第 97 回数学教育実践研究会資料　(2016/6/4　於北海道大学情報教育館)

立命館慶祥中学校・高等学校　時岡郁夫
tokioka@spc.ritsumei.ac.jp

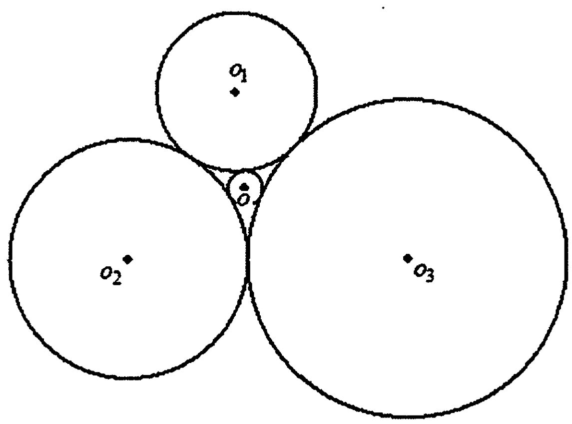
デカルトの円定理の証明法について

1　はじめに

[1]　3 円 $O_i(r_i)$ （$i=1,2,3$）が互いに外接し，これらが円 $O(r)$ に外接しているとき，これらの 4 円の半径の間に

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r}\right)^2=2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r^2}\right)$$

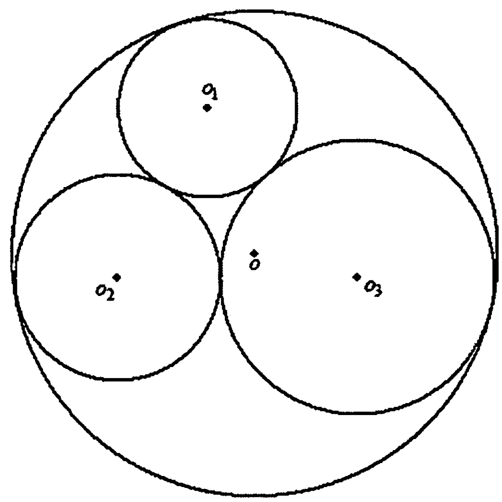
という関係が成り立つ。



[2]　3 円 $O_i(r_i)$ （$i=1,2,3$）が互いに外接し，これらが円 $O(r)$ に内接しているとき，これらの 4 円の半径の間に

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r}\right)^2=2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r^2}\right)$$

という関係が成り立つ。



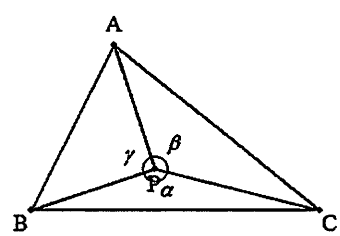
これらをデカルトの円定理という。

参考文献の[1]（PP22～23）に，三円傍斜術を使って，その証明が掲載されている。六斜術を使う証明も考えたが、どちらも高校では習わない。そこで、高校生向けに，三角関数を使った証明法を紹介したい。

2　補題

△ABC 内に点 P を取り，∠BPC＝α，∠CPA＝β，∠APB＝γ とおくと，

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1=0$ である。



（証）$\alpha+\beta+\gamma=2\pi$ であるから，$\cos(\alpha+\beta)=\cos(2\pi-\gamma)$

加法定理より　$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos\gamma$

移項して，両辺を 2 乗すると　$(\cos\alpha\cos\beta-\cos\gamma)^2=(\sin\alpha\sin\beta)^2$

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha, \sin^2\beta=1-\cos^2\beta$ であるから

$(\cos\alpha\cos\beta-\cos\gamma)^2=(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)$

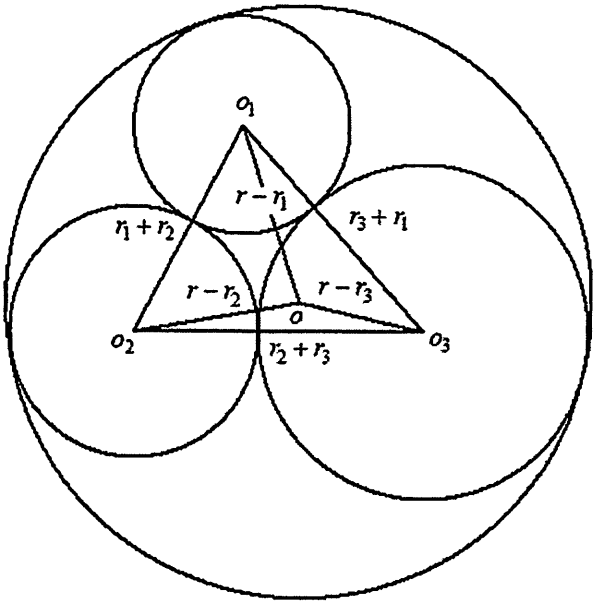
展開して，整理すると

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1=0$　■

3　デカルトの円定理の証明

どの文献にも[1]の証明を書き，[2]は省略されているので，[2]の証明から行う。

(1)　[2]の場合



$\angle O_2OO_3=\alpha, \angle O_3OO_1=\beta, \angle O_1OO_2=\gamma$ とおくと，右図より余弦定理から

$$\cos\alpha=\frac{(r-r_2)^2+(r-r_3)^2-(r_2+r_3)^2}{2(r-r_2)(r-r_3)}$$

$$=\frac{r^2+(r_2+r_3)r-r_2r_3}{(r-r_2)(r-r_3)}=1-\frac{2r_2r_3}{(r-r_2)(r-r_3)}$$ 同様に

$$\cos\beta=1-\frac{2r_3r_1}{(r-r_3)(r-r_1)},\quad \cos\gamma=1-\frac{2r_1r_2}{(r-r_1)(r-r_2)}$$

これらを，

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1=0$ に代入すると

$$\left\{1-\frac{2r_2r_3}{(r-r_2)(r-r_3)}\right\}^2+\left\{1-\frac{2r_3r_1}{(r-r_3)(r-r_1)}\right\}^2+\left\{1-\frac{2r_1r_2}{(r-r_1)(r-r_2)}\right\}^2$$

$$-2\left\{1-\frac{2r_2r_3}{(r-r_2)(r-r_3)}\right\}\left\{1-\frac{2r_3r_1}{(r-r_3)(r-r_1)}\right\}\left\{1-\frac{2r_1r_2}{(r-r_1)(r-r_2)}\right\}-1=0$$

両辺に $(r-r_1)^2(r-r_2)^2(r-r_3)^2$ を掛けて，r について整理すると（途中計算省略）

$$\left\{r_1^2r_2^2+r_2^2r_3^2+r_3^2r_1^2-2r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)\right\}r^2+2r_1r_2r_3(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)r+r_1^2r_2^2r_3^2=0\cdots①$$

$$\left\{r_1^2r_2^2+r_2^2r_3^2+r_3^2r_1^2-2r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)\right\}\left(\frac{r}{r_1r_2r_3}\right)^2+2(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)\cdot\frac{r}{r_1r_2r_3}+1=0$$

$$\frac{r}{r_1r_2r_3}=\frac{-(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)\pm\sqrt{(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)^2-\left\{r_1^2r_2^2+r_2^2r_3^2+r_3^2r_1^2-2r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)\right\}}}{r_1^2r_2^2+r_2^2r_3^2+r_3^2r_1^2-2r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}$$

$$=\frac{-(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)\pm2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}{r_1^2r_2^2+r_2^2r_3^2+r_3^2r_1^2-2r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}=\frac{1}{-(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)\mp2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}$$

$r>0$ より $\dfrac{r}{r_1r_2r_3}=\dfrac{1}{-(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)+2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}$

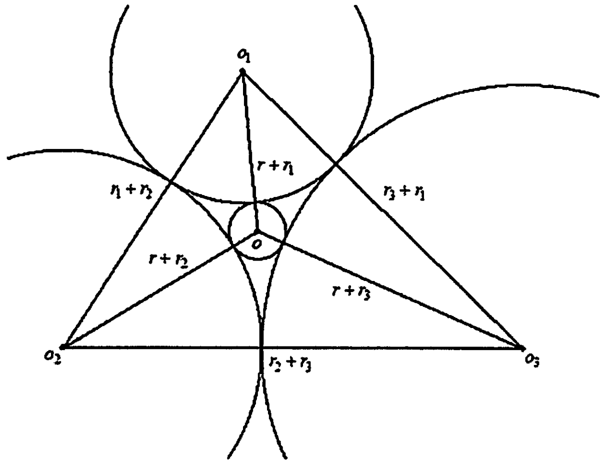
よって　$r=\dfrac{r_1r_2r_3}{-(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)+2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}\cdots②$

この結果は，$\left(\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_3}-\dfrac{1}{r}\right)^2=2\left(\dfrac{1}{r_1^2}+\dfrac{1}{r_2^2}+\dfrac{1}{r_3^2}+\dfrac{1}{r^2}\right)\cdots③$を満たす。

（証明）③の両辺に$r_1^2r_2^2r_3^2r^2$を掛けて，右辺から左辺を引くと①の左辺が得られる。■

(2)　[1]の場合

$\angle O_2OO_3=\alpha, \angle O_3OO_1=\beta, \angle O_1OO_2=\gamma$とおくと，右図より余弦定理から



$$\cos\alpha=\frac{(r+r_2)^2+(r+r_3)^2-(r_2+r_3)^2}{2(r+r_2)(r+r_3)}$$

$$=\frac{r^2+(r_2+r_3)r-r_2r_3}{(r+r_2)(r+r_3)}=1-\frac{2r_2r_3}{(r+r_2)(r+r_3)}$$

同様に

$$\cos\beta=1-\frac{2r_3r_1}{(r+r_3)(r+r_1)},$$

$$\cos\gamma=1-\frac{2r_1r_2}{(r+r_1)(r+r_2)}$$

これらを，$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1=0$に代入し，整理して，$r$について解くと，（途中計算省略）

$$r=\frac{r_1r_2r_3}{r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1+2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}\cdots④$$

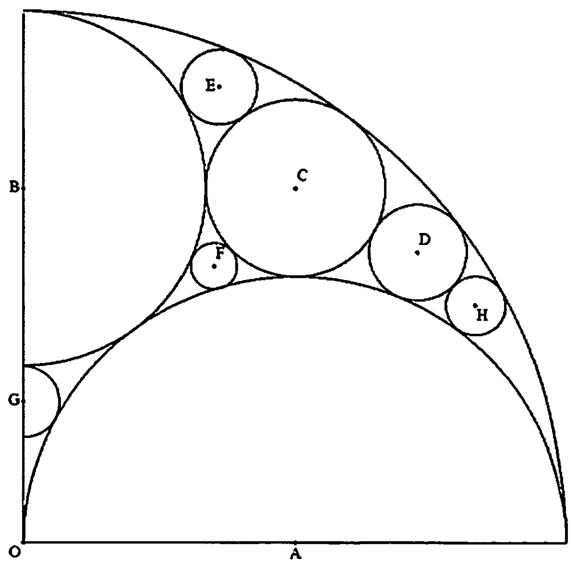
この結果は，$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r}\right)^2=2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r^2}\right)$を満たす。（証明省略）

4　蛇足

普段，デカルトの円定理を使う機会は少ない。今回，初等数学第78号の課題の一つである78-1の問題（参考文献［3]）を考えて，さらに，右図の円の半径を計算してみようと思ったのが，レポート作成のきっかけである。

4分の1円Oの半径を1とすると，半円A，半円B，円C，円D，円E，円F，半円G，円Hの半径はそれぞれ，

$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{11},\frac{1}{14},\frac{1}{23},\frac{1}{15},\frac{1}{18}$となる。



5　終わりに

計算してみて分かったが，この証明法は計算量が多くて大変である。補題の

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1=0$を長さの関係式に直したものが六斜術である。三角関数は使っているが，実は六斜術を用いた証明法である。やはり，先人がやってきた三円傍斜術を使って証明する方が計算量は少ないと思う。

初めてこの定理を見たとき，このように美しい定理を見つけたデカルトはすごいと思った。流石，後世

に名を残すだけのことはある。形は違えど，②，④を見つけていた和算家もすごい。
　さらに，空間においても，拡張された球定理が記載されていた。（文献[2]）

[1]　半径r_5の球外に，互いに外接している4個の球が外接している。

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}+\frac{1}{r_5}\right)^2=3\left(\frac{1}{r_1^{\ 2}}+\frac{1}{r_2^{\ 2}}+\frac{1}{r_3^{\ 2}}+\frac{1}{r_4^{\ 2}}+\frac{1}{r_5^{\ 2}}\right)$$

[2]　半径r_5の球内に，互いに外接している4個の球が内接している。

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}-\frac{1}{r_5}\right)^2=3\left(\frac{1}{r_1^{\ 2}}+\frac{1}{r_2^{\ 2}}+\frac{1}{r_3^{\ 2}}+\frac{1}{r_4^{\ 2}}+\frac{1}{r_5^{\ 2}}\right)$$

【参考文献】
［1］日本の幾何　何題解けますか？（深川英俊，ダン・ペドー共著／森北出版株式会社／2010年）
［2］Webpage：デカルトの円定理（googleで検索すると最初にヒットする。）
　http://aozoragakuen.sakura.ne.jp/taiwa/taiwaNch03/enteiri/node2.html
［3］初等数学第78号（松田康雄編，2016年3月号，1,000円，ISSN 1345-739X）

課題　78-1（木下宙氏出題）
問題．外円内に甲円2個，乙円2個，丙円4個が入っている。甲乙丙3円中心O_1, O_2, O_3からなる三角形は辺長が3，4，5であるピタゴラス三角形（円長が整数である直角三角形）と相似であることを示せ。
＜現存せず文献に記載されている府中市大国魂神社算額第2面第38問よりヒントを得ました。＞