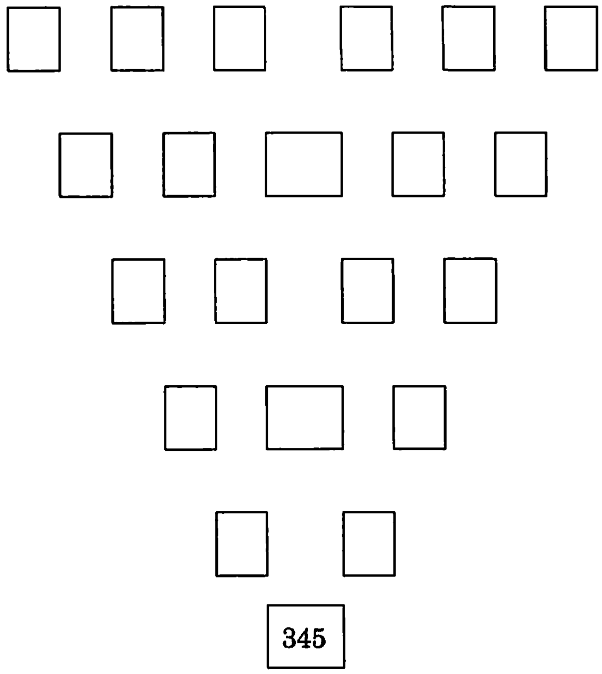
(2)　最後の答が 123 となるように，初めの 1 行目の 6 箇所の枠に，1～6 までの数字を入れよ。

ただし，答は 8 通りあるが，1 通りの答でよい。



(3)　最後の答が 345 となるように，初めの 1 行目の 6 箇所の枠に，1，2，4，8，16，32 の 6 個の数字を入れよ。

ただし，答は 8 通りあるが，1 通りの答でよい。



※解答例は，参考文献［4］にある。

3　その他

他にも１次不定方程式を利用できる問題がある。

> a,b は整数で，$0<\dfrac{a}{71}<1,0<\dfrac{b}{100}<1$ を満たしている。
>
> このとき，$\left|\dfrac{a}{71}-\dfrac{b}{100}\right|$ の最小値と，そのときの a,b の値を求めよ。

（答）最小値　$\dfrac{1}{7100}$　（$a=22,b=31$ のとき）

【参考文献】

［1］数学のいずみ http://izumi-math.jp/　プリント倉庫「1 次不定方程式の整数解」

［2］連分数のふしぎ（木村俊一著）講談社　ブルーバックス B-1770（2012 年）

［3］ピーター・フランクルの中学生でも分かる大人が解けない問題集（代数編）　日本評論社（2011 年）

［4］時岡郁夫の Website（http://www.phoenix-c.or.jp/~tokioka/）の趣味の数学問題集 A330