

1 次不定方程式の解法について

1 解法例

数学のいずみのトップページの項目のプリント倉庫「1 次不定方程式の整数解」を見た。別な解法を紹介したい。

問題 (A309) 52 円切手 x 枚と 82 円切手 y 枚を購入したら、代金が 2,300 円であった。 x, y の値を求めよ。

(解 1) 教科書の解法

題意より $52x + 82y = 2300$

簡単になると $26x + 41y = 1150 \cdots \textcircled{1}$

この不定方程式の整数解を求めるために右辺を 1 にした $26x + 41y = 1 \cdots \textcircled{2}$

を考える。右のユークリッドの互除法から

	1	2	1	1	1
3	4	11	15	26	41
	3	8	11	15	26
	1	3	4	11	15

$41 = 26 \times 1 + 15 \cdots \textcircled{3}$, $26 = 15 \times 1 + 11 \cdots \textcircled{4}$, $15 = 11 \times 1 + 4 \cdots \textcircled{5}$, $11 = 4 \times 2 + 3 \cdots \textcircled{6}$, $4 = 3 \times 1 + 1 \cdots \textcircled{7}$ である。⑦より

$1 = 4 - 3 \times 1 = 4 - (11 - 4 \times 2) \times 1$ ⑥より
 $= 4 \times 3 - 11 \times 1 = (15 - 11 \times 1) \times 3 - 11 \times 1$ ⑤より
 $= 15 \times 3 - 11 \times 4 = 15 \times 3 - (26 - 15 \times 1) \times 4$ ④より
 $= 15 \times 7 - 26 \times 4 = (41 - 26 \times 1) \times 7 - 26 \times 4$ ③より
 $= 41 \times 7 - 26 \times 11$

よって $26 \times (-11) + 41 \times 7 = 1$ となるので、②の 1 組の整数解は、 $x = -11, y = 7$ となるから、①の 1 組の整数解は、 $x = -11 \times 1150 = -12650, y = 7 \times 1150 = 8050$ となる。

従って、①のすべての解は $x = 41k - 12650 \cdots \textcircled{8}$, $y = -26k + 8050 \cdots \textcircled{9}$ (k は整数)

$x > 0, y > 0$ であるから

$x > 0$ とおくと、 $k > \frac{12650}{41} = 308.5$

$y > 0$ とおくと、 $k < \frac{8050}{26} = 309.6$

よって、 $k = 309$

これを⑧、⑨に代入して

$x = 19, y = 16 \cdots$ (答)

(解 2) (解 1) の点線で囲ってある部分を、次のとおり、計算することができる。

$26 = a, 41 = b$ において、上のユークリッドの互除法

と同じ計算をすると

$-11a + 7b = 1$ となるから、

$26 \times (-11) + 41 \times 7 = 1$

	1	2	1	1	1
$8a - 5b$	$-3a + 2b$	$2a - b$	$-a + b$	a	b
	$8a - 5b$	$-6a + 4b$	$2a - b$	$-a + b$	a
	$-11a + 7b$	$8a - 5b$	$-3a + 2b$	$2a - b$	$-a + b$

(解 3) (解 1) の点線で囲ってある部分を、次のとおり、連分数を使っても計算できる。

$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{4}} = 1 + \frac{4}{7} = \frac{11}{7}$ となるので

$\frac{41}{26} - \frac{11}{7} = \frac{41 \times 7 - 26 \times 11}{26 \times 7} = \frac{1}{26 \times 7}$

(証明略)

α が $\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$ と連分数展開されるとき、この α の n 次近似分数を $\frac{p_n}{q_n}$ とすると、

$\frac{p_n - p_{n-1}}{q_n - q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{q_n q_{n-1}}$ となる。(証明は参考文献 [2] p304~参照)

(解4) 題意より $52x + 82y = 2300$

簡単になると $26x + 41y = 1150$

x について解くと $x = \frac{-41y + 1150}{26} = \frac{26(-2y) + 11y + 26 \cdot 44 + 6}{26} = -2y + 44 + \frac{11y + 6}{26} \dots \textcircled{1}$

$\frac{11y + 6}{26} = k_1$ (整数) とおける。

y について解くと $y = \frac{26k_1 - 6}{11} = \frac{11 \cdot 2k_1 + 4k_1 - 6}{11} = 2k_1 + \frac{4k_1 - 6}{11} \dots \textcircled{2}$

$\frac{4k_1 - 6}{11} = k_2$ (整数) とおける。

k_1 について解くと $k_1 = \frac{11k_2 + 6}{4} = \frac{4 \cdot 3k_2 - k_2 + 4 + 2}{4} = 3k_2 + 1 + \frac{-k_2 + 2}{4} \dots \textcircled{3}$

$\frac{-k_2 + 2}{4} = k$ (整数) とおける。

k_2 について解くと $k_2 = -4k + 2$

③より $k_1 = 3(-4k + 2) + 1 + k = -11k + 7$

②より $y = 2(-11k + 7) + (-4k + 2) = -26k + 16 \dots \textcircled{4}$

①より $x = -2(-26k + 16) + 44 + (-11k + 7) = 41k + 19 \dots \textcircled{5}$

$x > 0, y > 0$ であるから

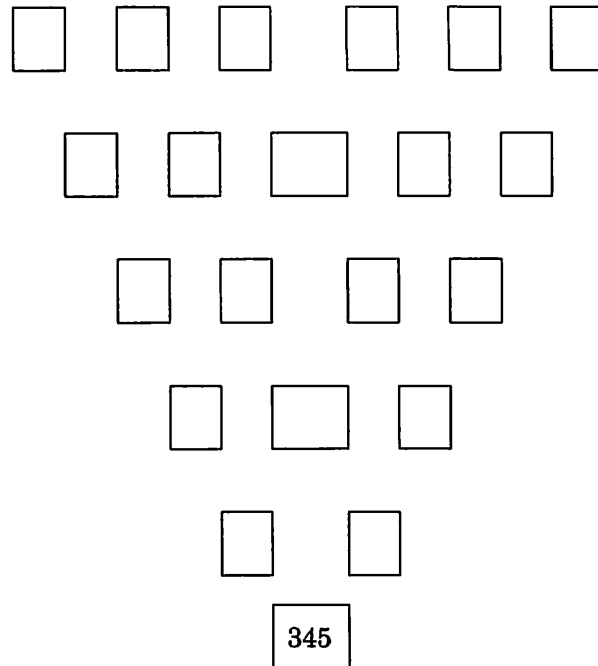
$x > 0$ とおくと、 $k > -\frac{19}{41}$

$y > 0$ とおくと、 $k < \frac{7}{11}$

よって $k = 0$

これを、⑤、④に代入して $x = 19, y = 16 \dots$ (答)

※この方法は、1組の整数解を求めないで、いきなりすべての整数解が求められる。



※解答例は、参考文献 [4] にある。

3 その他

他にも 1 次不定方程式を利用できる問題がある。

a, b は整数で, $0 < \frac{a}{71} < 1, 0 < \frac{b}{100} < 1$ を満たしている。

このとき, $\left| \frac{a}{71} - \frac{b}{100} \right|$ の最小値と, そのときの a, b の値を求めよ。

(答) 最小値 $\frac{1}{7100}$ ($a=22, b=31$ のとき)

【参考文献】

- [1] 数学のいずみ <http://izumi-math.jp/> プリント倉庫「1 次不定方程式の整数解」
- [2] 連分数のふしぎ (木村俊一著) 講談社 ブルーバックス B-1770 (2012 年)
- [3] ピーター・フランクルの中学生でも分かる大人が解けない問題集 (代数編) 日本評論社 (2011 年)
- [4] 時岡郁夫の Website (<http://www.phoenix-c.or.jp/~tokioka/>) の趣味の数学問題集 A330