

趣味の数学問題集

第 2 版

時岡郁夫 作・編集

はじめに

この問題集は私が高校時代に作成した問題（１００題程度）と大学時代に作成した問題，教員になり作成・編集した問題をまとめたものである．

高校時代の私の趣味は，自分で作った問題を先生方に解いてもらうことであった．問題の中には先生方でも解けない問題もあったので，私の相手をしてくれた数学の先生は１～２名しかいなかったと思う．

A問題は高校１年生で解ける程度，**B問題**は高校２年生で解ける程度，**C問題**は高校３年生で解ける程度を示している．

ただ，内容に偏りがあるのは，あくまで趣味として作成した問題だからである．高校当時，私の興味をもっていた分野が，一目瞭然である．

高校の定期考査でそのまま使用できる問題は少ないと思うが，大学入試問題としてなら使用できる問題は数多くあると自負している．

この問題集は，数学をこよなく愛する生徒に刺激を与えるものとなることを願っている．

２０００年３月１５日

北海道札幌拓北高等学校教諭 時 岡 郁 夫

A 問題

1. 整式 $f(x) = (x^4 + 4)(x^4 - 8x^2 + 4) + 64x^2$ について、次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を因数分解せよ。

(2) 方程式 $f(x) = 0$ を解け。

2. $F_n = (a+b+c)^{2n+1} - (a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1})$ ($n=1,2,3,4,5$) を因数分解せよ。

3. 3 次方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ の 1 つの解を a とするとき、次の式の値を求めよ。

$$\frac{1}{a^2 - a - 2} - \frac{1}{a^2 + a - 2} + \frac{1}{a^2 - 2a + 1} - \frac{1}{a^2 + 2a + 1}$$

4. x に関する不等式 $\left| \left| x+a \right| - \left| -b \right| + \left| a \right| - \left| -b \right| \right| \leq 1$ は $-1 \leq x \leq 1$ のとき、常に成り立つという。このとき、点 (a, b) の存在する範囲を図示せよ。

5. 整式 $f(x)$ は、 $f(1+x) + f(1-x) = 2x^2$, $f(3) = -3f(-1)$ を満たしており、方程式 $f(x) = 0$ は 2 重解をもつ。このような次数が 4 次以下の整式 $f(x)$ を求めよ。

6. 3 次方程式 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ の 3 つの解を a, b, g とするとき、次の式を p, q, r を用いて表せ。

$$D = (a-b)^2(b-g)^2(g-a)^2$$

7. 3 次方程式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ は相異なる 3 つの整数解をもち、ある整数 n とある素数 p に対して、 $f(n) + p = 0$ が成り立つとき、次の問いに答よ。

(1) a, b, c を n, p で表せ。

(2) a, b, c の関係式を求めよ。

8. 次の方程式の 1 つの解を q とおくと、他の解を q の最低次の整式として表せ。

(1) $x^3 - 3x + 1 = 0$

(2) $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$

(3) $x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$

(4) $x^3 + x^2 - 6x - 7 = 0$

9. 有理係数の整式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ は有理数の範囲で因数分解できなく，
 $d = \sqrt{a^2b^2 - 4a^3c + 18abc - 4b^3 - 27c^2}$ が有理数であるとする．このとき，方程式 $f(x) = 0$ の1つの解を q とするとき，他の解を q の最低次の整式として表せ．
10. 2次方程式 $x^2 + (a+b-p-q)x + ab - bp - aq = 0$ (a, b, p, q は実数) は， $pq \neq 0$ のとき実数解をもつことを証明せよ．
11. 方程式 $(a+b^2)x^3 + (2b+c)x^2 + 6x + 2a - c = 0$ は， $x=1$ だけを解にもつ．このとき実数 a, b, c の値を求めよ．
12. 複素係数の n 次方程式 $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$ の1つの解を a とするとき，
 $|a| < \max_{1 \leq i \leq n} |a_i| + 1$ であることを証明せよ．
13. 4次方程式 $x^4 - x^3 + ax^2 + x + 1 = 0$ は虚数解 a をもち， $\left(a + \frac{1}{a}\right)^{16} > 0$ のとき，実数 a の値を求めよ．
14. x, y は整数で， $13x - 31y = k$ (定数) を満たしている． $x^2 + y^2$ が最小となるとき， $5x - 12y = 1$ であった． k の値を求めよ．
15. x, y が整数であるとき，不定方程式 $13579x - 97531y = k$ (定数) を解け．
16. x, y は整数で， $13579x - 97531y = k$ (定数) を満たしている． $x^2 + y^2$ が最小になるとき，
 $1222x - 8777y = 1$ であった． k の値を求めよ．
17. 次の問に答えよ．
 (1) $x|y-4| + y|x+2| = 2$ のグラフをかけ．
 (2) x に関する方程式 $|a-4|x + a|x+2| = 2$ について，
 正の解をもつときの a の値の範囲を求めよ．
 2つの解をもつときの a の値の範囲を求めよ．
 で2つの解の差が最小となるときの a の値を求めよ．
18. 次の不等式を解け．ただし， $[x]$ はガウスの記号で， x を超えない最大の整数を表わすものとする．
 (1) $[x]^2 - 3x + 2 < 0$
 (2) $[x^2] - 3x + 2 < 0$

(3) $[x^2] - [3x] + 2 < 0$

19. 不等式 $\frac{1}{x^4 - 6x^2 + a} > \frac{1}{x^2 - 6x + a}$ を解け. ただし, a は実数.

20. $x = b^2 + bc + c^2, y = c^2 + ca + a^2, z = a^2 + ab + b^2$ のとき, $1 \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{yz + zx + xy} \leq 2$ を証明せよ. た

だし, a, b, c は実数で, $abc \neq 0$ とする.

21. $n!$ を計算したとき, 終わりに並ぶ 0 の数を N とする. 次の問いに答よ.

(1) N を求めよ.

(2) $N < \frac{n}{4}$ を証明せよ.

22. $a \leq [a] + 1 \leq n \leq [2a]$ (n は整数) のとき, 次の問いに答よ.

(1) $n \leq \left[\frac{na}{n-a} \right] + 1$ を証明せよ.

(2) $\frac{1}{n} + \frac{1}{\left[\frac{na}{n-a} \right] + 1} < \frac{1}{a}$ を証明せよ.

23. 方程式 $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ の 1 つの解 a に対して, $b_i = a^i + a^{-i}$ とおくと, 多項式 $f(x) = (x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$ を求めよ.

24. 方程式 $x^{12} + x^{11} + \cdots + x + 1 = 0$ の 1 つの解 a に対して, $b_i = a^i + a^{-i}$, $g_1 = b_1 + b_5, g_2 = b_2 + b_3, g_3 = b_4 + b_6$ とおくと, 多項式 $f(x) = (x - g_1)(x - g_2)(x - g_3)$ を求めよ.

25. 方程式 $x^{18} + x^{17} + \cdots + x + 1 = 0$ の 1 つの解 a に対して, $b_i = a^i + a^{-i}$, $g_1 = b_1 + b_7 + b_9, g_2 = b_2 + b_3 + b_5, g_3 = b_4 + b_6 + b_9$ とおくと, 多項式 $f(x) = (x - g_1)(x - g_2)(x - g_3)$ を求めよ.

26. $f(x) = x^4 + px^2 + qx + r = 0$ の 4 つの解 $a_i (i=1,2,3,4)$ に対して,

$$b_1 = (a_1 + a_2)(a_3 + a_4), b_2 = (a_1 + a_3)(a_2 + a_4), b_3 = (a_1 + a_4)(a_2 + a_3),$$

$$g_1 = b_1^2 b_2 + b_2^2 b_3 + b_3^2 b_1, g_2 = b_1 b_2^2 + b_2 b_3^2 + b_3 b_1^2 \text{ とおくととき, 次の問いに答よ.}$$

(1) b_1, b_2, b_3 を 3 つの解にもち, x^3 の係数が 1 である 3 次方程式を $g(x) = 0$ とする. $g(x)$ を求めよ.

(2) g_1, g_2 を 2 つの解にもち, x^2 の係数が 1 である 2 次方程式を $h(x) = 0$ とする. $h(x)$ を求めよ.

(3) $f(x), g(x), h(x)$ の判別式をそれぞれ $d(f), d(g), d(h)$ とおくととき, $d(f) = d(g) = d(h)$ を証明せよ. ただし, 判別式とは解の差積の平方で, 例えば, $d(g) = (b_1 - b_2)^2 (b_2 - b_3)^2 (b_3 - b_1)^2$ である.

27. x, y は実数で, $x^3 + 6xy + 8y^3 = 1$ のとき, $x^2 + y^2 + 2y$ の最小値と, そのときの x, y の値を求めよ.

28. 2 点 $(a, b), (0, c)$ を通る半径 r の円の中心の座標を求めよ. ただし, $\Delta = \frac{4r^2}{a^2 + (b-c)^2} - 1 > 0$ とする.

29. 2 つの放物線 $y = ax^2 + b, y = bx^2 + ax$ によって囲まれた部分の中に常に点 $(2, 2)$ が存在する. このとき, 点 (a, b) の存在する範囲を図示せよ.

30. 次の問いに答よ.

(1) $1 + \sin q = \tan q$ のとき, $\sin q$ の値を求めよ.

(2) $1 - \sin q = \tan q$ のとき, $\sin q$ の値を求めよ.

(3) $1 + \cos q = \tan q$ のとき, $\cos q$ の値を求めよ.

31. 下の鋭角三角形 ABC において, 次の各々の場合における $K_i = \frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}$ の値を求めよ.

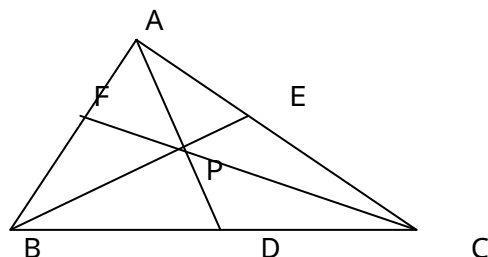
(1) K_1 は点 P が重心の場合

(2) K_2 は点 P が内心の場合

(3) K_3 は点 P が外心の場合

(4) K_4 は点 P が垂心の場合

(5) K_5 は点 D, E, F が内接円の接点の場合



32. 三角形 ABC 内に 1 点 P をとり , AP, BP, CP と辺 BC, CA, AB との交点をそれぞれ D, E, F とする .

$AE = bx(0 < x < 1), AF = cy(0 < y < 1)$ とおくとき , 次の問いに答よ .

- (1) BD, CD の長さを求めよ .
- (2) $\triangle DEF$ の面積 K を求めよ . ただし , $\triangle ABC$ の面積を S とする .
- (3) K の最大値を与える x, y の値を求めよ . また , このとき点 P はどんな点か .

33. どの内角も 120° を超えない $\triangle ABC$ の外部に , 3 点 A', B', C' を次のようにとる . 3 つの三角形

$A'BC, AB'C, ABC'$ は正三角形で , 互いに重ならない . このとき , 次の問いに答よ .

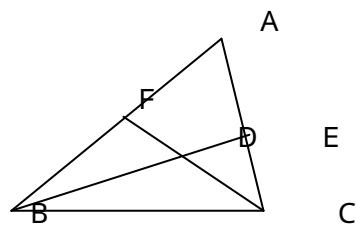
- (1) 線分 AA', BB', CC' は 1 点 P で交わることを証明せよ .
- (2) AP の長さを求めよ .
- (3) $AP^2 + BP^2 + CP^2$ を求めよ .

34. 三辺の和が $2s$ の三角形の内接円の半径を r とするとき , $r = \frac{s}{3\sqrt{3}}$ を証明せよ .

35. 2 つの円 $x^2 + y^2 = r_1^2, (x-d)^2 + y^2 = r_2^2 (r_1 + r_2 < d)$ の共通内接線と共通外接線の方程式を求めよ .

36. 右図の $\triangle ABC$ について , 次を証明せよ .

- (1) $A = 60^\circ$ で点 D が内心ならば , $DE = DF$.
- (2) $AB \neq AC$, 点 D は内心 , $DE = DF$ ならば , 四角形 $ABCD$ は円に内接する .



37. $\triangle ABC$ の $\angle A = 135^\circ$ の 3 等分線が辺 BC と交わる点を順に D, E とし ,

$AB = b, AD = d, AE = e, AC = c$ とおくとき , 次の問いに答よ .

- (1) $bc = bd + de + ec$ を証明せよ .
- (2) $\frac{e}{b} + \frac{d}{c}$ の最小値を求めよ .

38. $\triangle ABC$ において , 次の場合に $\angle A$ の大きさを求めよ . ただし , $m > n$ とする .

- (1) $a = m^2 - mn + n^2, b = 2mn - n^2, c = m^2 - n^2$
- (2) $a = m^2 + mn + n^2, b = 2mn + n^2, c = m^2 - n^2$

39. $\triangle ABC$ の辺 AB, AC 上にそれぞれ点 E, D をとり, 線分 BD と CE との交点を F とする.

$AD = nAC (0 < n < 1), AE = mAB (0 < m < 1)$ とおくとき, 面積比 $\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}$ を求めよ.

40. 台形 $ABCD (AD \parallel BC)$ の辺 AB 上に点 E を, 辺 DC 上に点 F を $EF \parallel BC$ となるようにとる. このとき, $x = AD, y = BC, z = EF$ の関係式を求めよ.

41. 長方形 $ABCD$ の辺 CD, DA 上にそれぞれ点 P, Q を $PC : PD = QD : QA$ かつ $\angle PQB = \angle R$ となるようにとる. このとき, AB, BC, CP, PD, DQ, QA の長さが整数となるものをすべて求めよ. 例えば, 順に $4, 8, 1, 3, 2, 6$.

42. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{9}{10}$ を満たす自然数 $x, y, z (x \leq y \leq z)$ の値を求めよ.

43. $a, b, c, d (a \leq b \leq c \leq d)$ は自然数で, $k = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} < 1$ を満たしている. k の最大値と, そのときの a, b, c, d の値を求めよ.

44. 右の図式で異なる文字は異なる数字を表し, 同じ文字は同じ数字を表すものとする. $S < G, R < L$ とするとき, 文字に数字を当てはめよ.

S E N D
M O R E
+ G O L D
M O N E Y

45. 次の問いに答よ.

- (1) 4 つ数 $1777, 7177, 7717, 7771$ の中で, 素数でない数はどれか.
- (2) 5 つ数 $17777, 71777, 77177, 77717, 77771$ の中で, 素数はどれか.
- (3) 7 つ数 $1777777, 7177777, 7717777, 7771777, 7777177, 7777717, 7777771$ の中で, 17 を因数にもつ数はどれか.
- (4) 8 つ数 $17777777, 71777777, 77177777, 77717777, 77771777, 77777177, 77777717, 77777771$ の中で, 素数はどれか.

46. 次の 9 つの $\square$ に, 1 から 9 までの数字を 1 つずつ入れよ.

(1)

$$\begin{array}{r} \square \square \square \square \\ \times \quad \square \\ \hline \square \square \square \square \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{r} \square \square \square \\ \times \quad \square \square \\ \hline \square \square \square \square \end{array}$$

47. 西暦□□□□年(昭和□□年)□月□□日の9ヶ所の□に1～9までの数字を1個ずつ入れよ．また，その曜日を求めよ．

48. 右の図式で異なる文字は異なる数字を表す．A から I までの数字を求めよ。

$$\begin{array}{r}
 AB \\
 \times C \\
 \hline
 DE \\
 + FG \\
 \hline
 HI
 \end{array}$$

49. 次の A , B , C , D , E に当てはまる数字を求めよ．

$$\begin{array}{r}
 ABCDE \\
 \times \quad 4 \\
 \hline
 EDCBA
 \end{array}$$

50. 次の9つの□に，4を除く0から9までの数字を1つずつ入れよ．

$$\begin{array}{r}
 \square\square\square\square \\
 \times \quad 4 \\
 \hline
 \square\square\square\square\square
 \end{array}$$